УДК 519.8 DOI:10.24144/2616-7700.2018.2(33).33-40

**А. Ю. Брила** (ДВНЗ «Ужгородський нац. ун-т»)
**С. П. Брила** (Навчальний пункт Аварійно-рятувального загону спеціального призначення Управління ДСНС України у Закарпатській області)

# ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ЛЕКСИКОГРАФІЧНО-ЛЕКСИКОГРАФІЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З ІНТЕРВАЛЬНИМИ ОЦІНКАМИ

In this paper, a decision making problem where alternatives are estimated with interval parameters and the feasible set is defined using interval constraints is considered. Based on the assumption that the objective functions and constraints are linear, a linear lexicographic-lexicographical optimization problem with interval coefficients in the objective functions and constraints was specified. For solving this problem, the approach of its reduction to optimization problem with a scalar objective function and scalar constraints was proposed. This approach consists of two steps. At the first step, we reduce the problem with interval coefficients to a lexicographic-lexicographical optimization problem with lexicographical constraints. At the second step, we reduce this lexicographic-lexicographical optimization problem to a problem with a single scalar objective function and scalar constraints. This makes it possible to use well known classical methods of crisp optimization theory for solving this problem.

У статті розглядається задача лексикографічно-лексикографічної багатокритеріальної оптимізації, у якій альтернативи оцінюються за допомогою інтервальних оцінок і множина допустимих розв'язків задається за допомогою обмежень, що містять інтервальні параметри. Вважаємо, що часткові цільові функції та обмеження є лінійними і містять інтервальні коефіцієнти. Для розв'язання цієї задачі запропоновано підхід до розв'язання задачі, який ґрунтується на зведенні її до задачі скалярної оптимізації. На першому кроці розглядувана задача лексикографічно-лексикографічної багатокритеріальної оптимізації зводиться до задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації з лексикографічними обмеженнями. На другому кроці задача зводиться до задачі скалярної оптимізації.

**1. Вступ.** Щодня нам доводиться оперувати з великою кількістю факторів, що безпосередньо чи опосередковано впливають на результати нашої діяльності. Тому не дивно, що переважна більшість оптимізаційних задач, що виникають на практиці описуються з використання математичних моделей, які включають нечітко визначені величини. Одним з таких випадків є випадок, коли у моделі присутні параметри, для яких неможливо вказати точного значення, а лише наближений інтервал можливого значення. Очевидно наявність таких параметрів значно ускладнює процес розв'язання задачі, оскільки є неможливим застосування класичних ефективних методів. Ще більше ускладнюється процес розв'язання задачі у випадку, коли маємо багатокритеріальну оптимізаційну модель з великою кількістю критеріїв, а також наявністю складних взаємозв'язків між критеріями. Ми розглядатимемо задачі, у яких інтервальні оцінки можуть бути присутні як у критеріях, так і обмеженнях задачі.

Будемо вважати, що центр інтервалу представляє очікуване значення, а ширина інтервалу відображає невизначеність значення параметра [1-6]. При порівнянні інтервальних оцінок будемо використовувати підхід, що запропоновано у [7]. Такий підхід дозволяє здійснювати порівняння інтервалів стосовно відношення прийнятності.

Розглянемо багатокритеріальну задачу прийняття рішень, у якій критеріальні функції розділені на групи. В межах кожної із груп критерії є строго проранжовано за важливістю відповідно до правил віддачі переваги особи, що приймає рішення. Самі ж групи також проранжовано за важливістю. Часткові критерії та обмеження є лінійними і можуть містити обмеження з інтервальними коефіцієнтами. Дані припущення ускладнюють задачу прийняття рішень, оскільки не дозволяють використовувати для її розв'язання відомі методи чіткої багатокритеріальної оптимізації.

У роботі для розв'язання розглядуваної задачі застосовано підхід, що ґрунтується на зведенні її до класичної лінійної задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації [8-16]. Ця ж задача може бути розв'язана шляхом зведення її до задачі лексикографічної оптимізації або ж зведенням її до задачі скалярної оптимізації.

**2. Правило порівняння інтервальних оцінок**

Інтервальні оцінки розглядуваної задачі прийняття рішень характеризуються за допомогою пари чисел

$$A = \langle a_C, a_W \rangle \,,$$

де $a_C \in R$ є центром інтервалу, $a_W \in R$ є шириною інтервалу. Центр інтервалу характеризує очікуване значення параметру, а ширина інтервалу відображає міру невизначеності параметру [7].

Будемо використовувати звичні операції інтервальної арифметики [1-6].

Нехай $A = \langle a_C, a_W \rangle$, $B = \langle b_C, b_W \rangle$, тоді

$$A + B = \langle a_C, a_W \rangle + \langle b_C, b_W \rangle = \langle a_C + b_C, a_W + b_W \rangle \,, \tag{1}$$

$$kA = k \langle a_C, a_W \rangle = \langle k a_C, |k|\, a_W \rangle$$

Вважатимемо, що усі змінні є невід'ємними цілими числами, тому попередню операцію можна записати так

$$kA = k \langle a_C, a_W \rangle = \langle k a_C, k a_W \rangle \,. \tag{2}$$

При порівнянні інтервальних оцінок будемо використовувати правило, запропоноване Hu і Wang [7].

**Означення 1**. Для будь-яких двох інтервальних оцінок $A = \langle a_C, a_W \rangle$ і $B = \langle b_C, b_W \rangle$

$$A \prec_= B, \text{якщо} \begin{cases} a_C < b_C, \text{ якщо } \ a_C \neq b_C, \\ a_W \geq b_W, \text{ якщо } \ a_C = b_C. \end{cases} \tag{3}$$

$$A = B, \text{якщо} \begin{cases} a_C = b_C, \\ a_W = b_W. \end{cases} \tag{4}$$

$$A \prec B, \ \textit{якщо } A \prec_= B \ \textit{і } A \neq B.$$

Відношення $A \prec_= B$ означає, що $A$ є менш прийнятним ніж $B$. Очевидно, що у випадку, коли центри інтервалів є рівними, то особа, що приймає рішення надає перевагу інтервалу з меншою мірою невизначеності (меншою шириною інтервалу).

### 3. Лексикографічна багатокритеріальна задача оптимізації з інтервальними оцінками

Розглянемо задачу оптимізації, у якій коефіцієнти є інтервальними оцінками:

$$\max^L F(x) = (f_1(x)\,,\, f_2(x)\,, \ldots, f_q(x))\,, \tag{5}$$

з обмеженнями

$$G_i(x) \prec_= B_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{6}$$

$$x \geq 0, \tag{7}$$

$$x \in D \subset Z^n, \tag{8}$$

де

$$f_i(x) = F_{i1}x_1 + F_{i2}x_2 + \ldots + F_{in}x_n,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$G_i(x) = A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + \ldots + A_{in}x_n,\ i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$F_{ij} = \langle f_{ijC}, f_{ijW}\rangle\,,\ A_{ij} = \langle a_{ijC}, a_{ijW}\rangle\,,\ B_i = \langle b_{iC}, b_{iW}\rangle\,,$$

$D \subset Z^n$ задає множину можливих значень для цілочислових змінних задачі.
При попарному порівнянні альтернатив за частковими критеріями використовуватимемо правило віддачі переваги, що задається означенням 1.
**Означення 2**. Для двох альтернатив $x, y \in X$ виконується співвідношення

$$F(x) \prec_= {}^L F(y)\,,$$

якщо існує таке $k$, $1 \leq k \leq q$, що

$$f_k(x) \prec_= f_k(x^*)$$

і, якщо $k > 1$, то

$$f_i(x) = f_i(y)\,,\ i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Дамо означення оптимального розв'язку у задачі (5)-(8).
**Означення 3**. Допустимий розв'язок $x^* \in X$ є *оптимальним (непокращуваним) розв'язком*, якщо $F(x) \prec_=^L F(x^*)$ для всякого $x \in X$.

### 4. Лексикографічно-лексикографічна багатокритеріальна задача оптимізації з інтервальними оцінками

Розглянемо задачу оптимізації, у якій коефіцієнти є інтервальними оцінками:

$$\max^{LL} S(x) = (s_1(x)\,, s_2(x)\,, \ldots, s_p(x))\,, \tag{9}$$

з обмеженнями

$$G_i(x) \prec_= B_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{10}$$

$$x \geq 0, \tag{11}$$

$$x \in D \subset Z^n, \tag{12}$$

де

$$s_i(x) = (f_{i1}, f_{i2}, \ldots, f_{iq_i})\,,\ i = 1, 2, \ldots, p,$$

$$f_{ij}(x) = F_{ij1}x_1 + F_{ij2}x_2 + \ldots + F_{ijn}x_n,\ j = 1, 2, \ldots, q_i,\ i = 1, 2, \ldots, p,$$

$$G_i(x) = A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + \ldots + A_{in}x_n,\ i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$F_{ijk} = \langle f_{ijkC}, f_{ijkW} \rangle\,,\ A_{ij} = \langle a_{ijC}, a_{ijW} \rangle\,,\ B_i = \langle b_{iC}, b_{iW} \rangle\,,$$

$D \subset Z^n$ задає множину можливих значень для цілочислових змінних задачі. Позначимо множину допустимих розв'язків, що задається за допомогою обмежень (10)-(12) як $X$. При попарному порівнянні альтернатив за частковими критеріями використовуватимемо правило віддачі переваги, що задається означенням 1.

**Означення 4**. Для двох альтернатив $x, y \in X$ виконується співвідношення

$$S(x) \prec_{=}^{LL} S(y)\,,$$

якщо існує таке $k$, $1 \le k \le q$, що

$$s_k(x) \prec_{=}^{L} s_k(y)$$

і, якщо $k > 1$, то

$$s_i(x) = s_i(y)\,,\ i = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Дамо означення оптимального розв'язку у задачі (9)-(12).

**Означення 5**. Допустимий розв'язок $x^* \in X$ є *оптимальним (непокращуваним) розв'язком*, якщо $S(x) \prec_{=}^{LL} S(x^*)$ для всякого $x \in X$.

**5. Зведення лексикографічно-лексикографічної задачі багатокритеріальної оптимізації з інтервальними оцінками до лексикографічної задачі багатокритеріальної оптимізації з інтервальними оцінками**

У [8] доведено, що задача лексикографічно-лексикографічної оптимізації може бути зведена до звичайної задачі лексикографічної оптимізації шляхом побудови нової вектор-функції, у якій спочатку записуємо часткові критерії вектор-функції з найбільшою важливістю $s_1$, а потім усі часткові критерії усіх наступних вектор-функцій у порядку спадання їх важливості. Використовуючи аналогічний підхід задача лексикографічно-лексикографічної оптимізації з інтервальними оцінками (9)-(12) може бути зведена до задачі лексикографічної оптимізації

$$\max{}^L H(x) = \left(f_{11}(x)\,, \ldots, f_{1q_1}(x), f_{21}(x)\,, \ldots, f_{2q_2}(x)\,, \ldots, f_{p1}(x)\,, \ldots, f_{pq_p}(x)\right). \quad (13)$$

де $x \in X$.

Згідно з [8] задача (13) є еквівалентною задачею до задачі (9)-(12). Тому розв'язання задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації з інтервальними оцінками (9)-(12) можна звести до розв'язання задачі лексикографічної оптимізації з інтервальними оцінками (13). Не зменшуючи загальності для спрощення подальших міркувань (виконавши відповідну перенумерацію критеріїв у задачі (13)) надалі будемо розглядати задачу (5)-(8).

**6. Зведення лексикографічно-лексикографічної задачі багатокритеріальної оптимізації з інтервальними оцінками до багатокритеріальної задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації з лексикографічними обмеженнями**

Для початку розглянемо зміст лексикографічних обмежень. Лексикографічні обмеження розглядаються у [3]. У загальному вони задаються за допомогою векторної нерівності

$$g(x) \le^L b,$$

де

$$g : R^n \to R^q,$$

$$g(x) = (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_q(x)),$$

$$g_i(x) : R^n \to R, i = 1, 2, \ldots, q,$$

$$b \in R^q, b = (b_1, b_2, \ldots, b_q),$$

(нерівність “$\leq^L$” означає, що вектори порівнюються з використанням правила лексикографічного порядку віддачі переваги [8]). Таким чином, обмеження складається з $q, (q \geq 1)$ часткових скалярних обмежень:

$$g_1(x) \leq b_1,$$

$$g_2(x) \leq b_2,$$

$$\ldots$$

$$g_q(x) \leq b_q.$$

Альтернатива $x \in R^n$ задовольняє це лексикографічне обмеження, якщо один із випадків має місце:

1) $g_1(x) < b_1$;

2) $g_1(x) = b_1$,
   $g_2(x) < b_2$;

3) $g_1(x) = b_1$,
   $g_2(x) = b_2$,
   $g_3(x) < b_3$;
   $\ldots \ \ldots \ \ldots$

q) $g_1(x) = b_1$,
   $g_2(x) = b_2$,
   $\ldots$
   $g_{q-1}(x) = b_{q-1}$,
   $g_q(x) < b_q$;

q+1) $g_i(x) = b_i, \ i = 1, 2, \ldots, q$.

Враховуючи властивості лексикографічних обмежень, правило віддачі переваги, яке задається означенням 1, може бути представлено за допомогою співвідношення

$$A \prec_= B, \quad \textit{якщо} \quad \bar{A} \leq^L \bar{B},$$

де

$$\bar{A} = (A_C, -A_W),$$

$$\bar{B} = (B_C, -B_W).$$

Використовуючи таке представлення лексикографічна задача багатокритеріальної оптимізації з інтервальними оцінками (13), а отже, і задача лексикографічно-лексикографічної оптимізації (9)-(12), може бути зведена до багатокритеріальної задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації ([8]) з лексикографічними обмеженнями :

$$\max^{LL} \bar{F}(x) = \left(\bar{f}_1(x), \bar{f}_2(x), \ldots, \bar{f}_q(x)\right), \tag{14}$$

з обмеженнями

$$\bar{G}_i(x) \leq^L \bar{B}_i,\ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{15}$$

$$x \geq 0, x \in D \subset Z^n, \tag{16}$$

де

$$\bar{f}_i(x) = \left(F_{iC}(x), -F_{iW}(x)\right),\ \ i = 1, 2, \ldots, q, ,$$

$$F_{iC}(x) = f_{i1C}x_1 + f_{i2C}x_2 + \ldots + f_{inC}x_n,$$

$$F_{iW}(x) = f_{i1W}x_1 + f_{i2W}x_2 + \ldots + f_{inW}x_n,$$

$$\bar{G}_i(x) = \left(\bar{G}_{iC}(x), -\bar{G}_{iW}(x)\right),$$

$$\bar{G}_{iC}(x) = a_{i1C}x_1 + a_{i2C}x_2 + \ldots + a_{inC}x_n,$$

$$\bar{G}_{iW}(x) = a_{i1W}x_1 + a_{i2W}x_2 + \ldots + a_{inW}x_n,$$

$$\bar{B}_i = \left(b_{iC}, -b_{iW}\right).$$

Таким чином, при заданому способі задання і порівняння інтервальних оцінок можемо звести лексикографічну і лексикографічно-лексикографічну задачу багатокритеріальної оптимізації з інтервальними оцінками до цілочислової багатокритеріальної задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації з лексикографічними обмеженнями.

**7. Зведення цілочислової задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації з інтервальними оцінками до цілочислової задачі з скалярною цільовою функцією і скалярними обмеженнями**

Використовуючи міркування аналогічні до [8], задача лексикографічно-лексикографічної оптимізації з лексикографічними обмеженнями (14)-(16) може бути зведена до задачі лексикографічної оптимізації з лексикографічними обмеженнями

$$\max^{L} l(x), \tag{17}$$

з обмеженнями

$$\bar{G}_i(x) \leq^L \bar{B}_i,\ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{18}$$

$$x \geq 0, x \in D \subset Z^n, \tag{19}$$

де

$$l(x) = \left(F_{1C}, -F_{1W}, F_{2C}, -F_{2W}, \ldots, F_{qC}, -F_{qW}\right).$$

Нехай додатні коефіцієнти $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}$ $(1 \leq i \leq m)$ знайдені за правилом:

$\alpha_{i2} > 0$ – деяке довільне додатне число;

$\alpha_{i1}$ визначено згідно умови

$$\alpha_{i1} > \frac{1}{\mu_i}\alpha_{i2}M_{i2}, \tag{20}$$

де

$$M_{i2} \geq \max\left\{\left|b_{iW} - \bar{G}_{iW}(x)\right| : x \in D\right\}, i = 1, 2, \ldots, m, \tag{21}$$

$$0 < \mu_i \leq \inf_{\substack{x \in D \\ b_{iC} \neq \bar{G}_{iC}(x)}} \left|b_{iC} - \bar{G}_{iC}(x)\right|. \tag{22}$$

Якщо $a_{ijC} > 0$, то у (20) можемо використати

$$M_{i2} \geq \max\left\{\left|b_{iW} - \bar{G}_{iW}(x)\right| : x \in D_i\right\}, i = 1, 2, \ldots, m, \tag{23}$$

або ж

$$M_{i2} \geq \max\left\{b_{iW}, \left|b_{iW} - \bar{G}_{iW}\left(\bar{d}_{i1}, \bar{d}_{i2}, \ldots, \bar{d}_{in}\right)\right|\right\}, \ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{24}$$

де

$$D_i = \left\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Z^n : 0 \leq x_j \leq \bar{d}_{ij} = \left[\frac{b_{iC}}{a_{ijC}}\right], j = 1, 2, \ldots, n\right\}.$$

Відмітимо, що у випадку $x_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ у (24) $\bar{d}_{ij} = 1$.

Також, у випадку, коли $a_{ijC} \in Z$ $(1 \leq j \leq n)$ і $b_{iC} \in Z$, то для спрощення можемо використати

$$\mu_i = 1. \tag{25}$$

Нехай

$$g_i(x) = \alpha_{i1}\bar{G}_{iC}(x) - \alpha_{i2}\bar{G}_{iW},$$
$$b_i = \alpha_{i1}b_{iC} - \alpha_{i2}b_{iW},$$

Має місце наступна теорема.

**Теорема 1.** *Оптимальний розв'язок задачі*

$$\max{}^L \, l(x), \tag{26}$$

*з обмеженнями*

$$g_i(x) \leq b_i, \ i = 1, 2, \ldots, m, x \geq 0, \, x \in Z^n, \tag{27}$$

*є оптимальним розв'язком задачі* (9)-(12).

*Доведення.* У [10] доведено, що розв'язок задачі (26)-(27) є розв'язком цілочислової задачі лексикографічної оптимізації з інтервальними оцінками. Оскільки цілочислова задача лексикографічно-лексикографічної оптимізації з інтервальними оцінками може бути зведена до відповідної задачі лексикографічної оптимізації з інтервальними оцінками, то розв'язок задачі (26)-(27) є розв'язком цілочислової задачі лексикографічно-лексикографічної задачі з інтервальними оцінками.

**8. Висновки.** У роботі розглянуто задачу багатокритеріальної оптимізації з інтервальними оцінками. Критеріальна функція є векторною і складові також є векторними функціями, які упорядковано у субординації строгого ранжування. Для її розв'язання було запропоновано підхід, що ґрунтується на зведенні даної задачі до задачі лексикографічно-лексикографічної задачі оптимізації з лексикографічними обмеженнями, яку можна звести до цілочислової задачі лексикографічної оптимізації. Перевагою такого підходу є можливість застосування відомих методів лексикографічної оптимізації.

1. Alefeld G., Herzberger J. Introduction to Interval Computations (Translated by J. Rokne), Academic Press, New York, 1983.
2. Lodwick W. A. "Interval and fuzzy analysis: An uni. ed approach, in Advances in Imagining and Electronic Physics, P. W. Hawkes, Editor, Vol. 148, Elsevier Press, 2007. P. 75 – 192.
3. Lodwick W.A., Jamison K.D. "Interval methods and fuzzy optimization"International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 5:3. P. 239 – 249.
4. Lodwick W.A., Neumaier A., Newman F. Optimization under uncertainty: methods & applications in radiation therapy, in: Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, December 2–5, 2001, Melbourne, Australia, 2001.P. 1219 – 1222.
5. Ramon E., Moore R., Baker Kearfott, Michael J. Cloud Introduction to Interval Analysis. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2009.
6. Karmakar S., Bhunia A.K. An alternative optimization technique for interval objective constrained optimization problems via multiobjective programming. Journal of the Egyptian Mathematical Society. (2014) 22. P. 292 – 303.
7. Hu B.Q., Wang S. A novel approach in uncertain programming Part I: New arithmetic and order relation for interval numbers, J. Ind. Manag. Optim. 2(4) (2006). P. 351 – 371.
8. Червак Ю.Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір. Ужгород: Ужгород. нац. ун т, 2002. 312с.
9. Bryla A. On Solving an Optimization Problem with Interval Coefficients. Optimization Methods and Applications. 2017. Vol.130. P.57–74.
10. Брила А.Ю. Про одну задачу лексикографічної оптимізації з інтервальними оцінками/ А.Ю. Брила // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2018. – Вип. 32(1). – С. 54-60.
11. Freuder E., Heffernan R., Wallace R., Wilson N. Lexicographically-ordered constraint satisfaction problems.Constraints, 15(1):1–28, 2010.
12. Argelich J., Lynce I., Marques-Silva J. On solving Boolean multilevel optimization problems. InInternational Joint Conference on Artificial Intelligence, P. 393 – 398, July 2009.
13. Noghin V. Relative importance of criteria: A quantitative approach. Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, 6 (1997). P. 355 – 363.
14. Podinovskiy V. Introduction to the theory of the importance of criteria in multicriteria decision problems, 2013.
15. Подиновский В.В., Гаврилов В.М. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. М.: Сов. Радио, 1975. 115 с.
16. Брила А.Ю. Достижимость оптимальных решений линейной задачи многокритериальной оптимизации по взвешенной сумме критериев разной важности в транзитивной субординации. Кибернетика и системный анализ. 2008. № 5. С. 135 – 138.


Одержано 28.10.2018