УДК 517.925 DOI:10.24144/2616-7700.2018.2(33).88-99

Д. Є. Ліманська (Одеський нац. ун-т ім. І. І. Мечникова)

ІСНУВАННЯ АНАЛІТИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЯКІ ЧАСТКОВО РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНИХ, ПОБЛИЗУ НЕРУХОМОЇ ОСОБЛИВОЇ ТОЧКИ

In this article, the system of ordinary differential equations, that are not resolved relatively to the derivatives, is considered in cases of a removable singularity and pole. For both cases, it is established theorems on the existence of at least one analytic solution in some complex domain with singularity on the border, of the Cauchy problem with an additional condition. In addition, the asymptotic behavior of these solutions in this domain is studied.

У цій статті система звичайних диференціальних рівнянь, які частково розв'язані відносно похідних, розглядається у разі усувної особливої точки або полюса. Для обох випадків встановлені теореми про існування хоча б одного аналітичного розв'язку задачі Коші з додатковою умовою в деякій комплексній області з особливою точкою на межі. Крім того, вивчається асимптотична поведінка цих розв'язків в цій області.

1. Вступ. У статті використовуються методи дослідження систем вигляду

$$F(z,w,w^{'})=0, F: D\times G\times G_1\to\mathbb{C}^{2n+1}, D\subset\mathbb{C}, G\subseteq\mathbb{C}^n, G_1\subseteq\mathbb{C}^n$$

у дійсної області, які були запропоновані Р. Г. Грабовскою [2, 3] і Й. Дібліком [3, 12]. Ці методи були розвинені в комплексній області Г. Є. Самковою [4, 6, 8–11] Дослідження Г. Є. Самкової продовжені в роботах Н. В. Шарай [10, 11], Є. А. Михайленко та інших. Ця робота є розвитком зазначених методів вивчення системи диференціальних рівнянь, які не розв'язані відносно похідних, в комплексній області.

2. Введення деяких допоміжних позначень. Для довільних фіксованих $t_1>0, v_1, v_2\in\mathbb{R}, v_1<v_2$, введемо допоміжні множини: $\breve{I}(t_1)=\{(t,v)\in\mathbb{R}^2: t\in(0,t_1), v\in(v_1,v_2)\}; L_{v_0}(t_1)=\{(t,v)\in\mathbb{R}^2: t\in(0,t_1), v=v_0\in(v_1,v_2)\}, -v_0$ фіксоване число; $O_{t_1}(t_0)=\{(t,v)\in\mathbb{R}^2: t=t_0, v\in(v_1,v_2)\}$ при фіксованому $t_0\in(0,t_1)$.

При $z=z(t,v)=te^{iv}$, множину $\breve{I}(t_1)\subset\mathbb{R}^2$ поставимо у відповідність до множини $I(t_1)\subset\mathbb{C}: I(t_1)=\{z=te^{iv}\in\mathbb{C}: t\in(0,t_1), v\in(v_1,v_2)\}$.

Означення 1. *Нехай $p,g:\breve{I}(t_1)\to[0,+\infty)$. Будемо казати, що функція $p(t,v)$ має властивість Q_1 відносно функції $g(t,v)$ при $v=v_0\in(v_1,v_2)$, якщо функція $p(t,v_0)$ є функцією вищого порядку малості відносно функції $g(t,v_0)$ при $t\to+0$.*

Означення 2. *Нехай $p,g:\breve{I}(t_1)\to[0,+\infty)$. Будемо казати, що функція $p(t,v)$ має властивість Q_2 відносно функції $g(t,v)$ на множині $\breve{I}(t_1)$, якщо існують такі $C_1\geq 0, C_2\geq 0$, що на множині $\breve{I}(t_1)$ виконуються нерівності*

$$C_1g(t,v)\leq p(t,v)\leq C_2g(t,v).$$

Введемо допоміжні вектор-функції $\varphi^{(0)}(z)=(\varphi_1^{(0)}(z),\ldots,\varphi_p^{(0)}(z))$, $\varphi^{(0)}:I(t_1)\to\mathbb{C}^p$, $\psi^{(0)}(t,v)=(\psi_1^{(0)}(t,v),\ldots,\psi_p^{(0)}(t,v))$, $\psi_j^{(0)}:\breve{I}(t_1)\to[0;+\infty), j=\overline{1,p}$, при $z=z(t,v)=te^{iv}, \psi_j^{(0)}(t,v)=\mid\varphi_j^{(0)}(z(t,v))\mid, j=\overline{1,p}$.

Виберемо аналітичну на множині $I(t_1)$ вектор-функцію $\varphi^{(0)}(z)$ так, що б для будь-яких $z \in I(t_1)$, для відповідних функцій $\psi_j^{(0)}(t,v) > 0$ були виконані умови:

$$\psi_j^{(0)}(t,v) > 0; (\psi_j^{(0)}(t,v))_t^{'} > 0; (\psi_j^{(0)}(t,v))_v^{'} \geq 0, j = \overline{1,p};$$

та рівномірно відносно $v \in (v_1, v_2), (t,v) \in \breve{I}(t_1)$ були виконані умови:

$$\psi_j^{(0)}(+0,v) = 0, (\psi_j^{(0)}(+0,v))_t^{'} = 0, j = \overline{1,p}.$$

3. Постановка задачі. Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$A(z)Y^{'} = B(z)Y + f(z,Y,Y^{'}), \tag{1}$$

де матриці $A, B : D_1 \to \mathbb{C}^{m\times p}, D_1 = \{z : |z| < R_1, R_1 > 0\} \subset \mathbb{C}$, матриці $A(z), B(z)$ аналітичні в області D_{10}, $D_{10} = D_1 \backslash \{0\}$, жмуток матриць $A(z)\lambda - B(z)$ сингулярний при $z \to 0$, функція $f : D_1 \times G_1 \times G_2 \to \mathbb{C}^m$, де області $G_k \subset \mathbb{C}^p$, $0 \in G_k, k = 1,2$, функція $f(z,Y,Y^{'})$ є аналітичною в області $D_{10} \times G_{10} \times G_{20}$, $G_{k0} = G_k \backslash \{0\}, k = 1,2$, та в точці (0,0,0) має ізольовану особливу точку.

Систему (1) досліджуємо у припущенні, що $m > p$ і $rangA(z) = p$ при $z \in D_1$, тоді матриці $A(z), B(z)$ та вектор-функція $f(z,Y,Y^{'})$ матимуть вигляд

$$A(z) = \begin{pmatrix} A_1(z) \\ A_2(z) \end{pmatrix}; B(z) = \begin{pmatrix} B_1(z) \\ B_2(z) \end{pmatrix}; f(z,Y,Y^{'}) = \begin{pmatrix} f_1(z,Y,Y^{'}) \\ f_2(z,Y,Y^{'}) \end{pmatrix} \tag{2}$$

де $A_1 : D_1 \to \mathbb{C}^{p\times p}$, $A_2 : D_1 \to \mathbb{C}^{(m-p)\times p}$, $B_1 : D_1 \to \mathbb{C}^{p\times p}$, $B_2 : D_1 \to \mathbb{C}^{(m-p)\times p}$, $detA_1(z) \neq 0$ при $z \in D_1, f_1 : D_1 \times G_1 \times G_2 \to \mathbb{C}^p$, $f_2 : D_1 \times G_1 \times G_2 \to \mathbb{C}^{(m-p)}$.

З урахуванням (2) система (1) набуває вигляд (3)-(4):

$$Y_1^{'} = A_1^{-1}(z)B_1(z)Y_1 + A_1^{-1}(z)f_1(z,Y,Y_1^{'}), \tag{3}$$

$$A_2(z)Y^{'} = B_2(z)Y + f_2(z,Y,Y^{'}), \tag{4}$$

де $A_1^{-1}(z)B_1(z)$ аналітична матриця в області D_{10}, $A_1^{-1}(z)f_1(z,Y,Y^{'})$ – аналітична вектор-функція в області $D_{10} \times G_{10} \times G_{20}$, тобто, у точці (0,0,0) має ізольовану особливу точку, отже, точка (0,0,0) є усувною особливою точкою для функції $A_1^{-1}(z)f_1(z,Y,Y^{'})$ [1]. Довизначимо вектор-функцію $A_1^{-1}(z)f_1(z,Y,Y^{'})$ у точці (0,0,0) так, що б вона стала аналітичною функцією в області $D_1 \times G_1 \times G_2$.

Розглянемо два випадки:

1) $A_1^{-1}(z)B_1(z)$ – аналітична матриця в області D_{10} та у точці $z = 0$ має усувну особливу точку;

2) $A_1^{-1}(z)B_1(z)$ – аналітична матриця в області D_{10} та у точці $z = 0$ має полюс порядку r.

Для першого випадку введемо позначення

$$A_1^{-1}(z)B_1(z) = P^{(1)}(z), A_1^{-1}(z)f_1(z,Y,Y^{'}) = F(z,Y,Y^{'}),$$

тоді система (3) прийме вигляд

$$Y^{'} = P^{(1)}(z)Y + F(z,Y,Y^{'}), \tag{5}$$

де $P^{(1)} : D_1 \to \mathbb{C}^{p\times p}$, $P^{(1)}(z)$ – аналітична матриця в області D_1, $F(z, Y, Y')$ – аналітична вектор-функція в області $D_1 \times G_1 \times G_2$.

Для другого випадку введемо позначення

$$A_1^{-1}(z)B_1(z) = z^{-r}P^{(2)}(z), A_1^{-1}(z)f_1(z, Y, Y') = F(z, Y, Y')$$

тоді система (3) прийме вигляд

$$Y' = z^{-r}P^{(2)}(z)Y + F(z, Y, Y'), \tag{6}$$

де $P^{(2)} : D_1 \to \mathbb{C}^{p\times p}, P^{(2)}(z)$ – аналітична матриця в області D_1.

Для обох випадків досліджуються питання існування аналітичних розв'язків задачі Коші для системи (3)-(4) з початковою умовою

$$Y(z) \to 0 \,\text{при}\; z \to 0, z \in D_{10}, \tag{7}$$

та додатковою умовою

$$Y'(z) \to 0 \,\text{при}\; z \to 0, z \in D_{10}. \tag{8}$$

4. Системи (5) та (6) на множинах $L_{v_0}(t_1)$ та $O_{t_1}(t_0)$.

Розглянемо комплексну змінну $z = te^{iv}$, де $t \geq 0$, $t, v \in \mathbb{R}$. Зафіксуємо $v = v_0$, $v_0 \in (v_1, v_2)$ і розглянемо поведінку розв'язків систем (5) та (6) на відрізку $L_{v_0}(t_1)$.

При $z = z(t, v_0) = te^{iv_0}$ у системах (5) та (6) зобразимо кожну з вектор-функцій і матриць в алгебраїчній формі, при цьому відокремимо дійсні та уявні частини та введемо такі позначення:

$$Y(z(t, v_0)) = \widetilde{Y}(t), \widetilde{Y}(t) = \widetilde{Y}_1(t) + i\widetilde{Y}_2(t),$$

$$\widetilde{Y}_j(t) = col(\widetilde{Y}_{j1}(t), ..., \widetilde{Y}_{jp}(t)), j = 1, 2,$$

$$P^{(\beta)}(z(t, v_0)) = \|\widetilde{p}^{(\beta)}_{jk}(t)\|^p_{j,k=1} = \widetilde{P}^{(\beta)}_1(t) + i\widetilde{P}^{(\beta)}_2(t),$$

$$\widetilde{P}^{(\beta)}_s(t) = \|\widetilde{p}^{(\beta)}_{jks}(t)\|^p_{j,k=1}, s = 1, 2,$$

де $\widetilde{p}^{(\beta)}_{jk}(t) = \widetilde{p}^{(\beta)}_{jk1}(t) + i\widetilde{p}^{(\beta)}_{jk2}(t), j, k = \overline{1, p}, \beta = 1, 2,$

$$F(z(t, v_0), Y(z(t, v_0)), Y'(z(t, v_0))) = \widetilde{F}(t, \widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2, \widetilde{Y}'_1, \widetilde{Y}'_2),$$

$$\widetilde{F}(t, \widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2, \widetilde{Y}'_1, \widetilde{Y}'_2) = col(\widetilde{F}_1(t, \widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2, \widetilde{Y}'_1, \widetilde{Y}'_2), ..., \widetilde{F}_p(t, \widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2, \widetilde{Y}'_1, \widetilde{Y}'_2)),$$

$$\widetilde{F}_j(t, \widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2, \widetilde{Y}'_1, \widetilde{Y}'_2) = \widetilde{F}_{1j}(t, \widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2, \widetilde{Y}'_1, \widetilde{Y}'_2) + i\widetilde{F}_{2j}(t, \widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2, \widetilde{Y}'_1, \widetilde{Y}'_2), j = \overline{1, p}.$$

Зафіксуємо $t = t_0, t_0 \in (0, t_1)$ і розглянемо поведінку розв'язків систем (5) та (6) вздовж дуги кола $O_{t_1}(t_0)$.

При $z = z(t_0, v) = t_0e^{iv}$ в системах (5) та (6) зобразимо кожну з вектор-функцій і матриць в алгебраїчній формі, при цьому відокремимо дійсні та уявні частини та введемо такі позначення:

$$Y(z(t_0, v)) = \widehat{Y}(v), \widehat{Y}(v) = \widehat{Y}_1(v) + i\widehat{Y}_2(v),$$

$$\widehat{Y}_j(v) = col(\widehat{Y}_{j1}(v), ..., \widehat{Y}_{jp}(v)), j = 1, 2,$$

$P^{(\beta)}(z(t_0, v)) = \|\widehat{p}^{(\beta)}_{jk}(v)\|^p_{j,k=1} = \widehat{P}^{(\beta)}_1(v) + i\widehat{P}^{(\beta)}_2(v), \widehat{P}^{(\beta)}_s(v) = \|\widehat{p}^{(\beta)}_{jks}(v)\|^p_{j,k=1}, s = 1, 2,$

де $\widehat{p}^{(\beta)}_{jk}(v) = \widehat{p}^{(\beta)}_{jk1}(v) + i\widehat{p}^{(\beta)}_{jk2}(v), j, k = \overline{1, p}, \beta = 1, 2,$

$$F(z(t_0, v), Y(z(t_0, v)), Y'(z(t_0, v))) = \widehat{F}(v, \widehat{Y}_1, \widehat{Y}_2, \widehat{Y}'_1, \widehat{Y}'_2),$$

$$\widehat{F}(v, \widehat{Y}_1, \widehat{Y}_2, \widehat{Y}'_1, \widehat{Y}'_2) = col(\widehat{F}_1(v, \widehat{Y}_1, \widehat{Y}_2, \widehat{Y}'_1, \widehat{Y}'_2), ..., \widehat{F}_p(v, \widehat{Y}_1, \widehat{Y}_2, \widehat{Y}'_1, \widehat{Y}'_2)),$$

$$\widehat{F}_j(v, \widehat{Y}_1, \widehat{Y}_2, \widehat{Y}'_1, \widehat{Y}'_2) = \widehat{F}_{1j}(v, \widehat{Y}_1, \widehat{Y}_2, \widehat{Y}'_1, \widehat{Y}'_2) + i\widehat{F}_{2j}(v, \widehat{Y}_1, \widehat{Y}_2, \widehat{Y}'_1, \widehat{Y}'_2), j = \overline{1, p}.$$

5. Про деякі класи систем вигляду (5) та (6).

Означення 3. *Будемо казати, що матриця $P^{(\beta)}(z), \beta \in 1, 2$ має властивість S_1 відносно вектор-функції $\varphi^{(0)}(z)$, якщо виконуються умови:*

1) *Для кожного $v_0 \in (v_1, v_2)$ функції $(\psi^{(0)}_j(z(t, v)))'_t$ мають властивість Q_1 відносно функцій $\mid \widetilde{p}^{(\beta)}_{jj}(t) \mid \psi^{(0)}_j(z(t, v)), j = \overline{1, p}$, при $v = v_0$;*

2) *Функції $(\psi^{(0)}_j(t, v))'_v$ мають властивість Q_2 відносно функцій $\mid \widehat{p}^{(\beta)}_{jj}(v) \mid \cdot\psi^{(0)}_j(t, v), j = \overline{1, p}$ на множині $\breve{I}(t_2)$ для деякого $t_2 \in (0, t_1)$;*

3) *Для кожного $v_0 \in (v_1, v_2)$ функції $\mid \widetilde{p}^{(\beta)}_{jk}(t)|\psi^{(0)}_k(t, v)$ мають властивість Q_1 відносно функцій $(\psi^{(0)}_j(t, v))'_v, j, k = \overline{1, p}, j \neq k$, при $v = v_0$;*

4) *Функції $|\widehat{p}^{(\beta)}_{jk}(v)|\psi^{(0)}_k(t, v)$ мають властивість Q_2 відносно функцій $(\psi^{(0)}_j(t, v))'_v$, $j, k = \overline{1, p}, j \neq k$ на множині $\breve{I}(t_2)$ для деякого $t_2 \in (0, t_1)$.*

Означення 4. *Будемо казати, що матриця $P^{(\beta)}(z), \beta \in 1, 2$ має властивість S_2 відносно вектор-функції $\varphi^{(0)}(z)$, якщо виконуються умови:*

1) *Для кожного $v_0 \in (v_1, v_2)$ функції $t^r(\psi^{(0)}_j(z(t, v)))'_t$ мають властивість Q_1 відносно функцій $\mid \widetilde{p}^{(\beta)}_{jj}(t) \mid \psi^{(0)}_j(z(t, v)), j = \overline{1, p}$, при $v = v_0$;*

2) *Функції $t^{r-1}(\psi^{(0)}_j(t, v))'_v$ мають властивість Q_2 відносно функцій $\mid \widehat{p}^{(\beta)}_{jj}(v) \mid \cdot\psi^{(0)}_j(t, v), j = \overline{1, p}$ на множині $\breve{I}(t_2)$ для деякого $t_2 \in (0, t_1)$;*

3) *Для кожного $v_0 \in (v_1, v_2)$ функції $\mid \widehat{p}^{(\beta)}_{jk}(t) \mid \psi^{(0)}_k(t, v)$ мають властивість Q_1 при $t^r(\psi^{(0)}_j(t, v))'_v, j, k = \overline{1, p}, j \neq k$, при $v = v_0$;*

4) *Функції $\mid \widehat{p}^{(\beta)}_{jk}(v)|\psi^{(0)}_k(t, v)$ мають властивість Q_2 відносно функцій $t^{r-1}(\psi^{(0)}_j(t, v))'_v, j, k = \overline{1, p}, j \neq k$ на множині $\breve{I}(t_2)$ для деякого $t_2 \in (0, t_1)$.*

Позначимо множини

$$\widetilde{\Omega}(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0))) = \{(t, \widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2) : t \in (0, t_1), \widetilde{Y}^2_{1j} + \widetilde{Y}^2_{2j} < \delta^2_j(\psi^{(0)}_j(t, v_0))^2, j = \overline{1, p}\},$$

де v_0 – фіксоване число на (v_1, v_2),

$$\widehat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v))) = \{(v, \widehat{Y}_1, \widehat{Y}_2) : v \in (v_1, v_2), \widehat{Y}^2_{1j} + \widehat{Y}^2_{2j} < \tau^2_j(\psi^{(0)}_j(t_0, v))^2, j = \overline{1, p}\},$$

де t_0 – фіксоване число на $(0, t_1)$, $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_p)$, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_p)$, $\delta_j, \tau_j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $j = \overline{1, p}$.

Означення 5. *Будемо казати, що вектор-функція $F(z, Y, Y')$ має властивість $M_\beta, \beta \in \{1, 2\}$, відносно вектор-функції $\varphi^{(0)}(z)$, якщо виконуються умови:*

1) *Для кожного $v_0 \in (v_1, v_2)$ при $(t, \widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2) \in \widetilde{\Omega}(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0)))$ функції $\widetilde{F}_{kj}(t, \widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2, \widetilde{Y}_1', \widetilde{Y}_2')$ мають властивість Q_1 відносно функцій $\mid \widetilde{p}_{jj}^{(\beta)}(z(t, v)) \mid \cdot\psi_j^{(0)}(t, v), j = \overline{1, p}, k = 1, 2,$ при $v = v_0$;*

2) *Для будь-яких $(v, \widehat{Y}_1, \widehat{Y}_2) \in \widehat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v)))$ функції $\widehat{F}_{kj}(v, \widehat{Y}_1, \widehat{Y}_2, \widehat{Y}_1', \widehat{Y}_2')$ мають властивість Q_2 відносно функцій $\mid \widehat{p}_{jj}^{(\beta)}(z(t, v)) \mid \times\psi_j^{(0)}(t, v)), j = \overline{1, p}, k = 1, 2$ на множині $\breve{I}(t_2)$ для деякого $t_2 \in (0, t_1)$.*

Без обмеження спільності, будемо вважати, що $0 < t_2 \le t_1 \le R_1$. Введемо області $\Lambda_{+.k}^{(\beta)}(t_2), k \in \{+, -\}, \beta = 1, 2$, які визначаються наступним чином

$$\Lambda_{+.+}^{(\beta)}(t_2) = \{(t, v) : cos((r-1)v + \widetilde{a}_{jk}^{(\beta)}(t)) > 0,$$

$$sin((r-1)v + \widehat{a}_{jk}^{(\beta)}(v)) > 0, j = \overline{1, p}, t \in (0, t_2), v \in (v_1, v_2)\}; \beta = 1, 2$$

$$\Lambda_{+.-}^{(\beta)}(t_2) = \{(t, v) : cos((r-1)v + \widetilde{a}_{jk}^{(\beta)}(t)) > 0,$$

$$sin((r-1)v + \widehat{a}_{jk}^{(\beta)}(v)) < 0, j = \overline{1, p}, t \in (0, t_2), v \in (v_1, v_2)\}; \beta = 1, 2$$

де функції $\widetilde{a}_{jk}^{(\beta)}(t), \widehat{a}_{jk}^{(\beta)}(v), j, k = \overline{1, p}, \beta = 1, 2$ визначені у такий спосіб

$$cos(\widetilde{a}_{jk}^{(\beta)}(t)) = \frac{\widetilde{p}_{jk1}^{(\beta)}(t)}{\sqrt{\widetilde{p}_{jk1}^{(\beta)}(t)^2 + \widetilde{p}_{jk2}^{(\beta)}(t)^2}}, j, k = \overline{1, p}, \beta = 1, 2$$

$$sin(\widetilde{a}_{jk}^{(\beta)}(t)) = \frac{\widetilde{p}_{jk2}^{(\beta)}(t)}{\sqrt{\widetilde{p}_{jk1}^{(\beta)}(t)^2 + \widetilde{p}_{jk2}^{(\beta)}(t)^2}}, j, k = \overline{1, p}, \beta = 1, 2$$

$$cos(\widehat{a}_{jk}^{(\beta)}(t)) = \frac{\widehat{p}_{jk1}^{(\beta)}(t)}{\sqrt{\widehat{p}_{jk1}^{(\beta)}(t)^2 + \widehat{p}_{jk2}^{(\beta)}(t)^2}}, j, k = \overline{1, p}, \beta = 1, 2$$

$$sin(\widehat{a}_{jk}^{(\beta)}(t)) = \frac{\widehat{p}_{jk2}^{(\beta)}(t)}{\sqrt{\widehat{p}_{jk1}^{(\beta)}(t)^2 + \widehat{p}_{jk2}^{(\beta)}(t)^2}}, j, k = \overline{1, p}, \beta = 1, 2$$

Означення 6. *Будемо казати, що система (5) належить класу $C_{+.k}^{(1)}$, $k \in \{+, -\}$, якщо матриця $P^{(1)}(z) = P^{(1)}(te^{iv})$ така, що $(t, v) \in \Lambda_{+.k}^{(1)}(t_2), k \in \{+, -\}$.*

Означення 7. *Будемо казати, що система (6) належить класу $C_{+.k}^{(2)}$, $k \in \{+, -\}$, якщо матриця $P^{(2)}(z) = P^{(2)}(te^{iv})$ така, що $(t, v) \in \Lambda_{+.k}^{(2)}(t_2), k \in \{+, -\}$.*

6. Основні результати.

Введемо області $G_{+.k}^{(\beta)}(t_2) = \{z = z(t, v) : 0 < |z| < t_2, (t, v) \in \Lambda_{+.k}^{(\beta)}(t_2)\}$, $k \in \{+, -\}$, $\beta = 1, 2$.

Теорема 1. *Нехай* $m > p, A(z)$ *– аналітична матриця в області* D_1 *та* $rangA(z) = p$ *при* $z \in D_1$. *Нехай систему (1) можливо привести до вигляду (5)-(4). Крім того, для системи (5) виконуються умови:*

1) *Матриця* $P^{(1)}(z)$ *– аналітична матриця в області* D_1 *і має властивість* S_1 *відносно аналітичної вектор-функції* $\varphi^{(0)}(z)$;

2) *Вектор-функція* $F(z, Y, Y')$ *є аналітичною в області* $D_1 \times G_1 \times G_2$, $F(0, 0, 0) = 0$, *і має властивість* M_1 *відносно аналітичної вектор-функції* $\varphi^{(0)}(z)$;

3) *Система (5) належить одному з класів* $C^{(1)}_{+.k}, k \in \{+, -\}$;

4) *Матриці* $A_2(z), B_2(z)$ *та вектор-функція* $f_2(z, Y, Y')$ *такі, що вздовж розв'язка системи (5) при* $z \in D_1, D_1 \cap G^{(1)}_{+.k}(t^*) \neq \emptyset, k \in \{+, -\}$ *виконується умова сумісності (4).*

Тоді для кожного $k \in \{+, -\}$ *і для деякого* $t^* \in (0, t_2)$ *існують розв'язки системи (1)* $Y(z)$, *які задовольняють початковим умовам* $Y(z_0) = Y_0$ *при* $z_0 \in G^{(1)}_{+.k}(t^*), Y_0 \in \{Y : |Y_j(z_0)| < \delta_j \mid \varphi^{(0)}_j(z_0) \mid, \delta_j > 0, j = \overline{1,p}\}$, *аналітичні в області* $D_1 \cap G^{(1)}_{+.k}(t^*)$ *і для цих розв'язків у зазначеній області справедливі оцінки*

$$\mid Y_j(z) \mid^2 < \delta_j^2 \mid \varphi^{(0)}_j(z) \mid^2, j = \overline{1,p}. \tag{9}$$

Доведення.

Перший етап. Розглянемо систему (5) на відрізку $L_{v_0}(t_1)$ при фіксованому значенні $v_0 \in (v_1, v_2)$.

Введемо множини

$$\widetilde{\Omega}_j(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0))) = \{(t, \widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2) : \widetilde{Y}^2_{1j} + \widetilde{Y}^2_{2j} < \delta^2_j (\psi^{(0)}_j(t, v_0))^2, t \in (0, t_1)\}, j = \overline{1,p}.$$

Множина $\widetilde{\Omega}(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0)))$ може бути розглянута як перетин множин $\widetilde{\Omega}_j$, $\widetilde{\Omega}(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0))) = \cap_{j=1}^p \widetilde{\Omega}_j(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0)))$.

Частину межі множини $\widetilde{\Omega}_j, j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ будемо позначати як

$$\partial\widetilde{\Omega}_j(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0))) = \{(t, \widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2) : \widetilde{Y}^2_{1j} + \widetilde{Y}^2_{2j} = \delta^2_j (\psi^{(0)}_j(t, v_0))^2,$$

$$\widetilde{Y}^2_{1k} + \widetilde{Y}^2_{2k} < \delta^2_k (\psi^{(0)}_k(t, v_0))^2, k = \overline{1,p}, k \neq j, t \in (0, t_1)\}.$$

Позначимо через $\widetilde{\Phi}_j(t, \widetilde{Y}(t)) = \widetilde{Y}^2_{1j}(t) + \widetilde{Y}^2_{2j}(t) - \delta^2_j (\psi^{(0)}_j(t, v_0))^2, j \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Позначимо через $\overline{N}_j/2$ вектор зовнішньої нормалі поверхні $\partial\widetilde{\Omega}_j(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0)))$ при фіксованому $j \in \{1, \ldots, p\}$.

Нехай $\overline{T}$ – вектор поля напрямків дійсної системи, яка відповідає системі (5) вздовж $L_{v_0}(t_1)$, в довільній фіксованій точці $(t, \widetilde{Y}_1(t), \widetilde{Y}_2(t)) \in \partial\widetilde{\Omega}_j(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0)))$, $j \in \{1, \ldots, p\}$.

Скалярний добуток має вигляд

$$(\overline{T}, \frac{\overline{N}_j}{2}) = -\delta_j \psi^{(0)}_j(t, v_0)(\psi^{(0)}_j(t, v_0))'_t + (\widetilde{p}^{(1)}_{jj1}(t) cos(v_0) -$$

$$-\widetilde{p}^{(1)}_{jj2}(t)sin(v_0))\delta^2_j(\psi^{(0)}_j(t,v_0))^2+$$

$$+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{p}(\widetilde{p}^{(1)}_{jk1}(t)cos(v_0)-\widetilde{p}^{(1)}_{jk2}(t)sin(v_0))(\widetilde{Y}_{1k}\widetilde{Y}_{1j}+\widetilde{Y}_{2k}\widetilde{Y}_{2j})+$$

$$+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{p}(\widetilde{p}^{(1)}_{jk1}(t)sin(v_0)+\widetilde{p}^{(1)}_{jk2}(t)cos(v_0))(\widetilde{Y}_{2k}\widetilde{Y}_{1j}-\widetilde{Y}_{1k}\widetilde{Y}_{2j})+$$

$$(\widetilde{F}_{1j}cos(v_0)-\widetilde{F}_{2j}sin(v_0))\widetilde{Y}_{1j}+(\widetilde{F}_{1j}sin(v_0)+\widetilde{F}_{2j}cos(v_0))\widetilde{Y}_{2j},\, j=\overline{1,p}.$$

Оскільки, за умовою, матриця $P^{(1)}(z)$ має властивість S_1, а вектор-функція $F(z,Y_1,Y_1')$ має властивість M_1 відносно вектор-функції $\varphi^{(0)}(z)$, то

$$(\overline{T},\frac{\overline{N}_j}{2})\sim\sqrt{(\widetilde{p}^{(1)}_{jj1}(t))^2+(\widetilde{p}^{(1)}_{jj2}(t))^2}\cdot cos(v_0+\widetilde{\alpha}^{(1)}_{jj}(t)),\, j=\overline{1,p}\,\text{при}\, t\to+0.$$

Так як, система (5) належить одному з класів $C^{(1)}_{+.k}$, $k\in\{+,-\}$, то існує таке $t^*\in(0,t_2)$, що при $t\in(0,t^*)$ справедливо $(\overline{T},\frac{\overline{N}_j}{2})>0, j=\overline{1,p}$. Отже, при $t\in(0,t^*)$ поверхня $\partial\widetilde{\Omega}_j(\delta,\varphi^{(0)}(z(t,v_0)))$ є поверхнею без контакту для дійсної системи, яка відповідає системі (5) вздовж $L_{v_0}(t_1)$, причому при спаданні змінної t інтегральна крива входить в область $\widetilde{\Omega}(\delta,\varphi^{(0)}(z(t,v_0)))$.

Згідно з топологічним принципом Важевського [13], через кожну точку множини $\widetilde{\Omega}(\delta,\varphi^{(0)}(z(t,v_0)))\cup\partial\widetilde{\Omega}(\delta,\varphi^{(0)}(z(t,v_0)))\cap(t=t^*)$ проходить хоча б одна гладка інтегральна крива дійсної системи, яка відповідає системі (5) вздовж $L_{v_0}(t_1)$, і всі інтегральні криві цієї системи, що проходять через точки $\widetilde{\Omega}(\delta,\varphi^{(0)}(z(t,v_0)))\cup$ $\partial\widetilde{\Omega}(\delta,\varphi^{(0)}(z(t,v_0)))\cap(t=t^*)$ залишаються в області $\widetilde{\Omega}(\delta,\varphi^{(0)}(z(t,v_0)))$ при $(t,v_0)\in\Lambda^{(1)}_{+.k}(t^*)$, $k\in\{+,-\}$, $v_0\in(v_1,v_2)$. Причому, виконані нерівності

$$|\,Y_{sj}(z(t,v_0))\,|^2<\delta^2_j(\psi^{(0)}_j(t,v_0))^2,\, j=\overline{1,p}, s=1,2, \tag{10}$$

при $(t,v_0)\in\Lambda^{(1)}_{+.k}(t^*), k\in\{+,-\}$.

Другий етап. Розглянемо систему (5) вздовж дуги кола $O_{t_1}(t_0)$ при фіксованому значенні $t_0\in(0,t_1)$. Введемо множини

$$\widehat{\Omega}_j(\tau,\varphi^{(0)}(z(t_0,v)))=\{(v,\widehat{Y}_1,\widehat{Y}_2):\widehat{Y}^2_{1j}+\widehat{Y}^2_{2j}<\tau^2_j(\psi^{(0)}_j(t_0,v))^2, v\in(v_1,v_2)\}, j=\overline{1,p}.$$

Множина $\widehat{\Omega}(\tau,\varphi^{(0)}(z(t_0,v)))$ може бути розглянута як перетин множин $\widehat{\Omega}_j$, $\widehat{\Omega}(\tau,\varphi^{(0)}(z(t_0,v)))=\cap^p_{j=1}\widehat{\Omega}_j(\tau,\varphi^{(0)}(z(t_0,v)))$.

Частину межі множини $\widetilde{\Omega}_j, j\in\{1,2,\ldots,p\}$ будемо позначати як

$$\partial\widehat{\Omega}_j(\tau,\varphi^{(0)}(z(t_0,v)))=\{(v,\widehat{Y}_1,\widehat{Y}_2):\widehat{Y}^2_{1j}+\widehat{Y}^2_{2j}=\tau^2_j(\psi^{(0)}_j(t_0,v))^2,$$

$$\widehat{Y}^2_{1k}+\widehat{Y}^2_{2k}<\tau^2_k(\psi^{(0)}_k(t_0,v))^2, k=\overline{1,p}, k\neq j, v\in(v_1,v_2)\}.$$

Розглянемо поведінку інтегральних кривих дійсної системи, яка відповідає системі (5) вздовж $O_{t_1}(t_0)$, на поверхні $\partial\widehat{\Omega}_j(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v)))$ при фіксованому $j \in \{1, \ldots, p\}$.

Розглянемо скалярний добуток

$$(\frac{\overline{T}}{t_0}, \frac{\overline{N}_j}{2}) = -\tau_j \psi_j^{(0)}(t_0, v)(\psi_j^{(0)}(t_0, v))_v^{'} + (\widehat{p}_{jj1}^{(1)}(v)cos(v) -$$

$$-\widehat{p}_{jj2}^{(1)}(v)sin(v))\tau_j^2(\psi_j^{(0)}(t, v_0))^2 +$$

$$+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{p} (\widehat{p}_{jk1}^{(1)}(v)cos(v) - \widehat{p}_{jk2}^{(1)}(v)sin(v))(\widehat{Y}_{1k}\widehat{Y}_{1j} + \widehat{Y}_{2k}\widehat{Y}_{2j}) +$$

$$+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{p} (-\widehat{p}_{jk1}^{(1)}(v)sin(v) - \widehat{p}_{jk2}^{(1)}(v)cos(v))(\widehat{Y}_{2k}\widehat{Y}_{1j} - \widehat{Y}_{1k}\widehat{Y}_{2j}) +$$

$$(\widehat{F}_{1j}cos(v) - \widehat{F}_{2j}sin(v))\widehat{Y}_{1j} + (-\widehat{F}_{1j}sin(v) - \widehat{F}_{2j}cos(v))\widehat{Y}_{2j}, j = \overline{1,p}.$$

Оскільки, за умовою, матриця $P^{(1)}(z)$ має властивість S_1, а вектор-функція $F(z, Y(z), Y^{'}(z))$ має властивість M_1 відносно вектор-функції $\varphi^{(0)}(z)$, то

$$(\frac{\overline{T}}{t_0}, \frac{\overline{N}_j}{2}) \sim \sqrt{(\widehat{p}_{jj1}^{(1)}(v))^2 + (\widehat{p}_{jj2}^{(1)}(v))^2} \cdot sin(v + \widehat{\alpha}_{jj}^{(1)}(v)), j = \overline{1,p}$$

при $t_0 \to +0, v \in (v_1, v_2)$. Отже,

$$sign(\frac{\overline{T}}{t_0}, \frac{\overline{N}_j}{2}) = sign(sin(v + \widehat{\alpha}_{jj}^{(1)}(v))), j = \overline{1,p}, v \in (v_1, v_2).$$

Без обмеження спільності, для кожного фіксованого $t_0 \in (0, t^*)$ поверхня $\partial\widehat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v))) \in \Lambda_{+.k}^{(1)}(t^*), k \in \{+, -\}$ є поверхнею без контакту для дійсної системи, яка відповідає системі (5) вздовж $O_{t_1}(t_0)$.

Так як, система (5) належить одному з класів $C_{+.k}^{(1)}$, $k \in \{+, -\}$, то будь-яка інтегральна крива дійсної системи, яка відповідає системі (5) вздовж $O_{t_1}(t_0)$, що проходить через точку множини $\widehat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v))) \cap (v = v_0)$, $v_0 \in (v_1, v_2)$, якщо $(t_0, v_0) \in \Lambda_{+.+}^{(1)}(t^*)$, залишається в області $\widehat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v)))$ при спаданні v, а якщо $(t_0, v_0) \in \Lambda_{+.-}^{(1)}(t^*)$, залишається в області $\widehat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v)))$ при зростанні v.

Понад того, виконані нерівності

$$| Y_{sj}(z(t_0, v)) |^2 < \tau_j^2(\psi_j^{(0)}(t_0, v))^2, j = \overline{1,p}, s = 1, 2, \qquad (11)$$

при $(t_0, v) \in \Lambda_{+.k}^{(1)}(t^*), k \in \{+, -\}$.

Третій етап. Застосуємо метод аналітичного продовження розв'язків для задач, які розв'язані відносно похідних, запропонований Грабовською Р. Г. [2,3], і розвинений для задач, які не розв'язані відносно похідних, Самковою Г. Є. [4,6,8–11] та використаний Лиманською Д. [4–8] і Самковою Г. Є. при доведенні третього етапу Теореми 2 [4]. Припустимо, що для векторів $\delta, \tau \in \mathbb{C}^p$, $\delta_j \neq 0$, $\tau_j \neq 0$, $j = \overline{1,p}$ виконуються нерівності

$$\delta_j^2 < \tau_j^2, j = \overline{1,p}. \tag{12}$$

В першому етапі доведення цієї теореми отримано, що вздовж кривої $L_{v_0}(t_1)$, $v_0 \in (v_1, v_2)$ при $t \in (0, t^*)$ існує хоча б один неперервний диференційовний розв'язок дійсної системи, яка відповідає системі (5) вздовж $L_{v_0}(t_1)$, який задовольняє оцінкам (10). Позначимо множину таких розв'язків $\{Y(z(t, v_0))\}$.

Будь-який розв'язок $Y(z(t, v_0))$ з множини $\{Y(z(t, v_0))\}$ можливо аналітично продовжити з $L_{v_0}(t_1)$, де $(t, v) \in \Lambda^{(1)}_{+.k}(t^*)$, при фіксованому $v_0 \in (v_1, v_2)$ на область, яка містить $L_{v_0}(t_1)$, зі збереженням оцінки (10).

З другого етапу доказу цієї теореми випливає, що при виконанні нерівності (12), розв'язок $Y(z(t, v))$ при фіксованому v_0 можна продовжити з кривої $L_{v_0}(t_1)$ вздовж кривих $O_{t_1}(t_0)$ на множину $\widehat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t^*, v)))$ при $t \in (0, \mid z(t_0, v) \mid]$. Отримане аналітичне продовження позначимо $Y(z)$. Отримаємо множину розв'язків системи (5) — $\{Y(z)\}$.

У підсумку, розв'язок системи (5) $Y(z)$ може бути аналітично продовжений в області $G^{(1)}_{+.k}(t^*) \times \{Y :\mid Y_j \mid < \delta_j \mid \varphi^{(0)}(z_0)) \mid, j = \overline{1,p}$. Причому в даній області виконані нерівності (9).

Четвертий етап. Якщо матриці $A_2(z)$, $B_2(z)$ та вектор-функція $f_2(z, Y, Y')$ такі, що вздовж розв'язка системи (5) при $z \in D_1, D_1 \cap G^{(1)}_{+.k}(t^*) \neq \emptyset, k \in \{+, -\}$, виконується умова сумісності (4), тоді задача Коші для системи (1) з початковою умовою $Y_0 = Y(z_0)$ має в області $D_1 \cap G^{(1)}_{+.k}(t^*)$ хоча б один аналітичний розв'язок, який задовольняє оцінкам (9). Теорема 1 доведена.

Теорема 2. *Нехай $m > p, A(z)$ – аналітична матриця в області D_1 та $rangA(z) = p$ при $z \in D_1$. Нехай систему (1) можливо привести до вигляду (6),(4). Крім того, для системи (6) виконуються умови:*

1) *Матриця $P^{(2)}(z)$ – аналітична матриця в області D_1 і має властивість S_2 відносно аналітичної вектор-функції $\varphi^{(0)}(z)$;*

2) *Вектор-функція $F(z, Y, Y')$ є аналітичною в області $D_1 \times G_1 \times G_2$, $F(0, 0, 0) = 0$, і має властивість M_2 відносно аналітичної вектор-функції $\varphi^{(0)}(z)$;*

3) *Система (6) належить одному з класів $C^{(2)}_{+.k}, k \in \{+, -\}$;*

4) *Матриці $A_2(z), B_2(z)$ та вектор-функція $f_2(z, Y, Y')$ такі, що вздовж розв'язка системи (6) при $z \in D_1, D_1 \cap G^{(2)}_{+.k}(t^*) \neq \emptyset, k \in \{+, -\}$ виконується умова сумісності (4).*

Тоді для кожного $k \in \{+, -\}$ і для деякого $t^* \in (0, t_2)$ існують розв'язки системи (1) $Y(z)$, які задовольняють початковим умовам $Y(z_0) = Y_0$ при $z_0 \in G^{(2)}_{+.k}(t^*), Y_0 \in \{Y : |Y_j(z_0)| < \delta_j \mid \varphi^{(0)}_j(z_0) \mid, \delta_j > 0, j = \overline{1,p}\}$, аналітичні в області $D_1 \cap G^{(2)}_{+.k}(t^*)$ і для цих розв'язків у зазначеній області справедливі оцінки (9).

Доведення.

Перший етап. Розглянемо систему (6) на відрізку $L_{v_0}(t_1)$ при фіксованому значенні $v_0 \in (v_1, v_2)$.

Позначимо через $\widetilde{\Phi}_j(t, \widetilde{Y}(t)) = \widetilde{Y}^2_{1j}(t) + \widetilde{Y}^2_{2j}(t) - \delta^2_j(\psi^{(0)}_j(t, v_0))^2, j \in \{1, 2, \dots, p\}$. Позначимо через $\overline{N}_j/2$ вектор зовнішньої нормалі поверхні $\partial\widetilde{\Omega}_j(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0)))$ при фіксованому $j \in \{1, \dots, p\}$.

Нехай $\overline{T}$ - вектор поля напрямків дійсної системи, яка відповідає системі (6) вздовж $L_{v_0}(t_1)$, в довільній фіксованій точці $(t, \widetilde{Y}_1(t), \widetilde{Y}_2(t)) \in \partial\widetilde{\Omega}_j(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0)))$, $j \in \{1, \dots, p\}$.

Оскільки, за умовою, матриця $P^{(2)}(z)$ має властивість S_2, а вектор-функція $F(z, Y_1, Y_1^{'})$ має властивість M_2 відносно вектор-функції $\varphi^{(0)}(z)$, то

$$(t^r\overline{T}, \frac{\overline{N}_j}{2}) \sim \sqrt{\left(\widetilde{p}^{(2)}_{jj1}(t)\right)^2 + \left(\widetilde{p}^{(2)}_{jj2}(t)\right)^2} \cdot cos((r-1)v_0 + \widetilde{\alpha}^{(2)}_{jj}(t)), j = \overline{1, p} \,\text{при}\, t \to +0.$$

Так як, система (6) належить одному з класів $C^{(2)}_{+.k}$, $k \in \{+, -\}$, то існує таке $t^* \in (0, t_2)$, що при $t \in (0, t^*)$ справедливо $(t^r\overline{T}, \frac{\overline{N}_j}{2}) > 0, j = \overline{1, p}$. Отже, при $t \in (0, t^*)$ поверхня $\partial\widetilde{\Omega}_j(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0)))$ є поверхнею без контакту для дійсної системи, яка відповідає системі (6) вздовж $L_{v_0}(t_1)$, причому при спаданні змінної t інтегральна крива входить в область $\widetilde{\Omega}(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0)))$.

Згідно з топологічним принципом Важевського [13], через кожну точку множини $\widetilde{\Omega}(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0))) \cup \partial\widetilde{\Omega}(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0))) \cap (t = t^*)$ проходить хоча б одна гладка інтегральна крива дійсної системи, яка відповідає системі (6) вздовж $L_{v_0}(t_1)$, і все інтегральні криві даної системи, що проходять через точки $\widetilde{\Omega}(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0)))$ $\cup\ \partial\widetilde{\Omega}(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0))) \cap (t = t^*)$ залишаються в області $\widetilde{\Omega}(\delta, \varphi^{(0)}(z(t, v_0)))$ при $(t, v_0) \in \Lambda^{(2)}_{+.k}(t^*), k \in \{+, -\}, v_0 \in (v_1, v_2)$. Причому, виконані нерівності (10) при $(t, v_0) \in \Lambda^{(2)}_{+.k}(t^*), k \in \{+, -\}$.

Другий етап. Розглянемо систему (6) вздовж дуги кола $O_{t_1}(t_0)$ при фіксованому значенні $t_0 \in (0, t_1)$.

Розглянемо поведінку інтегральних кривих дійсної системи, яка відповідає системі (6) вздовж $O_{t_1}(t_0)$, на поверхні $\partial\widehat{\Omega}_j(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v)))$ при фіксованому $j \in \{1, \dots, p\}$.

Оскільки, за умовою, матриця $P^{(2)}(z)$ має властивість S_2, а вектор-функція $F(z, Y(z), Y^{'}(z))$ має властивість M_2 відносно вектор-функції $\varphi^{(0)}(z)$, то

$$(t_0^{r-1}\overline{T}, \frac{\overline{N}_j}{2}) \sim \sqrt{\left(\widehat{p}^{(2)}_{jj1}(v)\right)^2 + \left(\widehat{p}^{(2)}_{jj2}(v)\right)^2} \cdot sin((r-1)v + \widehat{\alpha}^{(2)}_{jj}(v)), j = \overline{1, p}$$

при $t_0 \to +0, v \in (v_1, v_2)$. Отже,

$$sign(t_0^{r-1}\overline{T}, \frac{\overline{N}_j}{2}) = sign(sin(v(r-1) + \widehat{\alpha}^{(2)}_{jj}(v))), j = \overline{1, p}, v \in (v_1, v_2).$$

Без обмеження спільності, для кожного фіксованого $t_0 \in (0, t^*)$ поверхня $\partial\widehat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v))) \in \Lambda^{(2)}_{+.k}(t^*), k \in \{+, -\}$ є поверхнею без контакту для дійсної системи, яка відповідає системі (6) вздовж $O_{t_1}(t_0)$.

Так як, система (6) належить одному з класів $C^{(2)}_{+.k}$, $k \in \{+, -\}$, то будь-яка інтегральна крива дійсної системи, яка відповідає системі (6) вздовж $O_{t_1}(t_0)$, що проходить через точку множини $\widehat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v))) \cap (v = v_0), v_0 \in (v_1, v_2)$, якщо $(t_0, v_0) \in \Lambda^{(2)}_{+.+}(t^*)$, залишається в області $\widehat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v)))$ при спаданні v, а якщо $(t_0, v_0) \in \Lambda^{(2)}_{+.-}(t^*)$, залишається в області $\widehat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t_0, v)))$ при зростанні v.

Понад того, виконані нерівності (11) при $(t_0, v) \in \Lambda^{(2)}_{+.k}(t^*), k \in \{+, -\}$.

Третій етап. Застосуємо метод аналітичного продовження розв'язків для задач, які розв'язані відносно похідних, запропонований Грабовською Р. Г. [2,3], і розвинений для задач, які не розв'язані відносно похідних, Самковою Г. Є. [4, 6, 8–11] та використаний Лиманською Д. [4–8] і Самковою Г. Є. при доказі третього етапу Теореми 2 [4]. Припустимо, що для векторів $\delta, \tau \in \mathbb{C}^p, \delta_j \neq 0, \tau_j \neq 0, j = \overline{1,p}$ виконуються нерівності (12).

В першому етапі доведення цієї теореми отримано, що вздовж кривої $L_{v_0}(t_1)$, $v_0 \in (v_1, v_2)$ при $t \in (0, t^*)$ існує хоча б один неперервний диференційовний розв'язок системи, яка відповідає системі (6) вздовж $L_{v_0}(t_1)$, яке задовольняє оцінкам (10). Позначимо множину таких розв'язків $\{Y(z(t, v_0))\}$.

Будь-який розв'язок $Y(z(t, v_0))$ з множини $\{Y(z(t, v_0))\}$ можливо аналітично продовжити з $L_{v_0}(t_1)$, де $(t, v) \in \Lambda^{(2)}_{+.k}(t^*)$, при фіксованому $v_0 \in (v_1, v_2)$ на область, яка містить $L_{v_0}(t_1)$, зі збереженням оцінки (10).

З другого етапу доведення цієї теореми випливає, що при виконанні нерівності (12), розв'язок $Y(z(t, v))$ при фіксованому v_0 можна продовжити з кривою $L_{v_0}(t^*)$ вздовж кривих $O_{t_1}(t_0)$ на множину $\widehat{\Omega}(\tau, \varphi^{(0)}(z(t^*, v)))$ при $t \in (0, \mid z(t_0, v) \mid]$. Отримане аналітичне продовження позначимо $Y(z)$. Отримаємо множину розв'язків системи (6) — $\{Y(z)\}$.

У підсумку, розв'язок системи (6) Y(z) може бути аналітично продовжений в області $G^{(2)}_{+.k}(t^*) \times \{Y : \mid Y_j \mid < \delta_j \mid \varphi^{(0)}(z_0)) \mid, j = \overline{1,p}\}$. Причому в даній області виконані нерівності (9).

Четвертий етап. Якщо матриці $A_2(z)$, $B_2(z)$ та вектор-функція $f_2(z, Y, Y')$ такі, що вздовж розв'язка системи (6) при $z \in D_1, D_1 \cap G^{(2)}_{+.k}(t^*) \neq \emptyset$, $k \in \{+, -\}$, виконується умова сумісності (4), тоді задача Коші для системи (1) з початковою умовою $Y_0 = Y(z_0)$ має в області $D_1 \cap G^{(2)}_{+.k}(t^*)$ хоча б один аналітичний розв'язок, який задовольняє оцінці (9). Теорема 2 доведена.

7. Висновки. Система (1) розглянута в припущенні $m < p$ в області D_1 у випадках, коли матриця $B_1(z)$ має в точці $z = 0$ усувну особливу точку або полюс порядку r. Доведено теореми про існування хоча б одного аналітичного розв'язка задачі Коші (1),(7), з додатковою умовою (8), в деякій підобласті області D_1 з точкою $z = 0$ на межі. Крім того, знайдені оцінки розв'язків в деякій підобласті області D_1 з точкою $z = 0$ на межі.

1. *Ганнинг Р., Росси Х.* Аналитические функции многих комплексных переменных // Москва. – Мир. – 1969. – 395 с.
2. *Грабовская Р. Г.* Об асимптотическом поведении решения системы двух нелинейных уравнений первого порядка. // Дифференц. уравнения – 1975. – №11. – С. 639–644.
3. *Грабовская Р., Диблик Й.* Асимптотика систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных. // Деп. в ВИНИТИ. – 1988. – No.1786. – С. 49.
4. *Лиманская Д. Е., Самкова Г. Е.* О поведении решений некоторых систем дифференциальных уравнений, частично разрешенных относительно производной. // Вісник Од. нац. ун-ту. Мат. і мех. – 2014. – **19**, №. 1(21). – С. 16–28.

5. *Лиманская Д. Е.* О поведении решений некоторых систем дифференциальных уравнений, частично разрешенных относительно производных, в случае полюса. // Нелінійні коливання. – 2017. – **20**, No. 1. – С. 113–126.
6. *Limanska D., Samkova G.* On the existence of analytic solutions of certain types of systems, partially resolved relatively to the derivatives in the case of a pole. //Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. – 2018. – **74**. – P. 113–124.
7. *Limanska D.* On the behavior of the solutions of some systems of differential equations partially solved with respect to the derivatives in the presence of a pole. // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – **229**, No. 4. – P. 455–469.
8. *Limanska D., Samkova G.* The asymptotic behaviour of solutions of certain types of the differential equations partially solved relatively to the derivatives with a singularity in the zero-point. // Journal of Math. Sciences:Advances and Applications. – 2018. – **53**. – P. 21–40.
9. *Самкова Г. Е.* Существование и асимптотическое поведение аналитических решений некоторых сингулярных дифференциальных систем, не разрешенных относительно производных. // Дифференц. уравнения – 1991. –№. 27(11). – С. 2012–2013.
10. *Самкова Г. Е., Шарай Н. В.* Об исследовании некоторой полуявной системы дифференциальных уравнений в случае переменного пучка матриц. // Нелинейные колебания. – 2002. –№. 5(2). – С. 224-236.
11. *Шарай Н. В., Самкова Г. Е.* Асимптотика розв'язків деяких напів'явних систем диференціальних рівнянь. // Науковий вісник Чернів. університету. – 2006. –№. 314. – С. 191-188.
12. *Diblic J.* On an asymptotic behavior of solutions of certain systems of differential equations not solved with respect to derivatives. // Rici Math. Univ. Parma. – 1987. –№. 13. – P. 413-419.
13. *Wazewski T.* Une method topologique de l'examen du phenomene asymtoti quereletivement aux equations differenti elle sordinaires . – Attidella academia zarionaledei Lincei.Rediconti. – 1947. –№. 3. – P. 210-215.

Одержано 08.10.2018