УДК 519.6

Валерій Кузьмич, Юрій Кузьмич

Про існування тетраедра із заданими довжинами ребер

Для трикутника відомі умови його існування при заданих сторонах. Для тетраедра такі умови авторам не відомі. У роботі запропоновано за умову існування тетраедра прийняти умову існування його об'єму. Існування тетраедра із заданими ребрами залежить від його орієнтації. Можливі 720 різних перестановок ребер тетраедра. Для кожної з них потрібно обчислювати об'єм тетраедра. Це громіздка робота, яку можна виконати за допо-могою комп'ютера.

Для обчислення об'єму тетраедра за його ребрами слід використати формулу об'єму і врахувати циклічну перестановку довжин ребер у цій формулі.

У статті описано роботу створеного авторами програмного засобу, який розв'язує поставлене вище завдання. Результатом роботи цього засобу є висновок про можливість існування тетраедра із заданими ребрами, вказано його об'єм для кожної з можливих перестановок ребер. У подальшому цю роботу можна використати для створення подібних програмних засобів для інших многогранників, які складаються зі скінченого числа тетраедрів.

Ключові слова: піраміда, об'єм, тетраедр, Юнгіус, калькулятор.

Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів дослідження. Загальновідома умова побудови трикутника з трьох відрізків: якщо довжина кожного з трьох відрізків менша за суму довжин двох інших (нерівність трикутника), то із цих відрізків можна побудувати трикутник, і навпаки, довжина кожної сторони трикутника менша за суму довжин двох інших сторін трикутника.

Іншим аналогом такої умови може слугувати умова існування відмінної від нуля площі трикутника, обчислена за довжинами трьох його сторін. Цю площу можна обчислити за відомою формулою Герона:

$$s = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)},$$

де $\boldsymbol{a}$, b, c – довжини сторін трикутника. З цієї формули видно, що для існування відмінної від нуля площі трикутника потрібно й достатньо, щоб кожна з його сторін була менша за суму двох інших.

У той час як для плоских фігур існують умови та правила їх побудови за допомогою простих засобів (лінійка, циркуль і таке інше), для просторових фігур, у зв' язку з важкістю просторової побудови, таких правил не встановлюють, тому в подальшому під можливістю побудови просторової фігури будемо розуміти можливість її існування за заданих параметрів.

Однією з найпростіших просторових фігур є трикутна піраміда (тетраедр). За Евклідом піраміда (зокрема тетраедр) − це тілесна фігура, що лежить між площинами й поставлена від однієї площини до однієї точки. Ще з часів Платона многогранники розглядались як порожнинні (нічим незаповнені) просторові фігури, що складаються лише з ребер. Арістотель розрізняв порожнинні многогранники й заповнені. Причому ці многогранники він розглядав як різні предмети. Евклід розглядав многогранники як заповнені, хоча й не вказував на те, чим вони заповнені, оскільки античні математики не використовували формального поняття простору [1, 164].

Для тетраедра умови його побудови за довжинами всіх його ребер авторам невідомі. Однією з таких умов, на нашу думку, могла б слугувати умова існування відмінного від нуля об' єму тетраедра, ребрами якого є шість заданих відрізків. Таку формулу об' єму тетраедра отримав німецький математик Іоахім Юнгіус (Joachim Jungius, 1587−1657), і тому встановлена ним відповідна формула носить назву формули Юнгіуса [2, 100]. Однак при побудові тетраедра із заданих відрізків, як показують конкретні приклади, порушується однозначність при обчисленні його об' єму і навіть може бути поставлене під сумнів саме існування такого тетраедра. Безпосереднє обчислення об' єму тетраедра при різних можливих варіантах вибору його ребер наштовхується на велику кількість обчислень (720 різних перестановок відрізків) за досить складною формулою Юнгіуса.

У цій статті описано роботу розробленого авторами калькулятора, призначеного для циклічного обчислення об' єму тетраедра за відомими довжинами його ребер при різноманітних їх перестановках. Результати роботи калькулятора дають відповіді на питання про існування тетраедра із заданими ребрами та про його об' єм.

Нехай задано тетраедр *SABC* (рис. 1), довжини ребер якого позначимо:

$$AB = a_1,\ AS = a_2,\ AC = a_3,\ BS = a_4,\ BC = a_5,\ CS = a_6;$$

об' єм тетраедра *SABC* позначимо через υ.

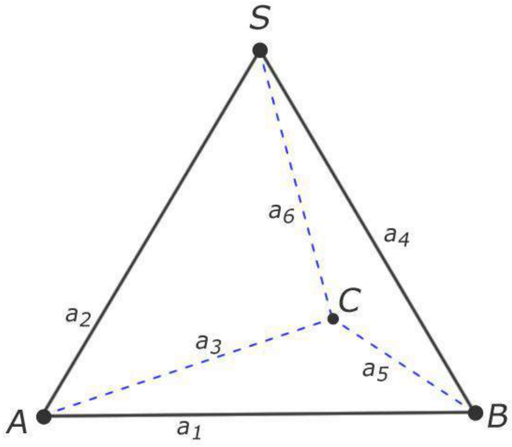

Рис. 1. **Тетраедр**

При таких позначеннях формула Юнгіуса матиме вигляд:

$$\upsilon^2 = \frac{1}{144}\Big(a_1^2 a_6^2\left(a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_1^2 - a_6^2\right)\Big) + a_2^2 a_5^2\left(a_1^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_6^2 - a_2^2 - a_5^2\right) +$$

$$+ a_3^2 a_4^2\left(a_1^2 + a_2^2 + a_5^2 + a_6^2 - a_3^2 - a_4^2\right) - a_2^2 a_3^2 a_6^2 - a_1^2 a_3^2 a_5^2 - a_1^2 a_2^2 a_4^2 - a_4^2 a_5^2 a_6^2 .$$

Звичайні обчислення з конкретними числовими даними показують, що для одних і тих же шести відрізків, при певних їх перестановках, об' єм тетраедра, побудованого з цих відрізків існує, а при інших перестановках може не існувати. Причому для окремих трійок цих відрізків може не виконуватись нерівність трикутника (тобто побудувати з них трикутник неможливо), однак тетраедр може мати в цьому випадку об' єм. Наприклад, при $a_1 = a_3 = a_5 = 1$ і $a_2 = a_4 = a_6 = 3$, за формулою Юнгіуса матимемо: $\upsilon = \frac{\sqrt{26}}{12}$. У той же час, $a_2 = 3 > a_1 + a_3 = 2$.

З іншого боку, виконання нерівності трикутника для будь-якої трійки із шести даних відрізків не завжди забезпечує існування об'єму тетраедра побудованого з цих відрізків. Наприклад, при $a_1 = a_3 = a_5 = 1$, $a_2 = a_4 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ і $a_6 = \frac{1}{2}$ вираз у правій частині рівності Юнгіуса буде від' ємним: $\upsilon^2 = -\frac{13}{144^2}$. У той же час нерівність трикутника виконується для будь-яких трьох відрізків із шести заданих, оскільки вона виконується для найбільшого за довжиною відрізка a_3, і двох найменших за довжиною відрізків a_2 і a_6. Справді, знаходимо: $a_2 + a_6 = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \approx 1,07$. З іншого боку, $a_3 = 1$. Отже, $a_2 + a_6 > a_3$.

Крім того, при одному й тому ж наборі відрізків із них можна побудувати тетраедри різного об' єму. Наприклад, при $a_1 = a_3 = a_5 = 2$ і $a_2 = a_4 = a_6 = 3$ матимемо: $\upsilon = \frac{\sqrt{23}}{3}$. Якщо ж навпаки: $a_1 = a_3 = a_5 = 3$ і $a_2 = a_4 = a_6 = 2$, то $\upsilon = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

З наведених прикладів можна зробити висновок, що при заданих довжинах ребер тетраедра його об' єм буде залежати від орієнтації тетраедра.

Для перевірки можливості побудови тетраедра за шістьма заданими відрізками, як за усіма його ребрами, можна використати формулу Юнгіуса. Для цього потрібно занумерувати відрізки відповідно до зроблених у цій роботі позначень і обчислити праву частину формули Юнгіуса. Якщо права частина формули не додатна, то тетраедр з таким чином занумерованих відрізків побудувати неможливо, якщо ж вона додатна, то тетраедр побудувати можливо. Трудність застосування цього прийому полягає у великій кількості варіантів нумерації відрізків, це кількість перестановок шести елементів − 720. Тому для випадку конкретних числових значень довжин відрізків у пригоді може стати розроблений авторами калькулятор, запрограмований на циклічне обчислення правої частини формули Юнгіуса.

Ознайомитись із роботою цього калькулятора або використати його для обчислень, можна за адресою: http://ksuonline.ksu.ks.ua/mod/resource/view.php?id=2645

Зрозуміло, що в більшості випадків калькулятор дає наближені значення правої частини формули Юнгіуса, тому у випадку, коли отримано значення достатньо близьке до нуля (додатне чи від' ємне), потрібно окремо дослідити цей випадок, підвищивши при цьому точність обчислень.

На рис. 2 представлено робоче поле калькулятора, за допомогою якого розраховується об' єм тетраедра за всіх можливих перестановок його ребер. На калькуляторі можливо отримати як усі можливі 720 результатів обчислення правої частини формули Юнгіуса, так і відфільтрувати лише додатні, нульові або від' ємні її значення.

Для обчислення правої частини формули Юнгіуса достатньо ввести на лівій частині робочого поля калькулятора у відповідні поля значення довжин ребер тетраедра: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, потім вибрати потрібний набір значень квадрату об' єму (усі значення, додатні, нульові або від' ємні) і активізувати кнопку «розрахунок» (рис. 2). При цьому в правій частині робочого поля по закінченні обчислень з' явиться повідомлення «Розрахунок завершено» і будуть наведені всі отримані результати обчислень, із вказівкою про неможливість існування тетраедра у випадку нульового або від' ємного значень квадрата об' єму, а також із вказівкою кількості усіх результатів. Квадрат об' єму тетраедра позначено через v2, а сам об' єм через v.

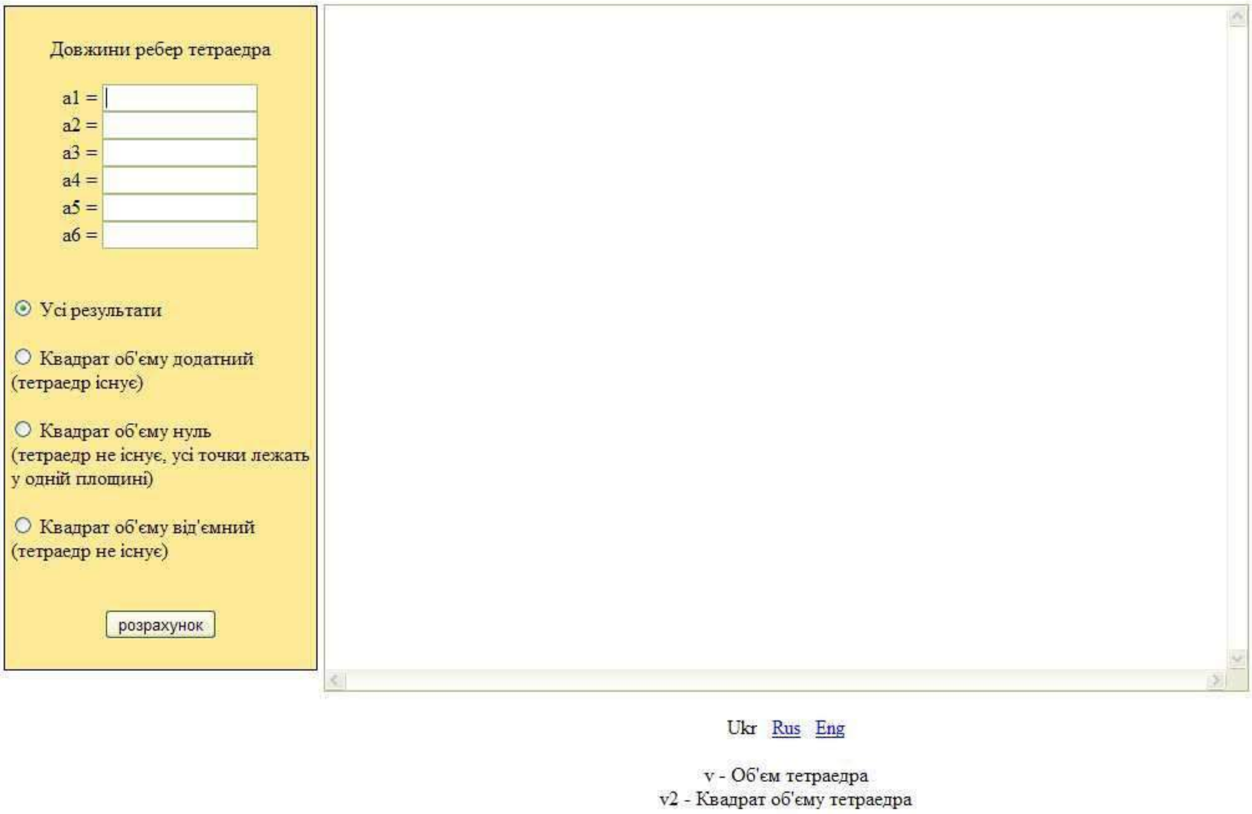

Рис. 2. **Робоче поле калькулятора**

У випадку нульового значення об' єму тетраедра можна зробити висновок про те, що всі чотири точки належать одній площині, тобто калькулятор можна використати і для вивчення взаємного положення точок у просторі.

У калькуляторі передбачено повідомлення системи про некоректність вводу даних: «Введіть значення an» – у випадку незаповненого поля «an», та «Значення an некоректне (s). Для дробових чисел використовуйте крапку» – у випадку заповнення поля «an» не цифровим значенням «s», або при використанні коми в запису дробового числа.

Як видно з рис. 3, при певному виборі ребер можливі додатні, від' ємні, а також нульові значення квадрата об' єму тетраедра.

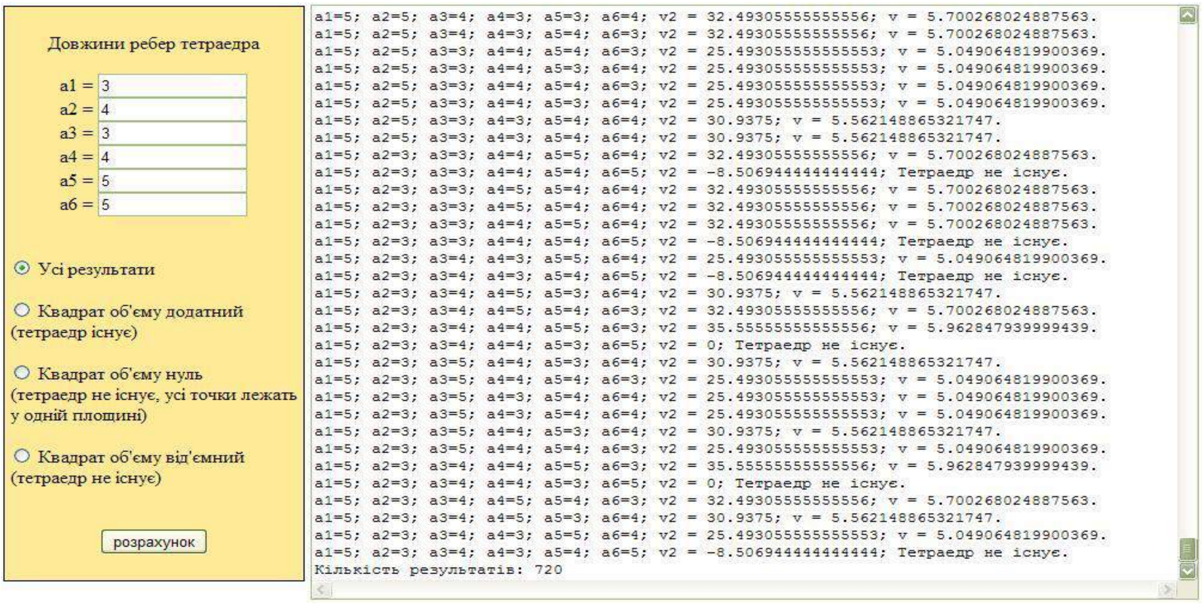

Рис. 3. **Результати обчислень**

Робота калькулятора при конкретних числових значеннях довжин ребер тетраедра вказує на те, що для стереометричних задач, пов' язаних із тетраедром важливе значення має його орієнтація в просторі, від цього може залежати значення окремих елементів та характеристик тетраедра.

На відміну від рівновеликих многокутників, які є рівно складеними (будь-який із двох рівновеликих многокутників можна розрізати на скінчену кількість частин, із яких можна скласти другий многокутник), рівновеликі многогранники не завжди є рівно складеними. 1901 року це довів M. Dehn [3, 6]. Отже, він дав відповідь на третю проблему Гільберта [4, 28].

Висновки та перспективи подальших досліджень. У подальшому цю роботу можна використати для створення подібних калькуляторів для інших многогранників, які складаються зі скінченого числа тетраедрів.

Джерела та література

1. Начала Эвклида. Книги XI−XV. – М. ; Л. : Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1950. – 331 с.
2. Понарин Я. П. Элементарная геометрия : в 2 т. Т. 2: Стереометрия, преобразования пространства / Яков Петрович Понарин. – М. : МЦНМО, 2006. – 256 с.
3. Каган В. Ф. О преобразовании многогранников / В. Ф. Каган. – Одесса : Матезис, 1913. – 27 с.
4. Проблемы Гильберта : сборник / под общ. ред. П. С. Александрова. – М. : Наука, 1969. – 239 с.

Кузьмич Валерий, Кузьмич Юрий. О существовании тетраэдра с заданными длинами ребер. Для треугольника известны условия его существования при заданных сторонах. Для тетраэдра такие условия авторам неизвестны. В работе предлагается за условие существования тетраэдра принять условие существования его объема. Существование тетраэдра с заданными ребрами зависит от его ориентации. Возможны 720 различных перестановок ребер тетраэдра. Для каждой из них нужно вычислять объем тетраэдра. Это громоздкая работа, которую можно выполнить с помощью компьютера. Для вычисления объема тетраэдра по его ребрам следует использовать формулу объема и учесть циклическую перестановку длин ребер в этой формуле. В работе описано работу созданного авторами программного средства, которое решает поставленную выше задачу. Результатом работы этого средства является вывод о возможности существования тетраэдра с заданными ребрами, указан его объем для каждой из возможных перестановок ребер. Впоследствии эту работу можно использовать для создания подобных программных средств по вычислению объемов многогранников, состоящих из конечного числа тетраэдров.

Ключевые слова: пирамида, объем, тетраэдр, Юнгиус, калькулятор.

Kuzmich Valery, Kuzmich Yuriy. Existence of a Tetrahedron with Given Lengths of Edges. For a triangle known conditions of its existence at the given sides. For a tetrahedron such conditions the authors are unknown. We propose a condition for the existence of a tetrahedron to the condition of existence of its volume. The existence of a tetrahedron with prescribed edges depends on its orientation. 720 different possible permutations of edges of a tetrahedron. For each of them need to calculate the volume of a tetrahedron. This is a cumbersome job that can be done by computer.

To calculate the volume of a tetrahedron in his ribs should use the formula to take into account the volume and the cyclic permutation of the edge lengths in this formula.

The article describes the work of established authors software tool solves the above problem. The result of this means is the conclusion about the possibility of a tetrahedron with edges defined by specifying the amount for each of the possible permutations of the edges.

In the future, this work can be used to create similar software for other polyhedrons, which consist of a finite number of tetrahedron.

Key words: pyramid, volume, tetrahedron, Jungius, calculator.

Стаття надійшла до
редколегії
14.02.2013 р.