10. Svidzinskiy A. V. Mathematical methods of theoretical physics / A. V. Svidzinskiy. – Vol. 2. – Kyyiv : Bogolyubov institute of theoretical physics, 2009. – 436 p. (In Ukrainian).
11. Trokhimchuck P. P. Foundations of Relaxed Optics / P. P. Trokhimchuck. – Lutsk : Volyn' University Press Vezha, 2011. – 627 p.
12. Trokhimchuck P. P. Nonlinear and Relaxed Optical Processes. Problems of interactions / P. P. Trokhimchuck. – Lutsk : Vezha-Print, 2013. – 280 p.
13. Vysotskiy V. I. Peculiarities 0f the formation and the application of correlated states in nonstationary states for low energy of interactive particles / V. I. Vysotskiy, M. V. Vysotskiy, S. V. Adamenko // JETP. – Vol. 141, No. 2. – 2012. – P. 276–287. (In Russian).
14. Ziętek B. Optoelektronika / B. Ziętek. – Toruń : Wydawnictwo universytetu Nikolaja Kopernika, 2005. – 615 s. (In Polish).

Трохимчук Петро, Дмитрук Ірина. Проблема когерентності в сучасній теоретичній фізиці. Досліджено проблему когерентності в сучасній теоретичній фізиці. Проаналізовано класичну та квантову концепції когерентності, уключаючи принципи невизначеності, а також принципи невизначеності Гейзенберга, Робертсона, Гейзенберга-Робертсона та Шрьодінгера-Робертсона, застосування принципу невизначеності Шрьодінгера-Робертсона для розв'язання задачі про нелінійний математичний маятник. Проблему когерентності в релаксаційній оптиці представлено як проблему утворення й зміни когерентних структур. Проаналізовано класифікацію когерентних структур, що відповідає класифікації явищ незворотної взаємодії оптичного випромінювання з речовиною, яка покладена в основу релаксаційної оптики. Досліджено проблеми порушення когерентності, уключаючи фазову когерентність, та їх застосування в сучасній фізиці, релаксаційній оптиці.

Ключові слова: когерентність, теоретична фізика, релаксаційна оптика, принцип Релея, принципи невизначеності, когерентні структури, порушення когерентності.

Трохимчук Петр, Дмитрук Ирина. Проблема когерентности в современной теоретической физике. Обсуждается проблема когерентности в современной теоретической физике. Проанализированы классическая и квантовая концепции когерентности, включая принципы неопределенности, принципы неопределенности Гейзенберга, Робертсона, Гейзенберга-Робертсона и Шредингера-Робертсона, а также применение принципа неопределенности Шредингера-Робертсона для решения задачи о нелинейном математическом маятнике. Проблема когерентности в релаксационной оптике представлена как проблема образования и изменения когерентных структур. Проанализирована классификация когерентних структур, что соответствует классификации явлений необратимого взаимодействия оптического излучения с веществом, что положена в основу релаксационной оптики. Исследованы проблемы нарушения когерентности, включая фазовую когерентность, и их применение в современной физике, релаксационной оптике.

Ключевые слова: когерентность, теоретическая физика, релаксационная оптика, принцип Рэлея, принципы неопределенности, когерентные структуры, нарушения когерентности.

Стаття надійшла до редколегії
15.05.2013 р.

УДК 538.9

Павло Шигорін, Ірина Дмитрук

Проблема власних функцій та власних значень у теорії нерівноважних процесів у конденсованому бозе-газі

У роботі досліджено задачу на власні функції та власні значення оператора лінеаризованого інтеграла зіткнень квантового кінетичного рівняння Больцмана для моделі слабконеідеального бозе-газу за наявності в ньому бозе-конденсату. Побудовано перші вісім ортогоналізованих та нормованих власних функцій і розраховано відповідні власні значення. Показано, що перші три власні значення дорівнюють нулю. Розглянуто можливості застосування системи власних функцій опертора лінеаризованого інтеграла зіткнень для теоретичного опису слабконерівноважних процесів у бозе-газі за наявності конденсату, зокрема для опису звукових хвиль, розрахунку кінетичних коефіцієнтів в'язкості та теплопровідності тощо.

Ключові слова: бозе-газ, квантове кінетичне рівняння Больцмана, лінеаризований інтеграл зіткнень, метод Ван Чан-Уленбека.

Постановка наукової проблеми та її значення. Основне рівняння кінетичної теорії газів – це рівняння Больцмана [7]. Властивості розв'язків цього рівняння для різних моделей досліджувались у роботах низки авторів, зокрема [4; 5; 12; 15]. Рівняння Больцмана також є квазікласичною основою теоретичного опису явищ переносу електронів у твердих тілах і плазмі, нейтронів у ядерних реакторах, фононів у квантових рідинах та газах. Кількість і різноманітність робіт, присвячених кінетичному рівнянню Больцмана, показує його цінність та важливість.

Рівняння Больцмана є нелінійним інтегро-диференціальним рівнянням, яке описує часову еволюцію функції розподілу $f\left(\vec{r},\vec{\upsilon},t\right)$ молекул газу:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\vec{\upsilon}\,\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}+\vec{a}\,\frac{\partial f}{\partial \vec{\upsilon}}=\int d\vec{\upsilon}_1\int d\Omega \vec{g} I\left(\vec{g},\theta\right)\left(f' f_1'-ff_1\right), \tag{1}$$

де штрихи та індекси при f стосуються відповідних швидкостей: до зіткнення швидкості частинок були $\left(\vec{\upsilon},\vec{\upsilon}_1\right)$, після – $\left(\vec{\upsilon}',\vec{\upsilon}_1'\right)$; $\vec{g}$ – відносна швидкість, яка не змінюється в результаті зіткнення; $I\left(\vec{g},\theta\right)$ – диференціальний переріз розсіювання під час зіткнень.

З огляду на складну математичну структуру рівняння Больцмана, його розв'язок можна отримати лише за допомогою наближених та численних методів. Спосіб розв'язку кінетичного рівняння Больцмана для систем, нескінченно близьких до стану рівноваги, ґрунтується на застосуванні процедури лінеаризації. У цьому випадку можемо записати функцію розподілу у вигляді:

$$f\left(\vec{r},\vec{\upsilon},t\right)=f^{(0)}\left(\vec{r},\vec{\upsilon}\right)\left[1+h\left(\vec{r},\vec{\upsilon},t\right)\right], \tag{2}$$

де $f^{(0)}\left(\vec{r},\vec{\upsilon}\right)$ – рівноважна функція розподілу Максвела – Больцмана, $h\left(\vec{r},\vec{\upsilon},t\right)<<1$ – мала поправка до функції розподілу. Підстановка співвідношення (2) у рівняння Больцмана зводить його до лінеаризованої форми.

Лінеаризоване інтегро-диференціальне рівняння еквівалентне лінійному еволюційному матричному рівнянню:

$$\frac{d\phi}{dt}=-C\cdot\phi. \tag{3}$$

Рівняння (3) розв'язується за допомогою системи власних значень λ_n та власних функцій ϕ_n матриці C. Власні значення дійсні, якщо матриця C симетрична. Тоді власні вектори задовольняють умову:

$$C\cdot\phi_n=\lambda_n\phi_n \text{ і } \phi_m\cdot\phi_n=\begin{cases}1, n=m,\\ 0, n\neq m.\end{cases}$$

Ці властивості допомагають нам записати розв'язок (3) у вигляді:

$$\phi(t)=\sum_n\left(\phi_n\cdot\phi(0)\right)e^{-\lambda_n t}\phi_n \tag{4}$$

за умови, що вектор основного стану $\phi(0)$, власні значення λ_n та власні функції ϕ_n відомі.

Такий спосіб дослідження лінеаризованого кінетичного рівняння Больцмана запропоновано в роботі Ван Чан та Уленбека 1952 року [16], у якій вони розв'язали задачу на власні значення й функції лінеаризованого оператора зіткнень для моделі «максвелівського» газу.

Загальну схему цього методу проілюструємо на прикладі опису звуку в газах, вважаючи останній процесом поширення періодичного збурення густини. Розглядаючи малі відхилення від стану рівноваги, досліджується розв'язок лінеаризованого кінетичного рівняння Больцмана у вигляді плоских хвиль. У цьому випадку кінетичне рівняння зводиться до інтегрального рівняння для амплітуд плоских хвиль. Для його розв'язку слід розкласти амплітуди хвиль за власними функціями лінеаризованого оператора зіткнень. Підстановка таких розкладів в інтегральне рівняння перетворює його на систему алгебричних рівнянь для коефіцієнтів розкладу. Дисперсійне співвідношення між частотою та хвильовим числом у неявному вигляді – умова існування нетривіального розв'язку системи алгебричних рівнянь. Цією умовою є рівність нулю детермінанта, складеного з коефіцієнтів при невідомих. Таким чином удається теоретично дослідити процес поширення звукових хвиль, описати ефекти їх згасання, обчислити коефіцієнти переносу (в'язкість, теплопровідність).

Як уже згадувалося раніше, рівняння Больцмана є застосовним не тільки для опису класичних газів, воно також використовується й для теоретичного дослідження квантових багаточастинкових систем, зокрема до вироджених квантових рідин та газів [10; 11; 8; 14; 13; 18]. Останні викликають значний інтерес у дослідників завдяки квантовим ефектам, що проявляються в них на макроскопічному рівні (наприклад вихрові нитки в надплинному гелії-4 та надпровіднику другого роду, коливання та інтерференція атомарних бозе-конденсатів, тунелювання атомів між конденсатами).

Оскільки вивід рівняння Больцмана ґрунтується на динаміці класичних парних зіткнень, то для розширення сфери його застосування, зокрема для вироджених квантових систем, макроскопічні властивості яких мають низку суттєвих відмінностей, порівняно із випадком «максвелівського» газу [9, с. 1], потрібно сконструювати квантовий аналог цього рівняння — квантове кінетичне рівняння Больцмана (ККРБ) [17]. Побудова ККРБ заснована на концепції Боголюбова ієрархії часів [6], згідно з якою процес установлення рівноваги для збуреної системи відбувається в кілька етапів, час кожного з яких різний. На кожному з етапів число параметрів, необхідних для опису системи, зменшується, що дає змогу зосередитися на еволюції кількох параметрів і не розглядати багаточастинкову задачу.

Мета цієї роботи — дослідити задачу на власні функції та власні значення оператора лінеаризованого інтеграла зіткнень квантового кінетичного рівняння Больцмана для моделі слабконеідеального бозе-газу за наявності в ньому бозе-конденсату.

Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів дослідження. Динаміка конденсату та надконденсату описується квантовим кінетичним рівнянням Больцмана (ККРБ) [17]:

$$i\hbar\frac{\partial\Phi(\vec{r},t)}{\partial t}+\frac{\vec{p}}{m}\cdot\nabla f(\vec{p},\vec{r},t)-\nabla V_{eff}(\vec{r},t)\cdot\nabla_{\vec{p}}f(\vec{p},\vec{r},t)=C_{22}[f]+C_{12}[f,\Phi]. \qquad (5)$$

У правій частині цього рівняння записаний інтеграл зіткнень, що складається з двох доданків: $C_{22}[f]$ та $C_{12}[f,\Phi]$.

$$C_{12}[f,\Phi]=\frac{2g^2n_c}{(2\pi)^2\hbar^4}\int d\vec{p}_1\int d\vec{p}_2\int d\vec{p}_3\delta(m\vec{\upsilon}_c+\vec{p}_1-\vec{p}_2-\vec{p}_3)\delta(\tilde{\varepsilon}_c+\tilde{\varepsilon}_{p1}-\tilde{\varepsilon}_{p2}-\tilde{\varepsilon}_{p3})\times$$
$$\times[\delta(\vec{p}-\vec{p}_1)-\delta(\vec{p}-\vec{p}_2)-\delta(\vec{p}-\vec{p}_3)][(1+f_1)f_2f_3-f_1(1+f_2)(1+f_3)],$$
$$C_{22}[f]=\frac{2g^2}{(2\pi)^5\hbar^7}\int d\vec{p}_2\int d\vec{p}_3\int d\vec{p}_4\delta(\vec{p}+\vec{p}_2-\vec{p}_3-\vec{p}_4)\delta(\tilde{\varepsilon}_p+\tilde{\varepsilon}_{p2}-\tilde{\varepsilon}_{p3}-\tilde{\varepsilon}_{p4})\times$$
$$\times[(1+f)(1+f_2)f_3f_4-ff_2(1+f_3)(1+f_4)].$$

Тут

$$f=f(\vec{p},\vec{r},t),\quad f_i=f(\vec{p}_i,\vec{r},t),\quad \tilde{\varepsilon}_c=\mu_c+\frac{m\upsilon_c^2}{2},\quad \tilde{\varepsilon}_{p_i}=\frac{p_i^2}{2m}+V_{eff}.$$

Перший доданок описує двочастинкові зіткнення між збудженими атомами надконденсату, тоді як другий – зіткнення між атомами надконденсату, які «захопили» один атом конденсату. Обидва ці інтеграли забезпечують виконання законів збереження числа частинок, енергії та імпульсу. Інтеграл зіткнень $C_{22}[f]$ водночас забезпечує збереження числа атомів у конденсаті, $C_{12}[f,\Phi]$ описує взаємодію атомів конденсату та надконденсату, тобто можливі переходи із конденсату в теплову хмарину й навпаки. Позначення $C_{22}[f]$ та $C_{12}[f,\Phi]$ були запроваджені Кіркпатріком і Дорфманом у роботі, присвяченій кінетиці квазічастинок у моделі слабконеідеального бозе-газу [10].

Лінеаризуємо ККРБ (5) поблизу рівноважного стану, який характеризується параметрами:

n_{c0} – рівноважна густина конденсату;

$\tilde{n}_0$ – рівноважна густина теплової хмарини;

$\vec{\upsilon}_{c0}=0$ – швидкість конденсату.

Покладаючи $\delta f(\vec{p}_i,\vec{r},t)=f_{0i}(1+f_{0i})h_i$, де h — мала поправка до функції розподілу $f(\vec{p},\vec{r},t)$, отримуємо лінеаризований інтеграл зіткнень $C_{22}[f]$:

$$\widetilde{L}_{22}[h]=\frac{8g^2m^2}{\pi^5\hbar^7}\left(\frac{m}{\beta}\right)^{3/2}\int d\vec{c}_2\int d\vec{c}_3\int d\vec{c}_4\delta(\vec{c}+\vec{c}_2-\vec{c}_3-\vec{c}_4)\delta(c^2+c_2^2-c_3^2-c_4^2)\times$$

$$\times f_{02}(1+f_{03})(1+f_{04})[h_4+h_3-h_2-h]. \qquad (6)$$

$\vec{c}=\sqrt{\frac{\beta}{2m}}\vec{p}$, $\tau=\sqrt{\frac{\beta}{2m}}t$ – безрозмірні швидкість та час.

Коли має місце дифузійна рівновага між конденсатом і надконденсатом, лінеаризованим інтегралом зіткнень $C_{12}[f,\Phi]$ можна знехтувати [15].

Таким чином лінеаризоване ККРБ для моделі слабконеідеального бозе-газу за наявності конденсату має вигляд:

$$(1+f_0)\left(\frac{\partial h}{\partial t}+\vec{c}\cdot\nabla\left(h-2\beta g\left(\delta n_c+\delta\tilde{n}\right)\right)\right)=\widetilde{L}_{22}[h], \qquad (7)$$

де n_c – густина атомів конденсату, $\tilde{n}$ – густина теплової хмарини (надконденсату), $f_0=\frac{1}{e^{c^2-\alpha}-1}$ – рівноважна функція розподілу $\alpha=\beta\mu_{0c}$.

Для подальшого дослідження, згідно з методом Ван Чан та Уленбека [16], потрібно розглянути власні функції ψ_l лінеаризованого інтеграла зіткнень $\widetilde{L}_{22}[h]$ (6):

$$\widetilde{L}_{22}[\psi_l]=\lambda_l\psi_l,$$

де λ_l – власне значення.

З огляду на структуру інтеграла зіткнень можемо записати перші вісім власних функцій [16]:

$$\phi_1=1,\ \phi_2=c_z,\ \phi_3=c^2,$$

$$\phi_4=(3c_z^2-c^2),\ \phi_5=\left(c^2-\frac{5}{2}\right)c_z,$$

$$\phi_6=5c_z^3-c^2c_z,\ \phi_7=(3c_z^2-c^2)\left(\frac{7}{2}-c^2\right),\ \phi_8=\left(\frac{15}{14}-5c^2+c^4\right).$$

Три власні значення, яким відповідають власні функції 1, c_z та $\vec{c}^{\,2}$, дорівнюють нулю. Це пов'язане з існуванням законів збереження числа частинок, імпульсу й енергії, які виконуються при зіткненнях частинок. Наступні власні значення відмінні від нуля [16].

Побудуємо лінійні комбінації власних функцій, які будуть ортонормовані з вагою $f_0(1+f_0)$. Нормовані власні функції позначимо через ψ_l. Визначимо їх співвідношенням:

$$\psi_l=\frac{\phi_l}{\|\phi_l\|},$$

де $\|\phi_l\|^2=\frac{1}{\pi^{3/2}\Lambda^3}\int d\vec{c}f_0(1+f_0)|\phi_l|^2$, Λ — довжина теплової хвилі де Бройля.

Маємо

$$\|\phi_1\|^2 = \frac{g_{1/2}(\alpha)}{\Lambda^3}.$$

При встановленні цього співвідношення ми скористалися визначенням g-функції Бозе-Айнштайна:

$$g_{(2n+1)/2}(\alpha) = \frac{2^n}{(2n-1)!!\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \frac{x^{(2n-1)/2}}{e^{x-\alpha}-1}$$

та співвідношеннями:

$$\frac{dg_n(\alpha)}{d\alpha} = g_{n-1}(e^\alpha),$$

$$f_0(1+f_0) = \frac{df_0}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\frac{1}{e^{c^2-\alpha-\beta V_{eff}^0}-1}.$$

Таким чином:

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{\Lambda^3}{g_{1/2}(e^\alpha)}}.$$

Аналогічно знаходимо ψ_2, ψ_4 та ψ_6.

Для того, щоб забезпечити ортогональність третьої, п'ятої, сьомої та восьмої функцій до решти, їх слід вибрати у вигляді:

$$\tilde{\phi}_3 = \phi_3 - \langle\phi_3|\psi_1\rangle\psi_1 = c^2 - \frac{3}{2}\frac{g_{3/2}(e^\alpha)}{g_{5/2}(e^\alpha)},$$

$$\tilde{\phi}_5 = \phi_5 - \langle\phi_5|\psi_2\rangle\psi_2 = \left(c^2 - \frac{15}{6}\frac{g_{5/2}(e^\alpha)}{g_{3/2}(e^\alpha)}\right)c_z,$$

$$\tilde{\phi}_7 = \phi_7 - \langle\phi_7|\psi_4\rangle\psi_4 = \left(3c_z^2 - c^2\right)\left(\frac{7}{2}\frac{g_{7/2}(e^\alpha)}{g_{5/2}(e^\alpha)} - c^2\right),$$

$$\tilde{\phi}_8 = \phi_8 - \langle\phi_8|\psi_3\rangle\psi_3 - \langle\phi_8|\psi_1\rangle\psi_1 =$$

$$= \frac{12c^4 g_{3/2}^2(e^\alpha) + 75 g_{5/2}^2(e^\alpha) - 15 g_{3/2}(e^\alpha)\left(2c^2 g_{5/2}(e^\alpha) + 7 g_{7/2}(e^\alpha)\right) + g_{1/2}(e^\alpha)\left(-20c^4 g_{5/2}(e^\alpha) + 70c^2 g_{7/2}(e^\alpha)\right)}{4\left(3g_{3/2}^2(e^\alpha) - 5g_{1/2}(e^\alpha)g_{5/2}(e^\alpha)\right)}.$$

Явні вирази для власних функцій подано в таблиці 1. Ці функції ортогональні, оскільки виконується умова:

$$\langle\psi_l|\psi_n\rangle = \frac{1}{\pi^{3/2}\Lambda^3}\int d\vec{c} f_0(1+f_0)\psi_l\psi_n = 0.$$

Таблиця 1

Ортонормовані власні функції оператора зіткнень

$\psi_1 = \sqrt{\dfrac{\Lambda^3}{g_{1/2}\left(e^{\alpha}\right)}}$
$\psi_2 = \sqrt{\dfrac{2\Lambda^3}{g_{3/2}\left(e^{\alpha}\right)}}c_z$
$\psi_3 = \sqrt{\dfrac{4\Lambda^3 g_{1/2}\left(e^{\alpha}\right)}{3\left(5g_{5/2}\left(e^{\alpha}\right)g_{1/2}\left(e^{\alpha}\right)-3g_{3/2}^2\left(e^{\alpha}\right)\right)}}\left(c^2-\dfrac{3}{2}\dfrac{g_{3/2}\left(e^{\alpha}\right)}{g_{1/2}\left(e^{\alpha}\right)}\right)$
$\psi_4 = \sqrt{\dfrac{\Lambda^3}{3g_{5/2}\left(e^{\alpha}\right)}}\left(3c_z^2-c^2\right)$
$\psi_5 = \sqrt{\dfrac{24}{5}\dfrac{\Lambda^3 g_{3/2}\left(e^{\alpha}\right)}{21g_{7/2}\left(e^{\alpha}\right)g_{3/2}\left(e^{\alpha}\right)-15g_{5/2}^2\left(e^{\alpha}\right)}}\left(c^2-\dfrac{5}{2}\dfrac{g_{5/2}\left(e^{\alpha}\right)}{g_{3/2}\left(e^{\alpha}\right)}\right)c_z$
$\psi_6 = \sqrt{\dfrac{2}{15}\dfrac{\Lambda^3}{g_{7/2}\left(e^{\alpha}\right)}}\left(5c_z^3-c^2c_z\right)$
$\psi_7 = \sqrt{\dfrac{16}{21}\dfrac{\Lambda^3}{\left(7\dfrac{g_{7/2}^2\left(e^{\alpha}\right)}{g_{5/2}\left(e^{\alpha}\right)}+36g_{9/2}\left(e^{\alpha}\right)\right)}}\left(3c_z^2-c^2\right)\left(\dfrac{7}{2}\dfrac{g_{7/2}^2\left(e^{\alpha}\right)}{g_{5/2}\left(e^{\alpha}\right)}-c^2\right)$
$\psi_8 = \sqrt{\dfrac{16}{15}\dfrac{\Lambda^3\left(3g_{3/2}^2\left(e^{\alpha}\right)-5g_{1/2}\left(e^{\alpha}\right)g_{5/2}\left(e^{\alpha}\right)\right)}{\left(75g_{5/2}^3\left(e^{\alpha}\right)-105g_{5/2}\left(e^{\alpha}\right)\left(2g_{3/2}\left(e^{\alpha}\right)g_{7/2}\left(e^{\alpha}\right)+3g_{1/2}\left(e^{\alpha}\right)g_{9/2}\left(e^{\alpha}\right)\right)+7\left(35g_{1/2}\left(e^{\alpha}\right)g_{7/2}^2\left(e^{\alpha}\right)+27g_{3/2}^2\left(e^{\alpha}\right)g_{9/2}\left(e^{\alpha}\right)\right)\right)}}\times$ $\times\dfrac{12c^4g_{3/2}^2\left(e^{\alpha}\right)+75g_{5/2}^2\left(e^{\alpha}\right)-15g_{3/2}\left(e^{\alpha}\right)\left(2c^2g_{5/2}\left(e^{\alpha}\right)+7g_{7/2}\left(e^{\alpha}\right)\right)+g_{1/2}\left(e^{\alpha}\right)\left(-20c^4g_{5/2}\left(e^{\alpha}\right)+70c^2g_{7/2}\left(e^{\alpha}\right)\right)}{4\left(3g_{3/2}^2\left(e^{\alpha}\right)-5g_{1/2}\left(e^{\alpha}\right)g_{5/2}\left(e^{\alpha}\right)\right)}$

Власні значення знаходимо за формулою:

$$\lambda_l = \frac{1}{\pi^{3/2}\Lambda^3}\int f_0\left(1+f_0\right)\tilde{L}_{22}[\psi_l]\psi_l d\vec{c}, \qquad (8)$$

де

$$\tilde{L}_{22}[\psi_l] = \frac{8g^2m^2}{\pi^5\hbar^7}\left(\frac{m}{\beta}\right)^{3/2}\int d\vec{c}_2\int d\vec{c}_3\int d\vec{c}_4\,\delta\left(\vec{c}+\vec{c}_2-\vec{c}_3-\vec{c}_4\right)\delta\left(c^2+c_2^2-c_3^2-c_4^2\right)\times$$
$$\times f_0\left(c_2\right)\left(1+f_0\left(c_3\right)\right)\left(1+f_0\left(c_4\right)\right)\left[\psi_l\left(\vec{c}_4\right)+\psi_l\left(\vec{c}_3\right)-\psi_l\left(\vec{c}_2\right)-\psi_l\left(\vec{c}\right)\right].$$

Власні значення (8) і власні функції, подані в таблиці 1, використовуються для опису процесу поширення звуку в бозе-газі за наявності в ньому конденсату.

Як зазначено вище, дисперсійне співвідношення між хвильовим числом та частотою звукової хвилі можна отримати, розглядаючи детермінант, складений із коефіцієнтів при невідомих. Він має нескінченний порядок.

Розглядаючи нульові власні значення, які відповідають трьом першим власним функціям, отримуємо розв'язок у нульовому наближенні, яке описує незгасаючі коливання. Відповідні вирази отримано авторами в роботі [2]. Поправки, що описують згасання звуку та коефіцієнти в'язкості й теплопровідності, можна одержати, якщо враховувати наступні два ненульові власні значення й відповідні перші п'ять власних функцій. Також наступне наближення отримуємо, використовуючи перші вісім власних функцій.

Висновки й перспективи подальших досліджень. У роботі розглянуто задачу на власні функції та власні значення лінеаризованого оператора зіткнень ККРБ. Знайдено перші власні функції й власні значення, використовуючи які, отримуємо розв'язок ККРБ у відповідному наближенні.

Розглядаючи нульові власні значення, що відповідають трьом першим власним функціям, отримуємо розв'язок у нульовому наближенні для незгасаючих коливань. Урахування також наступних двох ненульових власних значень і, відповідно, перших п'яти власних функцій дає поправки, що описують згасання звуку й коефіцієнти переносу (в'язкість та теплопровідність). Використання перших восьми власних функцій дасть змогу описати поширення звуку в наступному наближенні.

Роботу виконано за сприяння Міністерства освіти і науки України (держбюджетна тема №0113U002220).

Джерела та література

1. Свідзинський А. В. Математичні методи теоретичної фізики : підручник. – Вид. 4-те, доповн. і переробл : у 2-х т. / А. В. Свідзинський. – К. : Ін-т теорет. фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України, 2009. – Т. 2. – 436 с.
2. Шигорін П. П. Акустичні моди у виродженому бозе-газі / П. П. Шигорін, І. П. Дмитрук // УФЖ. – 2013 (подано до друку).
3. Arahat E., Nikuni T. Propagation of First and Second Sound in a Highly-Elongated Trapped Bose Condensed Gas at Finite temperatures / E. Arahat, T. Nikuni // Phys. Rev. A – 2013. – Vol. 87. – P. 033610.
4. Bobylev A. On some properties of linear and linearized Boltzmann collision operators for hard spheres / A. Bobylev, E. Mossberg // Kinetic & Related Models. – 2008. – P. 521–555.
5. Bobylev A. V. On the self-similar asymptotics for generalized non-linear kinetic Maxwell models / A. V. Bobylev, C. Cercignani, I. M. Gamba // Commun. Mathematical Physics. – 2009. – P. 599–644.
6. Bogoliubov N. N. Studies in Statistical Mechanics / N. N. Bogoliubov. – Edited by J. de Boer and G. R. Uhlenbeck (North-Holland, Amsterdam, 1962. – Vol. 3.
7. Boltzmann L. Vorlesungen über Gastheorie, Ambroius Barth / L. Boltzmann. – Leipzig, 1912.
8. Gust Erich D. Transport coefficients from the Boson Uehling-Uhlenbeck Equation / Erich D. Gust, L. E. Reichl // Phys. Rev E. – 2013. – Vol. 87. – P. 042109–042117.
9. Huang K. Statistical Mechanics / K. Huang. – New York : John Wiley & Sons, 1983.
10. Kirkpatrick T. R. Transport in a dilute but condensed non-ideal Bose gas: Kinetic equations / T. R. Kirkpatrick, J. R. Dorfman // J. Low Temp. Phys. – 1985. – Vol. 58. – P. 301–331.
11. Kirkpatrick T. R. Time correlation functions and transport coefficients in a dilute superfluid / T. R. Kirkpatrick, J. R. Dorfman // J. Low Temp. Phys. – 1985. – Vol. 59. – P. 1–18.
12. Mouhot C. Spectral gap and coercivity estimates for linearized Boltzmann collision operators without angular cutoff / C. Mouhot, R. M. Strain // J. Math Pures Appl. – 2007. – P. 515.
13. Nikuni T. Landau-Khalatnikov two-fluid hydrodynamics of a trapped Bose gas / T. Nikuni, A. Griffin // Phys. Rev A. – 2001. – Vol. 63. – P. 033608–033628.
14. Semikoz D. V. Kinetics of Bose Condensation / D. V. Semikoz, I. I. Tkachev // Phys. Rev. Lett. – 1995. – Vol. 74. – P. 3093–3097.
15. Strain R. M. Exponential decay for soft potentials near Maxwellian / R. M. Strain; Y. Guo // Arch. Ration. Mech. Anal. – 2008. – Vol. 2. – P. 187.
16. Wang Chang C. S. On the propagation of sound in monatomic gases / C. S. Wang Chang, G. E. Uhlenbeck. – University of Michigan Press, 1952.
17. Zaremba E. Dynamics of Trapped Bose Gases at Finite Temperatures / E. Zaremba, T. Nikuni and A. Griffin // J. Low Phys. – 1999. – Vol. 116. – P. 277–345.
18. Zaremba E. Bose-Condensed Gases at Finite Temperatures / E. Zaremba, T. Nikuni and A. Griffin. – Cambridge : CambridgeUniversity Press, 2009.

Шигорин Павло, Дмитрук Ирина. Проблема собственных функций и собственных значений в теории неравновесных процессов в конденсированном бозе-газе. В работе исследована задача на собственные функции и собственные значения линеаризованного оператора столкновений квантового кинетического уравнения Больцмана. Рассчитано первые восемь собственных функций и построено их линейные комбинации, что позволяет путём последовательных приближений исследовать распространение волн первого и второго звуков, описать эффекты их поглощения, вычислить коэффициенты переноса (вязкость, теплопроводность). Учитывая структуру интеграла столкновений три первые собственные значения являются нулевыми. Это связано с существованием, законов сохранения числа частиц, импульса и энергии, которые выполняются при столкновениях частиц. Следующие собственные значения не равны нулю и являются отрицательными.

Ключевые слова: квантовое кинетическое уравнение Больцмана, линеаризованной интеграл столкновений, метод Ван Чан – Уленбека.

Shygorin Pavlo, Dmytruk Iryna. The Problem Eigenfunctions and Eigenvalues in the Theory of Nonequilibrium Processes in Condensed Bose Gas. In this paper we study the problem of eigenfunctions and eigenvalues for the linear collision operator of quantum kinetic Boltzmann equation. We calculated the first eight eigenfunctions and constructed their linear combinations, which allows through successive approximations to investigate the propagation of sound waves, to describe the effects of attenuation and to calculate transport coefficients (viscosity, thermal conductivity). Given the structure of the collision integral first three eigenvalues is zero. This is due to the existence of the laws of conservation of the number of particles, momentum and energy, which are performed in collisions of particles. The following eigenvalues are not equal to zero and are negative.

Key words: quantum kinetic Boltzmann equation, linearized collision integral, the method of Wang Chang – Uhlenbeck.

Стаття надійшла до редколегії
22.05.2013 р.