УДК 519.21
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2019.1(34).42-51

О. О. Синявська

ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород,
доцент кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу,
кандидат фізико–математичних наук
olga.synyavska@uzhnu.edu.ua
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2711-3940

КРИТЕРІЙ ПЕРЕВІРКИ ГІПОТЕЗИ ПРО ЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРА ХЮРСТА ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ

У даній роботі розглядається задача перевірки гіпотези про значення параметра Хюрста дробового броунівського руху $\{\xi(t), t \in (0,1)\}$. Оцінювання параметра Хюрста дробового броунівського руху або індексу самоподібності відіграє важливу роль у статистиці випадкових процесів. Запропонований критерій перевірки гіпотези про значення параметра Хюрста базується на методі бакстерівських сум. Застосування методу бакстерівських сум для випадкових процесів та полів дозволяє отримати сильно консистентні оцінки та побудувати неасимптотичні довірчі області без застосування класичних граничних теорем у багатьох моделях.

За спостереженнями випадкового процесу $\xi(t)$ в точках $\left\{\frac{k}{2^n}\middle| k=0,\ldots,2^n-1\right\}$, $n \geq 1$, побудовано критерій для перевірки простої гіпотези про значення параметра Хюрста α дробового броунівського руху $H_0 : \alpha = \alpha_0$ при альтернативній гіпотезі $H_1 : \alpha \neq \alpha_0$, де $\alpha_0 < 1$. У роботі отримано оцінку зверху для дисперсії деякої послідовності бакстерівських сум S_n — суми квадратів приростів першого порядку дробового броунівського руху. Далі, в якості критерію K_n перевірки нульової гіпотези використовується різниця між деякою бакстерівською статистикою $\hat{\alpha}_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\log_2 S_n}{n}\right)$ та гіпотетичним значенням параметра α_0. Дана статистика є сильно консистентною оцінкою параметра Хюрста α. За допомогою бакстерівських статистик, елементів теорії просторів Орліча та деякої нерівності для квадратичних форм гауссівської випадкової величини побудовано статистичний критерій для перевірки простої гіпотези про значення параметра Хюрста при деякому рівні значущості $p > 0$.

Нульова гіпотеза не буде відхилена, якщо $-x_p < K_n < x_p$, де K_n — статистичний критерій, а x_p визначається так, щоб виконувалась нерівність $P\{|K_n| > x_p\} \leq p$. Нерівність задає множину значень для величини $\hat{\alpha}_n$, які не приведуть до відмови від конкретної нульової гіпотези про те, що $\alpha = \alpha_0$. Ця множина значень буде областю прийняття гіпотези при рівні значущості $p \in (0,1)$.

Ключові слова: дробовий броунівський рух, параметр Хюрста, бакстерівські суми, коваріаційна функція, критерій перевірки гіпотези.

1. Вступ. Нехай $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ — дробовий броунівський рух з параметром Хюрста $0 < \alpha < 1$. Тобто $\xi(t)$ є гауссівським випадковим процесом з нульовим середнім значенням та коваріаційною функцією

$$E\xi(t)\xi(s) = \frac{1}{2}\left(|t|^{2\alpha} + |s|^{2\alpha} - |t-s|^{2\alpha}\right). \tag{1}$$

Дробовий броунівський рух відіграє важливу роль в моделях гідрології, метеорології, фінансовій математиці та інших галузях науки. Проблему оцінювання параметра Хюрста дробового броунівського руху у різних моделях досліджували Дж. М. Поджі та М. К. Віано [1], Дж. Ф. Коерджоллі [2], Б. Л. С. Пракаса Рао [3] та інші.

Як відомо,

$$S_n(W) = \sum_{k=1}^{2^n} \left(W\left(\frac{k}{2^n}\right) - W\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \right)^2, n \geq 1,$$

з ймовірністю одиниця при $n \to \infty$, де $W(t), t \geq 0$ — стандартний броунівський рух. Цей результат встановив відомий французький математик П. Леві [4]. Пізніше, Г. Бакстер [5] узагальнив цей результат на певний клас гауссівських випадкових процесів. Суми $S_n(\xi)$, де $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ — випадковий процес, називають бакстерівськими сумами. Теореми, в яких встановлюється така збіжність, називаються теоремами Леві–Бакстера або бакстерівськими теоремами.

Статистики, побудовані за допомогою бакстерівських сум успішно застосовують для побудови оцінок параметрів випадкових функцій. Ці статистики дозволяють побудувати сильно консистентні оцінки та неасимптотичні довірчі області без застосування класичних граничних теорем. Так, у роботах [6], [7] методом бакстерівських сум були побудовані сильно консистентні оцінки і довірчі інтервали для заданого рівня довіри параметра Хюрста випадкового процесу дробового броунівського руху. У монографії [8] наведено граничні теореми Леві–Бакстера та застосування бакстерівських сум до оцінювання параметрів випадкових функцій у різних статистичних моделях.

2. Постановка задачі. За спостереженнями випадкового процесу дробового броунівського руху $\{\xi(t), t \in [0,1]\}$ в точках

$$\left\{ \frac{k}{2^n} \middle| k = 0, \ldots, 2^n - 1 \right\}, n \geq 1$$

використовуючи метод бакстерівських сум [8], побудуємо статистичний критерій для перевірки простої гіпотези $H_0 : \alpha = \alpha_0$ при альтернативній гіпотезі $H_1 : \alpha \neq \alpha_0$, де $\alpha_0 < 1$, про значення параметра α, що входить показником до коваріаційної функції (1).

3. Основний результат. Розглянемо наступну послідовність бакстерівських сум:

$$S_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(\xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \xi\left(\frac{k}{2^n}\right) \right)^2, n \geq 1.$$

Як можна показати, при $n \to \infty$ для всіх $\alpha \in (0,1)$ має місце збіжність майже напевно

$$2^{n(2\alpha-1)} \sum_{k=0}^{2^n-1} S_n \to 1.$$

Теорема 1. *[див. [6]] Нехай $\{\xi(t), t \in [0,1]\}$ — дробовий броунівський рух з параметром Хюрста α. Тоді статистика*

$$\hat{\alpha}_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\log_2 S_n}{n}\right), n \geq 1$$

є сильно консистентною оцінкою параметра α.

Позначимо

$$\xi_{k,n}=\xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-\xi\left(\frac{k}{2^n}\right),$$

$$\hat{S}_n=2^{n(2\alpha-1)}S_n.$$

Теорема 2. *Нехай $\{\xi(t),t\in[0,1]\}$ — дробовий броунівський рух з параметром Хюрста $\alpha\in\alpha^*$. Тоді при $\alpha^*\in(0,1)$ справедлива наступна нерівність:*

$$\sup_{\alpha\in(0,\alpha^*]} Var\hat{S}_n\leq C_n\left(\alpha^*\right),$$

де

$$C_n(\alpha^*)=\begin{cases}\frac{2}{2^n}\ \left(3+2\zeta(4-4\alpha^*)\right), & \alpha^*\in(0,\frac{3}{4});\\ \frac{2}{2^n}\left(3+2(1+n\ln 2)\right), & \alpha^*=\frac{3}{4};\\ \frac{2}{2^n}\left(3+2\frac{2^{n(4\alpha^*-3)}}{4\alpha^*-3}\right), & \alpha^*\in\left(\frac{3}{4},1\right),\end{cases} \tag{2}$$

$\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}, s>1.$

Доведення. Спочатку знайдемо математичне сподівання послідовності бакстерівських сум $\hat{S}_n, n\geq 1$, використовуючи означення дробового броунівського руху:

$$E\hat{S}_n=2^{n(2\alpha-1)}ES_n=2^{n(2\alpha-1)}E\left(\sum_{k=0}^{2^n-1}\left(\xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-\xi\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)^2\right)=$$

$$=2^{n(2\alpha-1)}\sum_{k=0}^{2^n-1}E\Bigg(\xi^2\left(\frac{k+1}{2^n}\right)-2\xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\xi\left(\frac{k}{2^n}\right)+\xi^2\left(\frac{k}{2^n}\right)\Bigg)=$$

$$=2^{n(2\alpha-1)}\sum_{k=0}^{2^n-1}\left(\left|\frac{k}{2^n}\right|^{2\alpha}-\left(\left|\frac{k}{2^n}\right|^{2\alpha}+\left|\frac{k+1}{2^n}\right|^{2\alpha}-\left|\frac{1}{2^n}\right|^{2\alpha}\right)+\left|\frac{k+1}{2^n}\right|^{2\alpha}\right)=$$

$$=2^{n(2\alpha-1)}2^n\frac{1}{2^{\alpha n}}=1. \tag{3}$$

Для обчислення дисперсії застосуємо формулу Ісерліса [9, с. 5] при числі змінних $n=4$:

$$E\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4=E\left(\eta_1\eta_2\right)E\left(\eta_3\eta_4\right)+$$
$$+E\left(\eta_1\eta_3\right)E\left(\eta_2\eta_4\right)+E\left(\eta_1\eta_4\right)E\left(\eta_2\eta_3\right),$$

де випадкові величини $\eta_1\eta_2\eta_3\eta_4$ мають сумісний гауссівський розподіл з нульовим середнім значенням. Маємо:

$$VarS_n=ES_n^2-(ES_n)^2=E\left(\sum_{k=0}^{2^n-1}\xi_{k,n}^2\right)^2-\left(E\sum_{k=0}^{2^n-1}\xi_{k,n}^2\right)^2=$$

$$=\sum_{k,j=0}^{2^n-1}\left(E\xi_{k,n}^2E\xi_{j,n}^2+2\left(E\xi_{k,n}E\xi_{j,n}\right)^2\right)-\left(E\sum_{k=0}^{2^n-1}\xi_{k,n}^2\right)^2=$$

$$= 2\sum_{k,j=0}^{2^n-1}\left(E\xi_{k,n}\xi_{j,n}\right)^2 = 2\sum_{k=0}^{2^n-1}\left(E\xi_{k,n}^2\right)^2 + 4\sum_{\substack{k,j=0,\\ j<k}}^{2^n-1}\left(E\xi_{k,n}\xi_{j,n}\right)^2. \tag{4}$$

Далі, з формули (1) маємо:

$$E\xi_{k,n}\xi_{j,n} = \left(\xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \xi\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)\left(\xi\left(\frac{j+1}{2^n}\right) - \xi\left(\frac{j}{2^n}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{(k-j)+1}{2^n}\right|^{2\alpha} - \left|\frac{k-j}{2^n}\right|^{2\alpha} + \frac{1}{2}\left|\frac{(k-j)-1}{2^n}\right|^{2\alpha}. \tag{5}$$

Покладемо $v_l := (l+1)^{2H} - 2l^{2H} + (l-1)^{2H}$, $l \geq 1$. Тоді із співвідношень (3)–(5) при $k > j$ отримаємо

$$VarS_n = 2\sum_{k=0}^{2^n-1}\left(2^{n(1-2\alpha)}\right)^2 + 4\sum_{l=1}^{2^n-1}\left(2^n - l\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2}\left|\frac{l+1}{2^n}\right|^{2\alpha} - \left|\frac{l}{2^n}\right|^{2\alpha} + \frac{1}{2}\left|\frac{l-1}{2^n}\right|^{2\alpha}\right)^2 = 2\cdot 2^{n(1-4\alpha)} + 2^{n(1-4\alpha)}\sum_{l=1}^{2^n-1}\left(1 - \frac{l}{2^n}\right)v_l^2 \leq$$

$$\leq 2^{n(1-4\alpha)}\left(2 + \sum_{l=1}^{2^n-1} v_l^2\right).$$

Оскільки $v_1^2 = \left(2^{2\alpha} - 2\right)^2 \leq 4$ при $\alpha \in (0,1)$, то

$$VarS_n \leq 2^{n(1-4\alpha)}\left(6 + \sum_{l=2}^{2^n-1} v_l^2\right).$$

Далі, так як v_l — приріст другого порядку функції $f(x) = x^{2\alpha}$, $x \geq 1$ на відрізку $[l-1, l+1]$, то з формули для приросту n-го порядку при $n = 2$ [10, с. 244] випливає, що $v_l = 2\alpha(2\alpha-1)\theta_l^{2\alpha-2}$, де $\theta_l \in (l-1, l+1)$.

Враховуючи, що $\sup_{\alpha\in(0,1)}|2\alpha(2\alpha-1)| = 2$, маємо

$$v_l^2 \leq \frac{4}{(l-1)^{4-4\alpha}},\ l \geq 2,$$

звідки $VarS_n \leq 2^{n(1-4\alpha)}\left(6 + 4\sum\limits_{l=2}^{2^n-1}\frac{1}{(l-1)^{4-4\alpha}}\right)$.

Тому

$$Var\hat{S}_n = Var\left(2^{n(2\alpha-1)}S_n\right) \leq \frac{1}{2^n}\left(6 + 4\sum_{l=2}^{2^n-1}\frac{1}{(l-1)^{4-4\alpha}}\right)$$

та для $\alpha^* \in (0,1)$

$$\sup_{\alpha\in(0,\alpha^*]} Var\hat{S}_n \leq \frac{2}{2^n}\left(3 + 2\sum_{l=2}^{2^n-1}\frac{1}{(l-1)^{4-4\alpha^*}}\right). \tag{6}$$

Оскільки
$$\sum_{l=1}^{2^n} \frac{1}{l^{4-4\alpha^*}} \le \begin{cases} \zeta(4-4\alpha^*), & \alpha^* \in (0, \frac{3}{4}); \\ 1 + n\ln 2, & \alpha^* = \frac{3}{4}; \\ \frac{2^{n(4\alpha^*-3)}}{4\alpha^*-3}, & \alpha^* \in \left(\frac{3}{4}, 1\right), \end{cases}$$

де $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, $s > 1$ — дзета-функція Рімана, то із нерівності (6) отримуємо

$$\sup_{\alpha \in (0,\alpha^*]} Var\hat{S}_n \le C_n(\alpha^*),$$

де
$$C_n(\alpha^*) = \begin{cases} \frac{2}{2^n}\ (3 + 2\zeta(4-4\alpha^*)), & \alpha^* \in (0, \frac{3}{4}); \\ \frac{2}{2^n}\,(3 + 2(1 + n\ln 2)), & \alpha^* = \frac{3}{4}; \\ \frac{2}{2^n}\left(3 + 2\frac{2^{n(4\alpha^*-3)}}{4\alpha^*-3}\right), & \alpha^* \in \left(\frac{3}{4}, 1\right), \end{cases}$$

що і доводить теорему.

4. Побудова критерію для перевірки гіпотез. Розглянемо нульову гіпотезу $H_0 : \alpha = \alpha_0$ при альтернативній гіпотезі $H_1 : \alpha \ne \alpha_0$, де $\alpha_0 < 1$, про значення параметра α, що входить показником до коваріаційної функції (1) дробового броунівського руху $\{\xi(t), t \in [0,1]\}$. В якості критерію для перевірки нульової гіпотези використаємо статистику

$$K_n = \hat{\alpha}_n - \alpha_0, \tag{7}$$

де оцінку $\hat{\alpha}_n$ визначено в теоремі 1. За рівнем значущості $p \in (0,1)$ знайдемо таке x_p, що справедлива нерівність

$$P\{|K_n| > x_p\} \le p. \tag{8}$$

З нерівності (8) випливає, що

$$P\{|K_n| > x_p\} = P\{K_n > x_p\} + P\{K_n < -x_p\} \le \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = p.$$

Розглянемо окремо нерівність

$$P\{K_n > x_p\} \le \frac{p}{2} \tag{9}$$

і знайдемо звідси оцінку для x_p. Із теореми 1 отримаємо:

$$P\{K_n > x_p\} = P\{\hat{\alpha}_n - \alpha_0 > x_p\} = P\left\{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\log_2 S_n}{n}\right) - \alpha_0 > x_p\right\} =$$
$$= P\left\{1 - \frac{\log_2 S_n}{n} - 2\alpha_0 > 2x_p\right\} = P\{\log_2 S_n < n(1 - 2\alpha_0 - 2x_p)\} =$$
$$= P\left\{S_n < 2^{n(1-2\alpha_0-2x_p)}\right\} = P\left\{S_n - ES_n < 2^{n(1-2\alpha_0-2x_p)} - ES_n\right\}.$$

Тепер, оскільки за рівністю (3),

$$ES_n = E\left(\sum_{k=0}^{2^n-1}\left(\xi\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - \xi\left(\frac{k}{2^n}\right)\right)^2\right) = 2^n\left(\frac{1}{2^n}\right)^{2\alpha} = 2^{n(1-2\alpha)},$$

то одержимо, що

$$P\left\{K_n > x_p\right\} = P\left\{S_n - ES_n < 2^{n(1-2\alpha_0)}\left(2^{-2x_p n} - 1\right)\right\} =$$
$$= P\left\{2^{n(2\alpha-1)}\left(S_n - ES_n\right) < 2^{-2x_p n} - 1\right\} \le$$
$$\le P\left\{\left|\hat{S}_n - E\hat{S}_n\right| > 1 - 2^{-2x_p n}\right\} \le \frac{p}{2}. \tag{10}$$

Наведемо деякі необхідні відомості з теорії просторів Орліча.

Означення 1 (див. [11]). *Парна неперервна опукла функція $u = \{u(x), x \in \mathbb{R}\}$ така, що $u(0) = 0$, $u(x) > 0$ при $x \neq 0$ називається N–функцією, якщо виконуються умови:*

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{u(x)}{x} = 0$;

2) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{u(x)}{x} = \infty$.

Приклад 1. *Функції $u(x) = B\left|x\right|^{\alpha}$, $B > 0$, $\alpha > 1$; $u(x) = \exp\{A\left|x\right|^{\alpha}\} - 1$, $A > 0$, $\alpha > 1$ є N–функціями.*

Нехай (Ω, B, P) — стандартний ймовірнісний простір.

Означення 2 (див. [11]). *Простором Орліча $L_u(\Omega)$ випадкових величин, породжених N–функцією $u(x)$ називається простір випадкових величин $\xi(\omega) = \xi$, що для кожної $\xi \in L_u(\Omega)$ існує константа r_ξ, що $Eu\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty$.*

Простір Орліча $L_u(\Omega)$ є банаховим відносно норми

$$\left\|\xi\right\|_u = \inf\left\{r > 0 : Eu\left(\frac{\xi}{r}\right)\right\} \le 1.$$

Означення 3 (див. [11]). *Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ належить простору Орліча $L_u(\Omega)$, якщо для всіх $t \in T$ випадкова величина $X(t)$ належить простору Орліча $L_u(\Omega)$. Простором Орліча $L_u(\Omega)$ випадкових величин, породжених N–функцією $u(x)$ називається простір випадкових величин $\xi(\omega) = \xi$, що для кожної $\xi \in L_u(\Omega)$ існує константа r_ξ, що $Eu\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty$.*

Лема 1. *[див. [11]] Припустимо, що $\xi \in L_u(\Omega)$ і $\left\|\xi\right\|_u > 0$. Тоді для всіх $x > 0$ виконується нерівність*

$$P\left\{\left|\xi\right| \ge x\right\} \le \left(u\left(\frac{x}{\left\|\xi\right\|_u}\right)\right)^{-1}.$$

Для гауссівської випадкової величини ξ справедлива наступна оцінка квадратичної форми [6]

$$\left\|\xi - E\xi\right\|_u \le k\sqrt{Var\xi} = k\left\|\xi - E\xi\right\|_2, \tag{11}$$

де $k = \inf\limits_{\tau\in(0,0.5)} \frac{\sqrt{2e^{-\tau}(1-2\tau)^{-1/2}+1}}{\sqrt{2}\tau} \approx 3,47$; $\left\|\xi\right\|_2$ — норма в просторі випадкових величин з скінченним 2-им абсолютним моментом $\xi \in L_2(\Omega)$, $\left\|\xi\right\|_2 = \left(E\left|\xi\right|^2\right)^{1/2}$.

Використовуючи лему 1 та нерівність (11) отримаємо з нерівності (10):

$$P\{K_n > x_p\} \le P\left\{\left|\hat{S}_n - E\hat{S}_n\right| > 1 - 2^{-2x_p n}\right\} \le$$

$$\le \left(u\left(\frac{1-2^{-2x_p n}}{\left\|\hat{S}_n - E\hat{S}_n\right\|_u}\right)\right)^{-1} \le \left(u\left(\frac{1-2^{-2x_p n}}{k\sqrt{Var\hat{S}_n}}\right)\right)^{-1} \le \frac{p}{2}. \qquad (12)$$

Звідси, застосовуючи отриману в теоремі 2 оцінку для дисперсії послідовності бакстерівських сум $\hat{S}_n$, одержимо

$$\left(u\left(\frac{1-2^{-2x_p n}}{k\sqrt{Var\hat{S}_n}}\right)\right)^{-1} \le \left(u\left(\frac{1-2^{-2x_p n}}{k\sqrt{C_n(\alpha^*)}}\right)\right)^{-1}.$$

Нехай $u(x) = \cosh x - 1 = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1$. Тоді нерівність (12) можна записати у вигляді:

$$\frac{2}{e^{\frac{1-2^{-2x_p n}}{k\sqrt{C_n(\alpha^*)}}} + e^{-\frac{1-2^{-2x_p n}}{k\sqrt{C_n(\alpha^*)}}} - 2} \le \frac{p}{2}.$$

Розв'язавши останню нерівність відносно x_p, отримаємо:

$$x_p \ge -\frac{\ln\left(1 - k\varphi(p)\sqrt{C_n(\alpha^*)}\right)}{2n\ln 2}, \qquad (13)$$

де

$$\varphi(p) = \ln\left(1 + \frac{2}{p} + \frac{2}{p}\sqrt{1+p}\right), p > 0. \qquad (14)$$

Аналогічно, отримаємо оцінку для x_p із нерівності

$$P\left\{K_n < -x_p\right\} \le \frac{p}{2}.$$

Для цього проведемо подібні до наведених вище міркувань, щодо розв'язання нерівності (9):

$$P\left\{K_n < -x_p\right\} = P\left\{\hat{\alpha}_n - \alpha_0 < -x_p\right\} = P\left\{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\log_2 S_n}{n}\right) - \alpha_0 < -x_p\right\} =$$

$$= P\left\{1 - \frac{\log_2 S_n}{n} - 2\alpha_0 < -2x_p\right\} = P\left\{-\log_2 S_n < n(-2x_p + 2\alpha_0 - 1)\right\} =$$

$$= P\left\{S_n > 2^{n(1-2\alpha_0+2x_p)}\right\} = P\left\{S_n - ES_n > 2^{n(1-2\alpha_0)}(2^{2nx_p} - 1)\right\} =$$

$$= P\left\{\hat{S}_n - E\hat{S}_n > 2^{2nx_p} - 1\right\} \le P\left\{\left|\hat{S}_n - E\hat{S}_n\right| > 2^{2nx_p} - 1\right\} \le \frac{p}{2}.$$

Далі, з леми 1, нерівності (11) та теореми 2 з останньої нерівності випливає, що

$$P\left\{K_n < -x_p\right\} \le P\left\{\left|\hat{S}_n - E\hat{S}_n\right| > 2^{2nx_p} - 1\right\} \le$$

$$\le \left(u\left(\frac{2^{2x_p n} - 1}{k\sqrt{Var\hat{S}_n}}\right)\right)^{-1} \le \left(u\left(\frac{2^{2x_p n} - 1}{k\sqrt{C_n(\alpha^*)}}\right)\right)^{-1} \le \frac{p}{2}. \qquad (15)$$

Розв'язавши останню нерівність відносно x_p, отримаємо:

$$x_p \geq \frac{\ln\left(1 + k\varphi(p)\sqrt{C_n(\alpha^*)}\right)}{2n\ln 2}, \tag{16}$$

де $\varphi(p)$ визначено в (13).

Виходячи з нерівностей (13) та (16) можемо покласти, що

$$x_p = \max\left\{x_p^{(1)}, x_p^{(2)}\right\}, \tag{17}$$

де

$$x_p^{(1)} = -\frac{1}{2}\frac{\ln\left(1 - k\varphi(p)\sqrt{C_n(\alpha^*)}\right)}{n\ln 2},$$

$$x_p^{(2)} = \frac{1}{2}\frac{\ln\left(1 + k\varphi(p)\sqrt{C_n(\alpha^*)}\right)}{n\ln 2},$$

$$k = \inf_{\tau\in(0,0.5)} \frac{\sqrt{2e^{-\tau}(1-2\tau)^{-1/2}+1}}{\sqrt{2}\tau} \approx 3,47,$$

$\varphi(p)$ задано рівністю (13), а $C_n(\alpha^*)$ визначено в (2).

Із наведеного вище випливає, що для перевірки гіпотези H можна використовувати наступний критерій.

Критерій. *Для заданого рівня значущості $p \in (0,1)$ нульова гіпотеза H відхиляється, якщо справедлива нерівність $K_n > x_p$, де критерій K_n задано формулою (7), а x_p визначається в (17).*

Отже, нульова гіпотеза не буде відхилена, якщо

$$-x_p < K_n < x_p, \tag{18}$$

де K_n — різниця між оцінкою для параметра α та гіпотетичним значенням.

Нерівність (18) задає множину значень для величин $\hat{\alpha}_n$, які не приведуть до відмови від конкретної нульової гіпотези про те, що $\alpha = \alpha_0$. Ця множина значень називається областю прийняття гіпотези для $\hat{\alpha}_n$ при рівні значущості $p \in (0,1)$.

5. Висновки. В роботі побудовано критерій для перевірки деякої гіпотези про значення параметра Хюрста, що входить показником до коваріаційної функції дробового броунівського руху на основі методу бакстерівських сум.

Список використаної літератури

1. Poggi J. M., Viano M. C. An estimate of the fractal index using multi–scale aggregates. *J. Time Series Anal.* 1998. Vol. 18. P. 221–233.
2. Coeurjolly J. F. Estimating the parameters of a fractional Brownian motion by discrete variations of this sample paths. *Stat. Inference for Stoch. Process.* 2001. Vol. 4. P. 199–207.
3. Prakasa Rao B. L. S. Statistical inference for fractional diffusion processes. *Chichester: John Wiley Sons*, 2010. 280 p.
4. Levy P. Le mouvement Brownian plan. *Amer J. Math.* 1940. Vol. 62. P. 487–550.
5. Baxter G. A strong limit theorem for Gaussian processes. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1956. Vol. 62, no. 3. P. 522–527.
6. Курченко О. О. Одна сильно консистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху. *Теор. ймов. та матем. статистика.* 2002. Вип. 67. С. 45–54.

7. Breton J. C., Nourdin I., Peccati G. Exact confidence intervals for the Hurst parameter of a fractional Brownian motion. *Electronic J. Statist.* 2009. Vol. 3. P. 416–425.
8. Козаченко Ю. В., Курченко О. О., Синявська О. О. Теореми Леві-Бакстера для випадкових полів та їх застосування: монографія. *Ужгород: Шарк*, 2018. 228 с.
9. Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А. Гауссовские случайные процессы. Москва: Наука, 1970. 384 с.
10. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Москва: Наука, 1969. Т.1. 810 с.
11. Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В. Метрические характеристики случайных величин и процессов. Киев: ТВiМС, 1998. 290 с.

Syniavska O. O. A criterion for testing hypothesis about the value of the Hurst parameter of fractional Brownian motion.

In this paper the statistical hypothesis testing task about the value of the Hurst parameter of fractional Brownian motion $\{\xi(t), t \in (0,1)\}$ is considered. The estimation problem for the Hurst parameter of a fractional Brownian motion or of Self Similarity Index plays an important role in statistics of stochastic processes. The proposed criterion for testing hypotheses about the value of the Hurst parameter is based on the Baxter sums method. The applications of the Baxter sums method for stochastic processes and fields allows us to build the strongly consistent estimators and to construct the non-asymptotic confidence intervals without the use of classical limit theorems in many models.

We want to construct criterion for testing hypotheses about the value of the Hurst parameter α of a fractional Brownian motion $H_0 : \alpha = \alpha_0$ with the alternative $H_1 : \alpha \neq \alpha_0$, where $\alpha_0 < 1$, by using the observations of a stochastic process $\xi(t)$ at points $\left\{ \frac{k}{2^n} \middle| k = 0, \ldots, 2^n - 1 \right\}, n \geq 1$. In this paper the upper estimate for variance of some sequence of Baxter sums S_n — sums of the squares of the increments of the first order of the Brownian motion. Then we use the difference between some Baxter statistic $\hat{\alpha}_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\log_2 S_n}{n}\right)$ and hypothetical value of parameter α_0 as a criterion K_n. This statistic is a strongly consistent estimator of the Hurst parameter α. A statistical criterion for testing simple hypotheses about the value of the Hurst parameter for a given level of confidence $p > 0$ is constructed by using Baxter statistic, the elements of theory of Orlicz space and some inequality for quadratic forms of Gaussian random variables.

The null hypotheses is not rejected, if $-x_p < K_n < x_p$, where K_n is a statistical criterion, x_p is defined so that inequality is true $P\{|K_n| > x_p\} \leq p$. The inequality sets the set of values for variable $\hat{\alpha}_n$, which will not lead to the rejection of a specific null hypothesis about $\alpha = \alpha_0$. This set of values will be the region of acceptance for a given level of confidence $p \in (0,1)$.

Keywords: fractional Brownian motion, Hurst parameter, Baxter sums, covariance function, criterion for testing hypotheses.

References

1. Poggi, J. M., & Viano, M. C. (1998). An estimate of the fractal index using multi–scale aggregates. *J. Time Series Anal., 18*, 221–233.
2. Coeurjolly, J. F. (2001). Estimating the parameters of a fractional Brownian motion by discrete variations of this sample paths. *Stat. Inference for Stoch. Process., 4*, 199–207.
3. Rao, B. L. S. (2010). Statistical inference for fractional diffusion processes. *Chichester: John Wiley Sons.*
4. Levy, P. (1940). Le mouvement Brownian plan. *Amer J. Math., 62*, 487–550.
5. Baxter, G. (1956). A strong limit theorem for Gaussian processes. *Proc. Amer. Math. Soc., 62, 3*, 522–527.
6. Kurchenko, O. O. (2002). Odna sylno konsystentna otsinka parametra Khiursta drobovoho brounivskoho rukhu [A strongly consistent estimate for the Hurst parameter of fractional

Brownian motion]. *Teor. Imovir. Mat. Stat. – Theory Probab. Math. Statist., 67*, 45–54 [in Ukrainian].

7. Breton, J. C., Nourdin, I., & Peccati, G. (2009). Exact confidence intervals for the Hurst parameter of a fractional Brownian motion. *Electronic J. Statist., 3*, 416–425.
8. Kozachenko, Yu. V., Kurchenko, O. O, & Syniavska, O. O. (2018). Teoremy Levi-Bakstera dlia vypadkovykh poliv ta yikh zastosuvannia [The Baxter-Levy theorems for stochastic fields and their applications]. *Uzhhorod: Shark* [in Ukrainian].
9. Ibragimov, I. A., & Rozanov, Y. A. (1970). Gaussovskiye sluchaynyye protsessy [Gaussian random processes]. *Moscow: Nauka* [in Russian].
10. Fikhtengolts, G. M. (1969). Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya [A course of differential and integral calculus]. (Vols. 1–3). *Moscow: Nauka* [in Russian].
11. Buldygin, V. V., & Kozachenko, Yu. V. (1998). Metricheskiye kharakteristiki sluchaynykh velichin i protsessov [Metric characterization of random variables and random processes]. *Kyiv: TViMS* [in Russian].

Одержано 18.03.2019