

ОБ ИЗОМОРФИЗМАХ СВОБОДНЫХ ПАРАТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

Доказується аналог теореми О. Г. Окунева о спеціальних ізоморфізмах для свободних паратопологічних груп, строится пример двух свободных базисов в свободной паратопологической группе, только один из которых есть компактным.

ABOUT ISOMORFIZMI OF FREE PARATOPOLOGICHNIKH GROUPS

In the paper we give a modification of the Okunev's theorem on special isomorphisms for paratopological groups. The example of two free basis in free paratopological group, whith only one of them being compact is given.

Стаття надійшла 01.12.09

УДК 534.12

О. М. Горечко, Р. Р. Горечко

Українська академія друкарства

**НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ПРО ВІБРАЦІЙНУ
ТЕРМОЧУТЛИВІСТЬ ПРЯМОКУТНОЇ ПАНЕЛІ
В ПРУЖНОМУ КОНСТРУКТИВІ**

Розглядається постановка задачі динаміки прямокутних пластин, закріплених у пружному конструктиві, при нагріванні окремих складових такої системи джерелами тепла. Температурна задача розв'язана методом теплового балансу. Власні частоти попередньо навантажених унаслідок нерівномірності нагріву чи неоднорідності пружних характеристик пластин знаходяться в припущенні про постійність температурних зусиль уздовж будь-якої з осей координат у площині пластини. Досліджено вплив нагріву однієї з пластин у стаціонарному та нестаціонарному режимах на зміну власних частот пластин системи.

Прямокутна пластина, вібрація, термопружність

Плоскі прямокутні панелі є одними з основних несучих елементів конструкцій в приладо- та машинобудуванні, будівництві [5, 7, 8]. Дослідження їхньої реакції на динамічні навантаження часто зводиться до аналізу резонансних властивостей систем, до складу яких входять такі панелі, чи їх окремих складових з метою уникнення небажаних резонансів або їх демпфування [4, 7]. Резонансні частоти пружних елементів конструкцій суттєво залежать від їх попереднього натягу (стиску) [5], що неминуче відбувається при нагріванні окремих складових пружних систем. Такий напружений стан може бути спричинений різницею температур складових системи, їх різними коефіцієнтами лінійного розширення тощо. Суттєвий вплив температурних напружень на вібраційні характеристики защемленої прямокутної пластини показано в праці [1].

У цій роботі розглядається постановка задачі динаміки прямокутних пластин, які складають основу пружної системи, при зміні температури однієї з них. У припущенні постійності температури кожної з пластин і зусиль, що діють уздовж будь-якої зі сторін пластин, знаходяться ці зусилля. У подальшому при аналізі власних частот кожна з пластин може розглядатися незалежно одна від одної в припущенні про попередній розтяг або стиск у її площині знайденими зусиллями.

Розглянемо спрощену систему, переріз якої схематично зображено на рис. 1. У центрі в площині xOy знаходиться пластина, позначена нулем, торці якої закріплені шарнірно щодо поворотів, але жорстко щодо переміщення в площині xOy , в елементах конструкції 1 та 2, котрі не є тонкостінними. Вони, у свою чергу, зістиковані з двома вважатимемо однаковими геометрично і механічно тонкими прямокутними пластинами 3 і 4. Зображену перерізом на рис. 1 конструкцію можна трактувати як тонку пружну пластину, закріплену в пружному корпусі з елементів 1–4. При нагріванні однієї з пластин (нехай це буде внутрішня пластина 0), незалежно від матеріалу, з якого виготовлено складові системи, та ідеальності чи неідеальності контакту між складовими, температура складових буде різною. Найбільший внесок у температурні напруження, що виникатимуть внаслідок цього, здійснюватимуть елементи найбільших габаритів. У даному випадку — це пластини 0, 3 і 4. Останнім етапом у процесі аналізу впливу нагрівання на вібраційні характеристики пластин є розрахунок власних частот початково навантажених пластин Кірхгофа [1, 5].

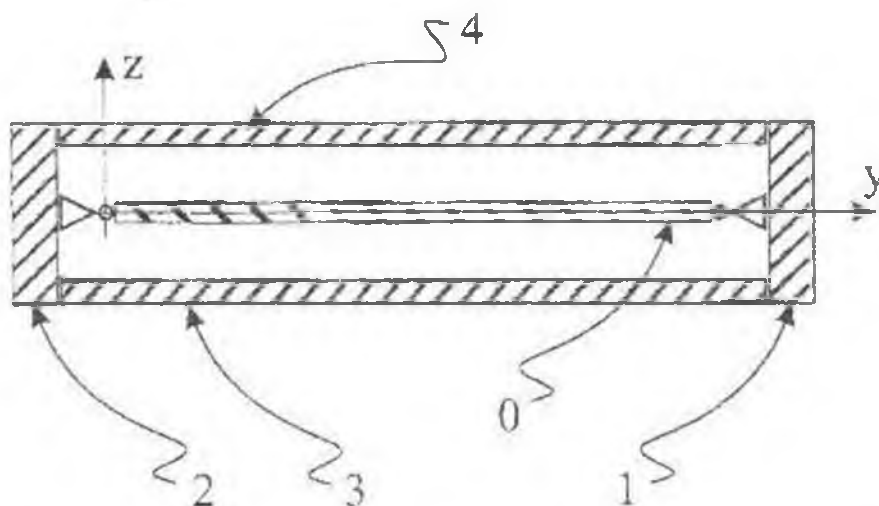


Рис. 1. Схематичне зображення конструкції

Загальна постановка задачі. У загальному випадку постановка задачі про теплові навантаження для складних конструктивів описується системами рівнянь термопружності для кожного з елементів конструкції при умовах спряження на стиках елементів.

Для конструкцій, схематично зображених на рис. 1, такий опис можна суттєво спростити. Найзначніший вплив на напружений стан елементів даної конструкції чинитимуть складові найбільших геометричних розмірів. Саме вони зазнаватимуть найзначніших температурних деформацій, а відтак і найбільших зусиль у разі обмеження цих деформацій з боку інших елементів конс-

трукцій. Наприклад, на рис. 1 такими елементами є паралельні пластини 0, 3, 4. Складові 1, 2 при знаходженні температурного поля можна вважати як тепловий опір між пластинами, а при моделюванні напруженого стану — жорсткими, адже вони мало впливають на втрату стійкості системи та нижчі резонансні частоти.

За умов незв'язаної задачі термопружності [3] температурна частина задачі може розглядатись окремо. При зроблених припущеннях щодо врахування полів тільки в пластинах температурна задача зводиться до розв'язування системи рівнянь теплопровідності для тонких пластин

$$\Delta T_k - \frac{1}{a_k} \frac{\partial T_k}{\partial \tau} + \frac{1}{\lambda_q^k} Q_k - \frac{2\alpha_n^k}{\lambda_q^k h_k} T_k = 0, \quad (k = 0, \dots, K), \quad (1)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа; $K + 1$ — кількість пластин, якими моделюється система; λ_q , α_n , a — коефіцієнти теплопровідності матеріалу пластини, тепловіддачі з поверхні, температуропровідності; h — товщина пластини. Тут і надалі індекс k номера пластини при описі позначень фізичних сталей пропущено.

Система рівнянь (1) повинна розв'язуватися при нульових початкових умовах $T_k(x, y, 0) = 0$ та умовах спряження по торцях кожної з пластин. При товстостійності елементів 1, 2, високій теплопровідності їх матеріалу та надійному тепловому контакті з пластинами такими умовами можуть бути умови ідеального теплового контакту, які для прикладу спрощеної системи, зображеної на рис. 1, на торці $y = 0$ набувають вигляду

$$T_0(x, 0, \tau) = T_3(x, 0, \tau); \quad T_0(x, 0, \tau) = T_4(x, 0, \tau);$$

$$\left. \frac{\partial T_0(x, y, \tau)}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial T_3(x, y, \tau)}{\partial y} \right|_{y=0}; \quad \left. \frac{\partial T_0(x, y, \tau)}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial T_4(x, y, \tau)}{\partial y} \right|_{y=0}. \quad (2)$$

Аналогічні граничні умови записуються і для торців $y = b$, $x = 0$ та $x = a$. У граничних умовах (2) a і b — розміри пластин за координатами x і y .

Деформації пластин конструкції в їх площині внаслідок нагріву полем температур $T_k(x, y, \tau)$ визначаються з рівнянь Ламе [3] щодо вектора пружних переміщень $\bar{u}_k = (u_k, v_k)$

$$\Delta \bar{u}_k + \frac{1 + \nu_k}{1 - \nu_k} \text{grad}(\text{div} \bar{u}_k) = \frac{2(1 + \nu_k)}{1 - \nu_k} \alpha_k \text{grad}(T_k), \quad (3)$$

де ν , α — модуль Пуассона та коефіцієнт лінійного теплового розширення матеріалу пластини.

Варіантів граничних умов для рівняння (3) може бути сформульовано досить багато. У торцях, які не контактують з іншими елементами системи, це можуть бути традиційні умови відсутності навантаження на них. Наприклад, для торців $x = 0$ та $x = a$ такими можуть бути умови

$$(1 - \nu) \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - (1 - \nu) \alpha T = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad v_0|_{y=0}. \quad (4)$$

Для торців, якими пластини стикаються з іншими елементами конструкції, повинні бути сформульовані умови сумісності деформацій. Для конструкцій розглядуваного типу в припущенні про жорсткість складових 1, 2 за умов симетрії поля температур в системі відносно площини xOy ці умови можуть мати вигляд

$$v_0|_{y=0} = v_3|_{y=0}, \quad u_0|_{y=0} = u_3|_{y=0} = 0 \quad (5)$$

при жорсткому зашпемленні на торці $y = 0$ або

$$v_0|_{y=0} = v_3|_{y=0}, \quad N_{xy}^0|_{y=0} = N_{xy}^3|_{y=0} = 0 \quad (5')$$

при обмеженні видовження пластини вздовж осі y та відсутності на торці $y = 0$ дотичних напружень. Аналогічні умови повинні бути сформульовані і на торці $y = b$.

Розв'язування задачі (3)–(5) дає можливість визначити зусилля N_{xx} , N_{xy} та N_{yy} у площині пластини. Якщо конструкція знаходиться під дією динамічних навантажень, то нормальні до площини пластин деформації можна описати в наближенні Кірхгофа рівняннями [5]

$$D_k \Delta^2 w_k - \rho_k h_k \frac{\partial^2 w_k}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx}^k \frac{\partial w_k}{\partial x} + N_{xy}^k \frac{\partial w_k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy}^k \frac{\partial w_k}{\partial x} + N_{yy}^k \frac{\partial w_k}{\partial y} \right), \quad (6)$$

де $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ — циліндрична жорсткість пластини; E і ρ — модуль Юнга і густина її матеріалу.

Рівняння (6) можуть бути розв'язані при однорідних початкових умовах і класичних умовах кріплення [5]. Наприклад, при шарнірному опиранні такі умови мають вигляд

$$w|_{x=0} = w|_{x=a} = w|_{y=0} = w|_{y=b} = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=0} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=a} = 0;$$

$$\left. \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right|_{y=0} = \left. \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right|_{y=b} = 0. \quad (7)$$

Таким чином, навіть для порівняно простої системи, зображеної на рис. 1, при зроблених припущеннях щодо жорсткості окремих елементів конструкції і симетрії поля температур задача аналізу реакції елементів конструкції на динамічні навантаження зводиться до послідовного розв'язання задачі (1)–(2) для двох рівнянь теплопровідності, задачі (3)–(5) для двох рівнянь Ламе плоскої задачі теорії пружності та задачі (6)–(7) для двох рівнянь поперечних коливань пластин.

Наближений розв'язок для однорідних за температурою елементів. Нехай будь-яка зі складових конструкції, початково нагріта до температури середовища T_c , нагрівається джерелом тепла Q_i , де i — номер елемента згідно з рис. 1. Вважатимемо, що і при нагріві температура кожного з елементів системи буде рівномірною і матиме значення T_i . При таких припущеннях для знаходження температур складових застосуємо метод теплового балансу [2].

Для перегріву кожного з елементів системи відносно температури середовища $\vartheta_k = T_k - T_c$ ($k = 0, \dots, N$) у нестационарному випадку маємо задачу

$$c_k \frac{d\vartheta_k}{d\tau} + \sigma_{kc}(T_k, T_c)\vartheta_k - \sum_{i=0(k \neq i)}^N \sigma_{ki}(T_k, T_i)(\vartheta_k - \vartheta_i) = Q_k; \quad \vartheta_k(0) = 0, \quad (8)$$

де c_k — повна теплоємність k -го тіла; σ_{ki} — теплова провідність між тілами k та i ; τ — часова змінна.

Моделювання теплового режиму складних систем за допомогою рівнянь типу (8) не тільки спрощує процес розв'язання, адже в цьому випадку замість дослідження систем рівнянь у часткових похідних маємо справу з системою звичайних диференціальних рівнянь. Крім того, у (8) теплова провідність між тілами системи не випадково записана у вигляді функції температур цих тіл. Це дає можливість урахувувати всі відомі види теплообміну між тілами: кондукцію, конвекцію і випромінення. Наприклад, для спрощеної системи з рис. 1 між пластинами 0 та 3, 4 може відбуватися теплообмін не тільки за рахунок теплопередачі через елементи 1, 2, а й теплопередачі випроміненням безпосередньо між цими пластинами. У теплообміні пластин 3, 4 із зовнішнім середовищем суттєвим є врахування конвекції. Методика розрахунку теплових провідностей для усіх видів теплообміну подана в [2].

Розв'язок системи (8) у загальному випадку отримується числово, наприклад, методом Рунге–Кутта. Для лінійних теплових провідностей і малокомпонентних систем може бути побудований аналітичний розв'язок.

Вважаючи, що $\frac{d\vartheta_k}{d\tau} = 0$ і нехтуючи початковою умовою, з (8) приходимо до нелінійної системи рівнянь, яка описує температуру елементів системи в

стаціонарному випадку. Для лінійних теплових провідностей вона вироджується в лінійну алгебраїчну систему рівнянь.

Стискальні чи розтягальні зусилля, що виникають у системі внаслідок нагріву, також можна шукати наближено, використовуючи відомі співвідношення з курсу опору матеріалів [6]. Наприклад, у припущенні, що властивості пластин і їх температури симетричні відносно площини xOy , а також при конструктивних обмеженнях видовження пластин тільки вздовж осі y , використовуємо рівняння сумісності деформації

$$\alpha_0 \vartheta_0 + \frac{F}{E_0 a_0 h_0} = \alpha_3 \vartheta_3 - \frac{F}{2E_3 a_3 h_3},$$

де F — зусилля розтягу чи стиску пластин вздовж осі y .

За знайденими звідси силами можна порахувати безрозмірні розподілені зусилля, які розтягують (стискають) пластини 0 та 3, 4 у напрямку осі y

$$q_y^0 = \frac{F b_0^2}{2\pi^2 a_0 D_0} = \frac{6(1 - \nu_3^2)}{\pi^2(1 + \eta)} (\alpha_3 \vartheta_3 - \alpha_0 \vartheta_0) \left(\frac{\beta_3}{\delta_3} \right)^2;$$

$$q_y^3 = \frac{F b_3^2}{2\pi^2 a_3 D_3} = - \frac{6\eta(1 - \nu_0^2)}{\pi^2(1 + \eta)} (\alpha_3 \vartheta_3 - \alpha_0 \vartheta_0) \left(\frac{\beta_0}{\delta_0} \right)^2, \quad (9)$$

де $\beta = b/a$, $\delta = h/a$ — відносний розмір та відносна товщина кожної з пластин;

$\eta = E_0 a_0 h_0 / 2E_3 a_3 h_3$ — відносна жорсткість пластин уздовж осі y .

При необхідності, у разі відповідних кріплень уздовж осі x , аналогічні вирази можуть бути записані і для зусиль уздовж цієї осі.

Згідно з (9) розтягальні (стискальні) вздовж осей зусилля не залежать від координат. Тоді для аналізу поперечних гармонійних коливань пластин з (6) отримаємо співвідношення

$$D\Delta^2 w + \rho h \omega^2 w = N_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{yy} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

де ω — кругова частота гармонійних коливань, і задача знаходження власних частот і форм коливань для нього розв'язується [7, 8] підстановкою відповідних форм коливань. Зокрема, при шарнірному опиранні прямокутної пластини, тобто при виконанні граничних умов (7), звідси можна отримати вирази для визначення власних частот коливань [5] для кожної з пластин ($k = 0, 3$):

$$\omega_{mn}^k = \pi^2 \sqrt{\frac{D_k}{\rho_k h_k} \left[\left(\frac{m^2}{a_k^2} + \frac{n^2}{b_k^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{q_x m^2}{a_k^4} + \frac{q_y n^2}{b_k^4} \right) \right]}, \quad (10)$$

де m і n — число півхвиль власних форм коливань у напрямку осей x і y .

Загальновідомі вирази [5] для кругової частоти Ω_{mn}^k ненавантажених пластин отримусмо звідси при $q_x = q_y = 0$.

Числові результати і висновки. Нижче наведено результати числових експериментів з аналізу власних частот пластин 0 та 3 системи, зображеної на рис. 1. Аналіз проводили для комбінацій сталевих та алюмінієвих пластин. Для числових розрахунків було вибрано такі значення геометричних і фізичних величин:

розміри — $a_k = b_k = 100$ мм, $h_k = 1$ мм;

сталь — $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0,3$, $\rho = 7800$ кг/м³, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹,
 $\lambda_q = 50$ Вт/м·К, $c = 900$ Дж/кг·К;

алюміній — $E = 0,7 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0,3$, $\rho = 2700$ кг/м³,
 $\alpha = 25 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹, $\lambda_q = 210$ Вт/м·К, $c = 450$ Дж/кг·К.

Зважалося, що потужність тепловиділення для центральної пластини становить 10 Вт. При аналізі теплового режиму конструкції згідно з системою рівнянь (8) брали до уваги всі елементи, відображені на рис. 1. На стиках елементів 1, 2 та 3, 4 враховували теплопровідність через прошарок матеріалу пластини 3 товщиною 1 мм. На стиках пластини 0 з елементами 1,2 теплова провідність вважалося на порядок нижчою. При розрахунках тепловіддачі в зовнішнє середовище зважали на теплообмін випроміненням з коефіцієнтом чорноти 0,8 та конвекцією з коефіцієнтом тепловіддачі з поверхні елементів 1,2 — 1 Вт/м²·К та пластин 3,4 — 10 Вт/м²·К, що є близьким до природньої конвекції при орієнтації осі y по вертикалі.

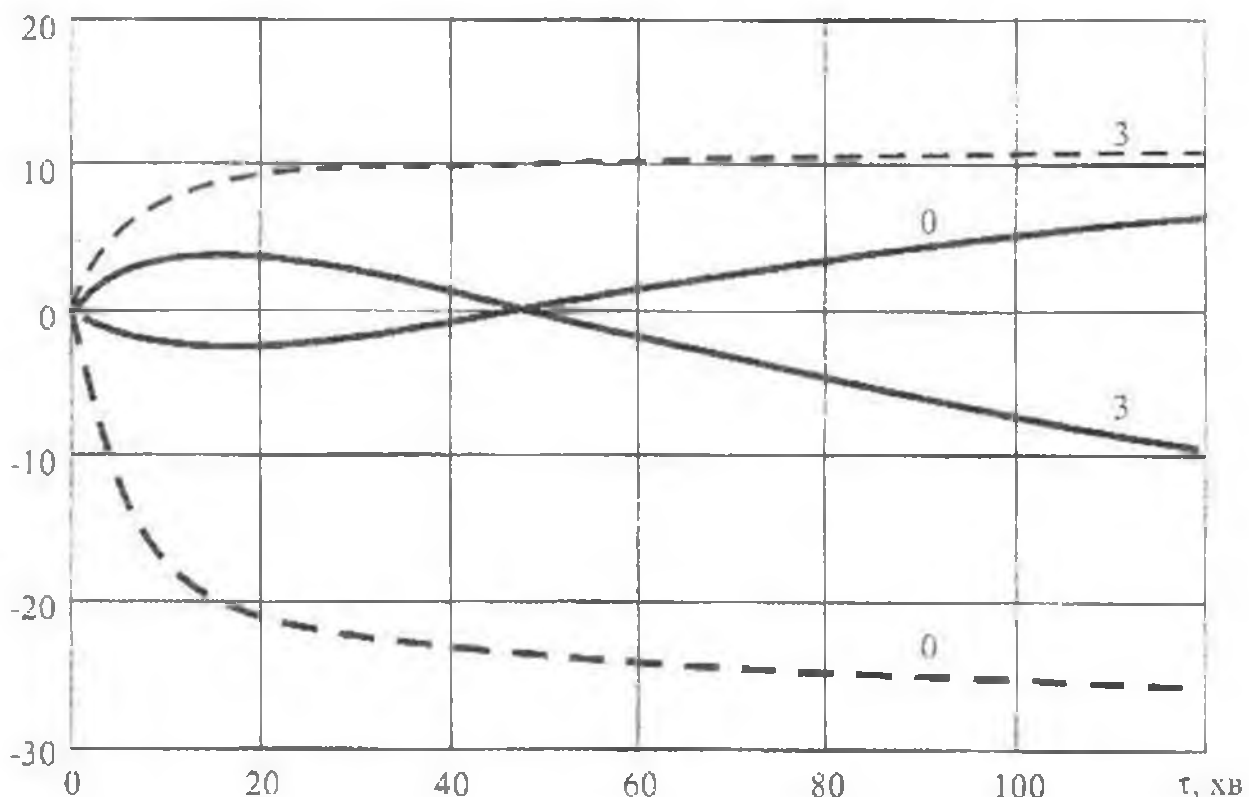


Рис. 2. Графіки залежності основної частоти від часу

На рис. 2 зображено графіки залежності основної ($m = n = 1$) відносної

частоти $100 \cdot (\omega_{mn}^k - \Omega_{mn}^k) / \Omega_{mn}^k$ для пластин 0 та 3 у відсотках, отриманої з (10) після моделювання зміни температури в часі. Номери пластин проставлено біля кривих. Суцільними кривими зображено зміну частоти для сталеві пластини, що знаходиться в алюмінієвому конструктиві, штриховими — повністю алюмінієвої конструкції.

Для обох наведених на рис.2 комбінацій пластин, як випливає з аналізу стаціонарного теплового режиму, значення температур, до яких нагріваються пластини 0 та 3, практично однакові: для внутрішньої пластини — $\vartheta_0 = 44,1 \text{ }^\circ\text{K}$, для зовнішньої — $\vartheta_3 = 33,4 \text{ }^\circ\text{K}$. Тобто, при різниці температур між пластинами, яка не перевищує в процесі нагріву $10,7 \text{ }^\circ\text{K}$, зміна частоти відносно частоти ненавантаженої пластини складає 10–20%.

Цікаво, що для повністю алюмінієвої конструкції, коли коефіцієнти лінійного розширення внутрішньої та зовнішніх пластин збігаються, максимальне значення зміни частоти більше порівняно з конструкцією з різних матеріалів. Зауважимо, що характер зміни частоти з часом для цих комбінацій матеріалів суттєво відрізняється. У повністю алюмінієвій конструкції (штрихові криві) внутрішня пластина постійно має вищу температуру, ніж зовнішні. Тому вона стиснута вздовж осі y , її частота знижується, тоді як зовнішні пластини розтягнуті і їх частота зростає в процесі нагрівання. У випадку сталеві пластини в алюмінієвому конструктиві (суцільні криві) на початку нагрівання, коли перегрів незначний, але внутрішня пластина має вищу температуру, вона стиснута (крива 0 проходить під віссю часу). Але зі збільшенням перегріву за рахунок вищого коефіцієнта лінійного розширення зовнішніх алюмінієвих пластин вони зазнають більшого видовження, ніж внутрішня пластина, і вона починає зазнавати розтягу (крива 0 змінює знак). Крива 3 зміни частоти для зовнішніх пластин є майже дзеркальним відображенням кривої 0 відносно осі часу.

Як показав аналіз стаціонарної та нестационарної задач, ще більшої зміни зазнають частоти пластин при зменшенні теплообміну із зовнішнім середовищем. Це відбувається за рахунок вищого рівня перегріву всіх елементів конструкції. Різниця між температурою внутрішньої та зовнішніх пластин при цьому, порівняно з даними на рис. 2, змінюється незначно.

Отже, запропонований у даній роботі підхід дозволяє провести повноцінний аналіз достатньо складних конструкцій. Проведений аналіз задачі в стаціонарному і нестационарному режимах дозволив виявити якісні й кількісні залежності зміни основної частоти власних коливань пластин конструкції від комбінації матеріалів у ній, а також характеристик теплообміну всередині конструкції та з зовнішнім середовищем.

1. Горечко О. М. Вплив температури на вібраційні характеристики прямокутної панелі / О. М. Горечко, Н. О. Горечко // Наукові записки УАД. — 2003. — Вип. 6. — С. 111–114.
2. Дульнев Г. П. Тепло- и массообмен в радиоэлектронной аппаратуре: учеб. для вузов по спец. «Конструирование и производство радиоаппаратуры». — М.: Высш. шк., — 1984. — 247 с.
3. Коваленко А. Д. Термоупругость / Коваленко А. Д. — К.: Высш. шк., 1975. — 216 с.
4. Нашиф А. Демпфирование колебаний / Нашиф А., Джоунс Д., Хендерсон Дж. — М.: Мир. — 1988. — 448 с.
5. Прочность, устойчивость, колебания: справ.: в 3-х т. Т. 3; под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. — М.: Машиностроение, 1968. — 568 с.
6. Справочник по сопротивлению материалов / [Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В.]; отв. ред. Г. С. Писаренко. — К.: Наук. думка, 1988. — 736 с.
7. Токарев М. Ф. Механические воздействия и защита радиоэлектронной аппаратуры: учеб. пособие для вузов / Токарев М. Ф., Талицкий Е. Н., Фролов В. А.; под ред. В. А. Фролова. — М.: Радио и связь, 1984. — 224 с.
8. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем / Филиппов А. П. — М.: Машиностроение, 1970. — 736 с.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВИБРАЦИОННОЙ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПАНЕЛИ В УПРУГОМ КОНСТРУКТИВЕ

Рассматривается постановка задачи динамики прямоугольных пластин, закрепленных в упругом конструктиве, при нагревании отдельных составляющих такой системы источниками тепла. Температурная задача решена методом теплового баланса. Собственные частоты предварительно нагруженных вследствие неравномерности нагрева или неоднородности упругих характеристик пластин находятся в предположении о постоянности температурных усилий вдоль любой из осей координат в плоскости пластины. Исследовано влияние нагрева одной из пластин в стационарном и нестационарном режимах на изменение собственных частот пластин системы.

APPROXIMATE SOLUTION OF THE PROBLEM ABOUT VIBRATIONAL THERMOSENSITIVITY OF RECTANGULAR PANEL IN ELASTIC CONSTRUCTION

Problem definition of dynamics of rectangular plates fixed in elastic construction under conditions of heating such system individual constituents by heat source is considered. Temperature problem is solved by heat balance method. Eigenfrequencies of the plates previously loaded in consequence of heating irregularity or heterogeneity of plates elastic characteristics are found in assumption of constant temperature strains along any of coordinate axes in plate plane. Influence of one plate heating in stationary and transient mode on the modification of system plates eigenfrequencies investigated.