УДК 517.9:958

Музика Лілія

Точні розв'язки крайової задачі узагальненої системи Шіґесади–Кавасакі–Терамото

У статті побудовано нові точні розв'язки узагальненої системи Шіґесади–Кавасакі–Терамото. На їх основі розв'язано крайові задачі з нульовими умовами Ноймана. Досліджено асимптотичну поведінку знайдених розв'язків крайових задач.

Ключові слова: система Шіґесади–Кавасакі–Терамото, система Лотки–Вольтера, точний розв'язок, узагальнене рівняння Фішера, крайова задача, нульові умови Ноймана.

Постановка наукової проблеми та її значення. Абсолютна більшість явищ та процесів, притаманних живій та неживій природі, моделюються диференціальними рівняннями із частинними похідними (ДРЧП) та системами таких рівнянь. Проте класичні методи інтегрування *лінійних* ДРЧП та їх систем є, як правило, непридатними для застосування до *нелінійних* ДРЧП та їх систем. Тому розвиток нових підходів до розв'язання нелінійних ДРЧП, особливо їх систем, і побудова широких класів точних розв'язків таких рівнянь та систем є актуальною проблемою сучасної математичної фізики.

Однією з відомих систем ДРЧП, що описує біологічний процес взаємодії двох популяцій, є система Шіґесади–Кавасакі–Терамото (ШКТ), запропонована в 1979 р. Шіґесадою та ін. [10]:

$$\begin{cases} u_t = [(d_1+\rho_1 v)u]_{xx} + u(a_1 - b_1 u - c_1 v), \\ v_t = [(d_2+\rho_2 u)v]_{xx} + v(a_2 - b_2 u - c_2 v), \end{cases} \tag{1}$$

де функції u та v – концентрації двох популяцій, що змагаються в просторі та часі, d_1 та d_2 – коефіцієнти дифузії, ρ_1 та ρ_2 – коефіцієнти так званої поперечної дифузії, a_1 та a_2 – коефіцієнти народжуваності, b_1 та c_2 – коефіцієнти внутрішньо-видових змагань, b_2 та c_1 – коефіцієнти міжвидових змагань. Очевидно, що система (1) при $\rho_1=\rho_2=0$ зводиться до класичної дифузійної системи Лотки–Вольтера (ЛВ).

Аналіз досліджень цієї проблеми. Починаючи з піонерських робіт [4; 8], умови існування, єдності та глобальної стійкості розв'язків дифузійної системи ЛВ та системи ШКТ досліджувало багато авторів (див. [9; 11] та цитовану там літературу). Проте, наскільки нам відомо, є лише декілька статей, у яких побудовано точні розв'язки цих систем у явному вигляді [9, 8].

У цій статті розглядається природне узагальнення системи ШКТ вигляду [9]:

$$\begin{cases} u_t = [(d_1+d_{11}u+d_{12}v)u]_{xx} + u(a_1 - b_1 u - c_1 v), \\ v_t = [(d_2+d_{21}u+d_{22}v)v]_{xx} + v(a_2 - b_2 u - c_2 v), \end{cases} \tag{2}$$

де d_{11} та d_{22} – коефіцієнти так званих внутрішньо-дифузійних тисків, d_{12} та d_{21} коефіцієнти поперечної дифузії, причому $d_{12}^{\ 2}+d_{21}^{\ 2}\neq 0$.

Зауважимо, що широкий клас точних розв'язків систем типу ЛВ зі степеневими дифузіями (без поперечних) було побудовано в роботах [1; 5], а в в роботі [5] – точні розв'язки системи рівнянь ШКТ (2) з допомогою методу додаткових породжуючих умов [8].

Мета і завдання статті – отримати точні крайової задачі з умовами Ноймана для системи ШКТ (2).

Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів дослідження. У нашій роботі для побудови точних розв'язків системи (2) скористаємось таким методом [3]. Запишемо систему (2) в розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} u_t = d_1u_{xx} + 2d_{11}uu_{xx} + d_{12}vu_{xx} + d_{12}uv_{xx} + 2d_{11}(u_x)^2 + 2d_{12}u_xv_x + a_1u - b_1u^2 - c_1uv, \\ v_t = d_2v_{xx} + 2d_{22}vv_{xx} + d_{21}uv_{xx} + d_{21}vu_{xx} + 2d_{22}(v_x)^2 + 2d_{21}u_xv_x + a_2v - b_2uv - c_2v^2 \end{cases} \tag{3}$$

і розглянемо її з додатковим обмеженням:

$$v = \beta u + \beta_0, \tag{4}$$

де $\beta \neq 0$, β_0 – деякі дійсні параметри.

Підставивши обмеження (4) в систему (3) і провівши спрощення, отримаємо:

$$\begin{cases} u_t = [d_1 + \beta_0 d_{12}]u_{xx} + 2[d_{11} + \beta d_{12}]uu_{xx} + 2[d_{11} + \beta d_{12}](u_x)^2 + \\ \quad + [a_1 - \beta_0 c_1]u - [b_1 + \beta c_1]u^2, \\ u_t = [d_2 + \dfrac{\beta_0}{\beta} d_{21} + 2\beta_0 d_{22}]u_{xx} + 2[d_{21} + \beta d_{22}]uu_{xx} + 2[d_{21} + \beta d_{22}](u_x)^2 + \\ \quad + [a_2 - \dfrac{\beta_0}{\beta} b_2 - 2\beta_0 c_2]u - [b_2 + \beta c_2]u^2 + [\dfrac{\beta_0}{\beta} a_2 - \dfrac{\beta_0^{\,2}}{\beta} c_2]. \end{cases} \tag{5}$$

Система (5) є перевизначеною і має нетривіальні розв'язки при таких обмеженнях на коефіцієнти:

$$\begin{aligned} & d_1 + \beta_0 d_{12} = d_2 + \frac{\beta_0}{\beta} d_{21} + 2\beta_0 d_{22}, \\ & d_{11} + \beta d_{12} = d_{21} + \beta d_{22}, \\ & a_1 - \beta_0 c_1 = a_2 - \frac{\beta_0}{\beta} b_2 - 2\beta_0 c_2, \\ & b_1 + \beta c_1 = b_2 + \beta c_2, \\ & \frac{\beta_0}{\beta} a_2 - \frac{\beta_0^{\,2}}{\beta} c_2 = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

За таких умов система (3) набуває вигляду рівняння:

$$u_t = [(d_1 + \beta_0 d_{12} + 2[d_{11} + \beta d_{12}]u)u_x]_x + [a_1 - \beta_0 c_1]u - [b_1 + \beta c_1]u^2, \tag{7}$$

яке зводиться до узагальненого рівняння Фішера [3]

$$u_t = [(1 + \lambda_0 u)u_x]_x + \lambda_2 u - \lambda_3 u^2, \tag{8}$$

якщо

$$\begin{aligned} & d_1 + \beta_0 d_{12} = 1, \\ & d_{11} + \beta d_{12} = \frac{1}{2}\lambda_0, \\ & a_1 - \beta_0 c_1 = \lambda_2, \\ & b_1 + \beta c_1 = \lambda_3. \end{aligned} \tag{9}$$

Точні розв'язки рівняння (8) побудовані в [3]. Використаємо ці розв'язки для розв'язання крайової задачі з умовами Ноймана для системи ШКТ (2).

Із другої та четвертої рівностей обмежень (6) при $b_2 \neq b_1, c_2 \neq c_1$ маємо:

$$\beta = \frac{b_1 - b_2}{c_2 - c_1}, \tag{10}$$

$$d_{22} = d_{12} + \frac{c_2 - c_1}{b_2 - b_1}(d_{21} - d_{11}). \tag{11}$$

Остання умова обмежень (6) приводить до двох можливих випадків:

1) $\beta_0 = 0$, 2) $a_2 - \beta_0 c_2 = 0$.

1) Якщо $\beta_0 = 0$, то умови (6) та (9) запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} &d_1 = d_2 = 1, \\ &d_{11} + \beta d_{12} = d_{21} + \beta d_{22} = \frac{1}{2}\lambda_0, \\ &a_1 = a_2 = \lambda_2, \\ &b_1 + \beta c_1 = b_2 + \beta c_2 = \lambda_3, \end{aligned} \tag{12}$$

де β задовольняє (10), а d_{22} знаходимо з (11).

У таких припущеннях рівняння (7) набуває вигляду:

$$u_t = \left[\left(1 + 2(d_{11} + \frac{b_1 - b_2}{c_2 - c_1} d_{12})u\right)u_x\right]_x + a_1 u - \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{c_2 - c_1} u^2. \tag{13}$$

Маючи вже знайдені розв'язки узагальненого рівняння Фішера [3], записуємо розв'язок рівняння (13) і, відповідно, системи (1):

$$\begin{cases} u(x,t) = \dfrac{a_1(c_2 - c_1)}{2(b_1 c_2 - b_2 c_1)}\left[1 + tanh\dfrac{a_1 t}{2}\right] + C_1 \dfrac{exp\left(\dfrac{a_1 + \mu_1}{4} t\right)}{\left[cosh\dfrac{a_1 t}{2}\right]^{\frac{3}{2}}} exp\left(\pm\dfrac{\sqrt{\mu_1}}{2} x\right), \\ v(x,t) = \dfrac{b_1 - b_2}{c_2 - c_1} u(x,t), \end{cases} \tag{14}$$

де

$$\mu_1 = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{(c_2 - c_1)d_{11} - (b_2 - b_1)d_{12}} > 0, \tag{15}$$

$C_1 = const$, а коефіцієнти системи (2) задовольняють співвідношення:

$$a_2 = a_1,$$

$$d_2 = d_1 = 1,$$

$$d_{22} = d_{12} + \frac{c_2 - c_1}{b_2 - b_1}(d_{21} - d_{11}).$$

2) Якщо $a_2 - \beta_0 c_2 = 0$, то $\beta_0 = \dfrac{a_2}{c_2}$ ($c_2 \neq 0$). Тоді умови (6) та (9) запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} &d_1 + \frac{a_2}{c_2} d_{12} = d_2 + \frac{a_2}{\beta c_2} d_{21} + 2\frac{a_2}{c_2} d_{22} = 1, \\ &d_{11} + \beta d_{12} = d_{21} + \beta d_{22} = \frac{1}{2}\lambda_0, \\ &a_1 - \frac{a_2}{c_2} c_1 = -a_2 - \frac{a_2}{\beta c_2} b_2 = \lambda_2, \\ &b_1 + \beta c_1 = b_2 + \beta c_2 = \lambda_3, \end{aligned} \tag{16}$$

де β задовольняє (10), а d_{22} знаходимо з (11).

У таких припущеннях рівняння (7) набуває вигляду:

$$u_t = \left[\left(1+2[d_{11}+\frac{b_1-b_2}{c_2-c_1}d_{12}]u\right)u_x\right]_x + \frac{a_2(b_1c_2-b_2c_1)}{c_2(b_2-b_1)}u - \frac{b_1c_2-b_2c_1}{c_2-c_1}u^2. \quad (17)$$

На основі вже згаданих розв’язків узагальненого рівняння Фішера [3], отримуємо розв’язок рівняння (17) і, відповідно, системи (2):

$$\begin{cases} u(x,t)=\dfrac{a_2(c_2-c_1)}{2c_2(b_1c_2-b_2c_1)}\left[1+tanh\dfrac{\mu_2 t}{2}\right]+C_2\dfrac{exp\left(\dfrac{1}{4}(\dfrac{a_2(b_1c_2-b_2c_1)}{c_2(b_2-b_1)}+\mu_3)t\right)}{\left[cosh\dfrac{\mu_2 t}{2}\right]^{\frac{3}{2}}}\times \\ \quad\times exp\left(\pm\dfrac{\sqrt{\mu_3}}{2}x\right), \\ v(x,t)=\dfrac{b_1-b_2}{c_2-c_1}u(x,t)+\dfrac{a_2}{c_2}, \end{cases} \quad (18)$$

де

$$\mu_2=\frac{a_2(b_1c_2-b_2c_1)}{c_2(b_2-b_1)},\ \ \mu_3=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{d_{11}a_2(c_2-c_1)+(d_1-1)c_2(b_2-b_1)}>0, \quad (19)$$

$C_2 = const$, а коефіцієнти системи (2) задовольняють співвідношення:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{a_2b_1(c_2-c_1)}{c_2(b_2-b_1)}, \\ d_{12} &= \frac{c_2}{a_2}(1-d_1), \\ d_2 &= 2d_1-1-\frac{a_2(c_2-c_1)}{c_2(b_2-b_1)}d_{21}+2\frac{a_2(c_2-c_1)}{c_2(b_2-b_1)}d_{11}, \\ d_{22} &= \frac{c_2}{a_2}(1-d_1)+\frac{c_2-c_1}{b_2-b_1}(d_{21}-d_{11}). \end{aligned} \quad (20)$$

Побудовані розв’язки (14) та (18) системи (2) дають можливість розглянути крайові задачі з нульовими умовами Ноймана для цієї нелінійної системи. Мають місце такі теореми.

Теорема 1. *Точний обмежений розв’язок нелінійної крайової задачі для узагальненої системи Шігесади–Кавасакі–Терамото*

$$\begin{cases} u_t = [(1+d_{11}u+d_{12}v)u]_{xx}+u(a_1-b_1u-c_1v), \\ v_t = [(1+d_{21}u+[d_{12}+\dfrac{c_2-c_1}{b_2-b_1}(d_{21}-d_{11})]v)v]_{xx}+v(a_1-b_2u-c_2v) \end{cases}$$

за початкових умов

$$\begin{cases} u(x,0)=\dfrac{a_1(c_2-c_1)}{2(b_1c_2-b_2c_1)}+C_1exp\left(-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{(c_2-c_1)d_{11}-(b_2-b_1)d_{12}}}\,|x|\equiv u_0(x)\right),\\ v(x,0)=\dfrac{b_1-b_2}{c_2-c_1}u_0(x), \end{cases}$$

і крайових умов Ноймана

$$u_x(t,\pm\infty)=0,\ v_x(t,\pm\infty)=0$$

в області $(t,x)\in[0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$ має вигляд:

$$\begin{cases} u(x,t)=\dfrac{a_1(c_2-c_1)}{2(b_1c_2-b_2c_1)}\left[1+tanh\dfrac{a_1t}{2}\right]+C_1\dfrac{exp\left(\dfrac{a_1+\mu_1}{4}t\right)}{\left[cosh\dfrac{a_1t}{2}\right]^{\frac{3}{2}}}exp\left(-\dfrac{\sqrt{\mu_1}}{2}|x|\right),\\ v(x,t)=\dfrac{b_1-b_2}{c_2-c_1}u, \end{cases} \tag{21}$$

де μ_1 визначається з (15), $C_1=const$, $a_1>0$, $\dfrac{a_1}{2}>\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{(c_2-c_1)d_{11}-(b_2-b_1)d_{12}}>0$, $\dfrac{b_1-b_2}{c_2-c_1}>0$, $\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{c_2-c_1}>0$.

Розв’язок (21) має властивість:

$$(u,v)\to\left(\frac{a_1(c_2-c_1)}{b_1c_2-b_2c_1},\frac{a_1(b_1-b_2)}{b_1c_2-b_2c_1}\right),\ t\to\infty. \tag{22}$$

Мовою біологічних термінів це означає, що змагання між двома популяціями є «м’яким», тобто допускає як завгодно довге співіснування видів (типовий реальний приклад – паразит і його носій).

Теорема 2. *Точний обмежений розв’язок нелінійної крайової задачі для узагальненої системи Шігесади–Кавасакі–Терамото*

$$\begin{cases} u_t=[(d_1+d_{11}u+\dfrac{c_2}{a_2}(1-d_1)v)u]_{xx}+u(\dfrac{a_2b_1(c_2-c_1)}{c_2(b_2-b_1)}-b_1u-c_1v),\\ v_t=[(2d_1-1-\dfrac{a_2(c_2-c_1)}{c_2(b_2-b_1)}d_{21}+2\dfrac{a_2(c_2-c_1)}{c_2(b_2-b_1)}d_{11}+\\ \quad +d_{21}u+(\dfrac{c_2}{a_2}(1-d_1)+\dfrac{c_2-c_1}{b_2-b_1}(d_{21}-d_{11}))v)v]_{xx}+v(a_2-b_2u-c_2v), \end{cases}$$

за початкових умов

$$\begin{cases} u(x,0)=\dfrac{a_2(c_2-c_1)}{2c_2(b_2-b_1)}+C_2\,exp\left(-\dfrac{\sqrt{\mu_3}}{2}|x|\right)\equiv u_0(x),\\ v(x,0)=\dfrac{b_2-b_1}{c_1-c_2}u_0(x)+\dfrac{a_2}{c_2}, \end{cases}$$

і крайових умов Ноймана

$$u_x(t,\pm\infty)=0,v_x(t,\pm\infty)=0$$

в області $(t,x) \in [0,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$ має вигляд:

$$\begin{cases} u(x,t)=\dfrac{a_2(c_2-c_1)}{2c_2(b_2-b_1)}\left[1+tanh\dfrac{\mu_2 t}{2}\right]+C_2\dfrac{exp\left(\dfrac{1}{4}(a_2\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{c_2(b_2-b_1)}+\mu_3)t\right)}{\left(cosh\dfrac{\mu_2 t}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}\times \\ \times exp\left(-\dfrac{\sqrt{\mu_3}}{2}|x|\right), \\ v(x,t)=\dfrac{b_2-b_1}{c_1-c_2}u+\dfrac{a_2}{c_2}, \end{cases} \tag{23}$$

де μ_2 та μ_3 визначаються із (19), $C_2=const$, $\dfrac{a_2(b_1c_2-b_2c_1)}{c_2(b_2-b_1)}>0$, $\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{c_2-c_1}>0$,

$\dfrac{b_1-b_2}{c_2-c_1}<0$, $\dfrac{a_2(b_1c_2-b_2c_1)}{c_2(b_2-b_1)}>\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{2[d_{11}a_2(c_2-c_1)+(d_1-1)c_2(b_2-b_1)]}$.

Розв’язок (22) на нескінченності поводиться по-іншому:

$$(u,v)\to\left(\frac{a_2(c_2-c_1)}{c_2(b_2-b_1)},0\right),\ t\to\infty. \tag{24}$$

Мовою біологічних термінів це означає, що змагання між популяціями двох видів u і v є безкомпромісним і, врешті-решт, вид u (хижак) з’їдає вид v (жертву).

Наголосимо, що теореми існування розв’язків системи ШКТ із властивостями (22) та (24) були доведені в роботі [9], проте явні точні розв’язки в ній не побудовані.

Висновки. У роботі отримано точні розв’язки узагальненої системи нелінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними Шіґесади–Кавасакі–Терамото (2).

Джерела та література

1. Миронюк Л. П. Редукція та розв’язки одного класу систем нелінійних рівнянь реакції–дифузії зі степеневими нелінійностями / Л. П. Миронюк, Р. М. Черніга // Збірник праць Інституту математики НАН України. – Т. 3, № 2. – 2006. – С. 217–224.
2. Черніга Р. М. Дифузійна система Лотки–Вольтера: симетрії Лі, точні та числові розв’язки / Р. М. Черніга, В. А Дутка // Укр. мат. журн. – 2004. – Т. 56. – С. 1395–1404.
3. Черніга Р. М. Нові точні розв’язки та їх властивості одного нелінійного рівняння математичної біології / Р. М. Черніга // Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53. – С. 1409–1421.
4. Brown P. N. Decay to uniform states in ecological interactions // SIAM J. Appl. Math. 1980. – Vol. 38. – P. 22–37.
5. Cherniha R. New exact solutions of nonlinear cross–diffusion system / R. Cherniha, L. Myroniuk // J. Phys. A: Math. Theor. – 2008. – Vol. 41. – 395204 (16pp).
6. Cherniha R. A constructive method for construction of new exact solutions of nonlinear evolution equations / R. Cherniha // Rep. Math. Phys. – 1996. – Vol. 38. – P. 301–312.
7. Cherniha R. Nonlinear Reaction-Diffusion Systems with Variable Diffusivities: Lie Symmetries, Ansatze and Exact Solutions / R. Cherniha, J. R. King // J. Math. Anal. Appl. – 2005. – Vol. 308. – P. 11–35.
8. Conway E., Smoller J. Diffusion and predator-prey interaction // SIAM J. Appl. Math. 1977. – Vol. 33. – P. 673–686.
9. Lou Y., Ni W.–M. Diffusion, self–diffusion and cross–diffusion // J. Diff. Eqs. – 1996. – Vol. 131. – P. 79–131.
10. Shigesada N. Spatial segregation of interacting species / N. Shigesada, K. Kawasaki, E. Teramoto // J. Theoret. Biol. – 1979. – Vol. 79. – P. 83–99.

11. Shim S.–A. Uniform boundedness and convergence of solutions to the systems with a single nonzero cross–diffusion // J. Math. Anal. Appl. – 2003. – Vol. 279. – P. 1–21.

Музыка Лилия. Точные решения краевой задачи обобщенной системы Шигесады–Кавасаки–Теремото. Развитие методов интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными и их систем – актуальная проблема современной математической физики.

Статья посвящена нелинейной эволюционной системе Шигесады–Кавасаки–Терамото с поперечной диффузией, которая обобщает классическую диффузионную систему Лотки–Вольтера.

В статье построены новые точные решения обобщенной системы Шигесады–Кавасаки–Терамото на основании точних решений обобщенного уравнения Фишера. Изучается краевая задача с нулевыми условиями Ноймана. Приведены точные решения этой задачи. Исследовано ассимптотическое поведение полученых решений.

Ключевые слова: система Шигесады–Кавасаки–Терамото, система Лотки–Вольтера, точное решение, обобщенное уравнение Фишера, краевая задача, нулевые условия Ноймана.

Muzyka Liliia. Exact Solutions of Boundary-value Problem of Generalized Shigesada–Kawasaki–Teramoto System. Development of methods for integrating the nonlinear differential equations and their systems is the actual problem of modern mathematical physics.

The article is devoted to the non-linear evolution cross–diffusion Shigesada–Kawasaki–Teramoto system, which generalizes the classical diffusion Lotka–Voltera system.

New exact solutions of the generalized Shigesada–Kawasaki–Teramoto system are built by means of exact solutions of the Fisher equation in this article. Boundary–value problem with zero Neumann conditions is investigated. Exact solutions of this problem are given. The asymptotic behaviour of these solutions is examined.

Key words: the Shigesada–Kawasaki–Teramoto system, the Lotka–Volterra system, exact solution, the generalized Fisher equation, boundary-value problem, zero Neumann conditions.

Стаття надійшла до редколегії
18.11.2013 р.

УДК 531.19

Богдан Антонюк

Деякі властивості генератора ланцюжка рівнянь Боголюбова одновимірної системи виділеної частки в термостаті

Установлено властивості генератора ланцюжка рівнянь Боголюбова одновимірної несиметричної системи виділеної частки в термостаті.

Ключові слова: ББГКІ ієрархія, несиметричні системи частинок, еволюційний оператор, багаточастинкова система.

Постановка наукової проблеми та її значення. Однією з актуальних тем сучасної математичної фізики є вивчення реальних процесів, що відбуваються в різноманітних макросередовищах, а саме: газах, рідинах, біологічних організмах різних ступенів розвитку і складу, на основі властивостей і законів руху мікрочастинок, із яких вони складаються.

Цікавим є вивчення нескінченних систем, тобто систем із нескінченною кількістю частинок [3; 2], у нескінченному фазовому просторі, стан яких повністю визначається послідовністю частинкових функцій розподілу.

Завдання статистичної механіки полягає в тому, щоб із відомого початкового стану системи знайти її стан у довільний момент часу, тобто у визначенні еволюції системи. Важливим є також питання визначення стаціонарного стану системи – тобто стану, у якому частинки перебувають у рівновазі [1].

Еволюція системи описується з використанням математичних методів рівняннями функції розподілу, серед яких важливе місце займає ланцюжок рівнянь Боголюбова – нескінченна система