Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Наукові інтереси: проблеми технологічної освіти у вищій та середній школі.

INFORMATION FDOUT THE AUTHOR

Vilyada Maxim Yuriyovych – magistrant educational and professional programs Secondary education (Labor training and technology) of the physicomathematical faculty, Central Ukrainian Vladimir Vinnichenko State Pedagogical University.

Circle of research interests: resource provision of technology lessons in high school, specialized education of applicants for education of senior classes.

Ryabets Sergey Ivanovich – Cand.Tech.Sci., Associate Professor, Associate Professor of the Department of Theory and Methods of Technological Preparation, Labor Protection and Safety, Central Ukrainian Vladimir Vinnichenko State Pedagogical University.

Circle of research interests: the problems of technological training in higher and secondary education

Дата надходження рукопису 22.11.2018 р.

Рецензент – к.пед.наук, ст. викладач Мироненко Н.В.

УДК 519.1

ВОЙНАЛОВИЧ Наталія Михайлівна −
кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка
e-mail:vojnalovichn@gmail.com
ORCID ID: 0000-0002-0523-7889

ВОЛКОВ Юрій Іванович −
доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка
e-mail:yulysenko@i.ua
ORCID ID: 0000-0002-2270-3407

БІНОМІАЛЬНА ФОРМУЛА: МЕТОДИ ДОВЕДЕННЯ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Постановка та обґрунтування актуальності проблеми. Біноміальна формула

$$(a+b)^n = \sum_{K-0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad (1)$$

та пов'язані з нею біноміальні коефіцієнти $\binom{n}{k}$ займають у математиці особливе місце і не тільки тому, що вони є найважливішими комбінатор-ними величинами (число способів вибору *к*-елементних підмножин з *n*-елементної множини). Ця тема займає важливе місце як у шкільному курсі математики так і в курсах дискретної математики у вищих навчальних закладах, тому актуальними і в наш час є розробка методики викладання цієї теми..

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Кількість літературних джерел з цього приводу дуже багато, описати їх тут ми не маємо можливості, тому відсилаємо читача до . списку використаних джерел ([1]-[4]), але все ж нагадаємо, що ще з давніх часів для знаходження біноміальних коефіцієнтів використовували знаменитий трикутник Паскаля (1665 р.), який вже був відомий китайським математикам Ян Хуею (1266 р.), Чжу Ші-Цзе (1303 р.) ([4], с.136).

Мета статті. При вивченні формули (1) корисними будуть її різні доведення. Тому при розробці методики потрібно для початку дослідити різні способи доведення біноміальної теореми і далі розглянути приклади застосування формули (1) і обговорити узагальнення цієї формули.

Методи дослідження. Використовуються методи комбінаторного і математичного аналізу.

Виклад основного матеріалу дослідження. Почнемо з доведень формули (1) (вона виражає біноміальну теорему).

Комбінаторного доведення, яке традиційно розглядається в навчальних посібниках.

Маємо: $(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b)$. В цьому добутку *n* однакових множників. Для того , що їх перемножити можна діяти так: візьмемо які-небудь *k* множників і беремо в них доданок *a*, тоді з інших *n-k* множників беремо доданок *b* і перемножимо, отримаємо вираз $a^k b^{n-k}$. При фіксованому *k* таких добутків буде стільки скількома способами можна вибрати *k* множників з *n* множників, а це є кількість комбінацій з *n* по *k*. В отриманій сумі *k* може приймати значення від 0 до *n*, і, отже, в результаті отримаємо формулу (1).

Друге доведення формули (1) ґрунтується на застосуванні методу математичної індукції. Для *n*=1 формула (1) правильна. Припустимо, що вона правильна для *n*=*m* і доведемо, що вона буде правильною і для *n*=*m*+1. Згідно припущення індукції

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)(a+b)^m = (a+b)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^k b^{m-k} = \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m}{k-1}a^k b^{m+1-k} +$$

$$\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m}{k}a^k b^{m-k+1} = \sum_{k=0}^{m+1}\left(\binom{m}{k-1}+\binom{m}{k}\right)a^k b^{m+1-k} = \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}a^k b^{m+1-k}.$$

Повчальними є доведення біноміальної формули засобами математичного аналізу. Спочатку покажемо як застосувати для цього формулу Тейлора для многочленів

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(0)}{k!}x^k. \quad (2).$$

Третє доведення біноміальної формули. Візьмемо за $P(x)$ функцію. $(1+x)^n$. Тоді $P^{(k)}(x) = n(n-1)\cdots(n-k+1)(1+x)^{n-k}, k = 0,1,\dots,n$. Звідси за формулою (2) матимемо

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k. \quad (3)$$

Якщо в цьому співвідношенні взяти *x=a/b,* то отримаємо формулу (1).

Четверте доведення біноміальної формули. Це доведення ґрунтується на такому твердженні з диференціального числення: якщо похідна $f'(x)=0$, то така функція є сталою.

Розглянемо функцію $f(x)=(1+x)^n - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. Тоді для *n*=1 $f(x)=0$ і

$f'(x) = n(1+x)^{n-1} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1} = 0$. Припустимо, що такі рівності матимуть місце для *n*=*m* і доведемо, що $f(x)=0$ і $f'(x)=0$ для *n*=*m*+1.

$$f'(x) = (m+1)(1+x)^m - (m+1)\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} - \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}k = \sum_{k=0}^{m}((m+1) - \binom{m+1}{k+1}(k+1)) =$$

$\sum_{k=0}^{m}\left((m+1)\frac{m!}{k!(m-k)!} - \frac{(m+1)!}{(k+1)!(m-k)!}(k+1)\right) = 0$..Якщо тепер у виразі для $f(x)$ покласти *x*=0, то отримаємо, що *const*=0, і отже, $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$, а звідси випливає формула (1), якщо покласти *x*=*a*/*b*.

П'яте доведення біноміальної формули.

Нехай $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}, B=\{b_0,b_1,\dots,b_x\}$. Позначимо через *F* множину всіх відображень множини *A* в множину *B*. Оскільки кожному елементу множини *A* можна поставити у відповідність 1+*x* елементів множини *B*, то згідно правила добутку кількість таких відображень дорівнюватиме числу $(1+x)^n$. Знайдемо цю кількість іншим способом. Розіб'ємо множину *F* на *n*+1 класів, які не перетинаються. До *k*–го класу віднесемо всі підмножини, які матимуть рівно *k* прообразів елемента b_o, таких підмножин буде $\binom{n}{k}x^{n-k}$,

тому згідно правила суми матимемо: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. Зліва і справа в цій рівності стоять многочлени *n*-го порядку, а за *x* можна брати довільне натуральне значення, а тому ця рівність буде правильною і для любого дійсного *x*, бо многочлени не можуть мати більше, ніж *n* коренів.

Біноміальної формула є частинним випадком більш загальної поліноміальної формули:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_m)^n = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=n \\ k_i\ge 0,\, i=0,1,\dots,m}}\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_m^{k_m}. \quad (4)$$

Доведемо цю формулу методом математичної індукції, використовуючи біноміальну формулу. Для *n*=1 ця формула правильна. Припустимо, що вона правильна для *n*=*m*, доведемо , що вона має місці для *n*=*m*+1. Справді

$$((a_1+\cdots+a_m)+a_{m+1}))^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a_{m+1}^{n-k}\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=k \\ k_i\ge 0,\, i=0,1,\dots,k}}\frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_m^{k_m},$$

якщо тепер замінити $n-k$ на k_{m+1} і змінити порядок підсумовування, то отримаємо поліноміальну формулу.

Наведемо декілька прикладів застосування біноміальної формули для знаходження сум.

Приклад 1. $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$, $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=0$. Досить у формулі (1) спочатку взяти x=1, в потім x=-1.

Приклад 2. $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)\cdots(k-m+1)=n(n-1)\cdots(n-m+1)2^{n-m}, m\le n.$

Для доведення цього співвідношення досить тотожність (1) продиференціювати m разів і взяти x=1.

Приклад 3. (*Мала теорема Ферма*). Візьмемо в співвідношенні (4) показник степеня n=p – просте число. Матимемо

$$(a_1+a_2+\cdots+a_m)^p=a_1^p+a_2^p+\cdots+a_m^p+p\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_m=p\\ k_j\ne p,,i=0,1,\ldots,m}}\frac{(p-1)!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_m^{k_m}.$$

Через те, що p просте кожен з коефіцієнтів $\dfrac{p(p-1)!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$ (за умови $k_j\ne p, i=0,1,\ldots,m$) буде ділитись на p, а тому вираз

$(a_1+a_2+\cdots+a_m)^p-(a_1^p+a_2^p+\cdots+a_m^p)$ також буде ділитись на p і якщо тепер взяти взяти $a_1=a_2=\cdots=a_m=1$, то отримаємо твердження малої теореми Ферма: m^p-m ділиться на p для всякого натурального числа m.

Багато інших прикладів можна знайти в книгах [1]; [3].

Далі будемо використовувати позначення й основні факти квантового числення (q-числення) з книги [2]:

q-біноміальна формула (формула Гаусса)

Нехай $(a+x)_q^n:=(a+x)(a+qx)(a+q^2x)\cdots(a+q^{n-1}x)$. *Тоді*

$$(a+x)_q^n=\sum_{k=0}^{n}q^{k(k-1)/2}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}x^k a^{n-k}. \qquad (5)$$

Доведення. Нехай $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$. Тоді

$$D_qP(x)=a_1+[2]a_2x+\cdots+[k[a_kx^{k-1}+\cdots+[n]a_nx^{n-1},$$

$$D_q^2P(x)=[2]a_2+\cdots+[k][k-1]a_kx^{k-2}+\cdots+[n][n-1]a_nx^{n-2}.$$

. . .

$$D_q^kP(x)=[k]!a_k+\cdots+[n][n-1]\cdots[n-k+1]a_nx^{n-k},\ldots,D_q^n(x)=[n]!a_n.$$

Візьмемо в цих співвідношеннях x=0. Тоді отримаємо рівності

$D_q^kP(0)=[k]!a_k, k=0,1,\ldots,n$,а звідси отримаємо формулу Тейлора для $P(x)$

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}D_q^kP(0)\frac{x^k}{[k]!}. \qquad (6)$$

Застосуємо цю формулу до многочлена $P(x)=(1+x)_q^n$. Матимемо

$$D_qP(x)=((1+x)(1+qx)\cdots(1+q^{n-1}x)-(1+qx)(1+q^2x)\cdots(1+q^nx))/(x(1-q))=$$

$$((1+qx)\cdots(1+q^{n-1}x)(1+x-1+q^nx))/(x(1-q))=[n](1+qx)_q^{n-1},$$

$$D_q^2P(x)=D_q([n](1+qx)_q^{n-1})=[n][n-1]q(1+q^2x)_q^{n-2}),$$

$$D_q^kP(x)=[n][n-1][n-2][n-3]\cdots[n-k+1]q^{k(k-1)/2}(1+q^{k(k-1)/2^6}x)_q^{n-k}),\ldots$$

Візьмемо в цих співвідношеннях x=0. Тоді отримаємо рівності

$$D_q^k P(0) = [n][n-1][n-2][n-3]\cdots[n-k+1]q^{k(k-1)/2}, k = 0,1,\ldots,n$$

а звідси отримаємо q-формулу Тейлора для многочлена $P(x) = (1+x)_q^n$):

$$(1+x)_q^n = \sum_{k=0}^{n} q^{k(k-1)/2} \frac{[n][n-1]\cdots[n-k+1]}{[k]!} x^k = \sum_{k=0}^{n} q^{k(k-1)/2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k. \qquad (7)$$

Якщо в цьому співвідношенні взяти $x=x/a$ і спростити, то отримаємо (5).

Перепишемо співвідношення (7) так:

$$(1+x)_q^n = \sum_{k=0}^{n} q^{k(k-1)/2} \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)} x^k,$$ якщо взяти $|q|<1/2, |x|<1$, і спрямувати $n \to \infty$, то отримаємо тотожність

$$\prod_{j=0}^{\infty} (1+q^j x) = \sum_{k=0}^{\infty} q^{k(k-1)/2} \frac{x^k}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}.$$

Формулу (6) можна узагальнити. Нехай c довільне число. Тоді для довільного многочлена $P(x)$ має місце співвідношення

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} D_q^k P(c) \frac{(x-c)_q^k}{[k]!}. \qquad (8)$$

Дійсно, нехай

$$P(x) = b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)_q^2 + \cdots + b_k(x-c)_q^k + \cdots + b_n(x-c)_q^n.$$

Тоді $P(c) = b_0$, $D_q P(c) = b_1$, $D_q^2 P(c) = [2]b_2$, $D_q^3 P(c) = [2][3]b_3$,

$D_q^4 P(c) = [2][3][4]b_4$, …, $D_q^k P(c) = [2][3][4]\cdots[k]b_k$, $D_q^n P(c) = [n]!b_n$,

а звідси $b_k = \dfrac{D_q^k P(c)}{[k]!}, k = 0,1,2,\cdots,n$. Застосуємо формулу (8) :до функції $f(x) = x^n$, взявши c=1.

Матимемо $x^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (x-1)_q^k$. Замінивши x на $1/x$, отримаємо

$$\frac{1}{x^n} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{x}-q\right)\cdots\left(\frac{1}{x}-q^{k-1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{-k} (1-x)_q^k,$$

звідси $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{n-k} (1-x)_q^k = x^n + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{n-k} (1-x)_q^k = 1.$

Якщо в цій формулі взяти $x=q$, то отримаємо

$$q^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)} q^{n-k} (1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k) = 1.$$

Звідси для довільного q і натурального n

$$q^n + \sum_{k=1}^{n} (1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1}) q^{n-k} = 1.$$

Висновки з дослідження і перспективи подальших розробок. Розглянутими в статті прикладами не вичерпуються прийоми розв'язування подібних задач. В перспективі ця тематика може бути розширена через накопичення прикладів застосування бінпоміальної формули, полшноміальної формул, q-біноміальної формули.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Graham R.L, Concrete Mathematics/Graham R.L, Knuth D.E., Patashnic O. − New York , Addison Wesley, 1989 − 626 p.

2. Kac V., Quantum Calculus/ Kac V., Cheung P., Springer- Verlab. − New York, 2002. − 113 p.

3. Riordan J. Combinatorial Identities/ Riordan J ,John Wiley & Sons, Inc., − New York, 1968- 256

4. Stillwell J. Mathematics and Its History/ Stillwell J., Springer-Verlab. − New York, 1989. − 370 p.

REFERENCES

1. Graham R.L, Knuth D.E., Patashnic O. Concrete Mathematics, Addison Wesley, 1989-626 p.

2. Kac V., Cheung P. Quantum Calculus, Springer-Verlab. − New York, 2002. − 113 p.

3. Riordan J. Combinatorial Identities, John Wiley & Sons, Inc. − New York, 1968. − 256

4. Stillwell J. Mathematics and Its History, Springer-Verlab. − New York,1989. − 370 p.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Войналович Наталія Михайлівна, доцент, кандидат педагогічних наук. доцент кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Наукові інтереси: методика навчання математики, дискретна математика.

Волков Юрій Іванович, професор, доктор фізико-математичних наук. професор кафедри математики Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

Наукові інтереси: математичний аналіз, теорія ймовірностей, дискретна математика, методика навчання математики.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Vojnalovich Natalia Mikhailivna − candidat of pedagogical sciences, dozent, dozent of department of mathematics of the Volodymyr Vynnychenko Central Ucrainian State Pedagogcal University.

Circle of research interests: theory and methodology of teaching (mathematics), discretne mathematics.

Volkov Yurii Ivanovich − doctor of physics-mathematial sciences, professor, professor of department of mathematics of the Volodymyr Vynnychenko Central Ucrainian State Pedagogcal University.

Circle of research interests: mathematical analysis. theory probability, discretne mathematics, theory and methodology of teaching (mathematics).

Дата надходження рукопису 30.10.2018 р.
Рецензент – к.пед.наук, доцент Кононенко С.О.

УДК 53.05

ГАЙДА Василь Ярославович –
методист відділу методики навчальних предметів
та професійного розвитку педагогів
Тернопільський обласний комунальний
інститут післядипломної педагогічної освіти
ORCID ID 0000-0003-3077-2311
e-mail: gaidavasil@gmail.com

ОКРЕМІ АСПЕКТИ ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ УЧНІВ ПРИ ПІДГОТОВЦІ ДО ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ НА ОСНОВІ РЕСУРСІВ ІНТЕРНЕТ

Постановка та обґрунтування актуальності проблеми. Пошук шляхів переходу від репродуктивних форм навчання учнів фізики до дослідницько-пошукових був і залишається актуальною проблемою в освіті. У Державному стандарті базової і повної загальної середньої освіти підкреслюється важливість переходу в освітньому процесі до діяльнісного, особистісно-орієнтованого та компетентнісного підходів навчання учнів [5]. На сучасному етапі розвитку техніки комп'ютери, ноутбуки, планшети, смартфони та інші гаджети увійшли у всі галузі діяльності людини, стали важливим атрибутом її побуту. Інтернет та хмарні технології стають потужним засобом, який забезпечує створення хмаро орієнтованого навчального чи освітнього середовища, що дозволяє отримання та обмін інформації. Вчитель озброюється додатковим інструментом для активізації пізнавальної діяльності учнів. Для реалізації завдань освітньої програми педагог повинен використовувати всі доступні йому нові технології, освітні ресурси, що спрямовані на формування в школярів міцних теоретичних знань та практичних вмінь і навичок. Використання ресурсів інтернет, на нашу думку, додадуть освітньому процесу інтерактивності, сприятимуть візуалізації знань, анімують статичні картинки та додадуть їм динаміки, інтенсифікують роботу учнів на уроках та, як наслідок, підвищать якість процесу вивчення фізики.

Досягненню цієї мети, значною мірою, сприятиме заохочення учнів до самостійного пізнання навколишнього світу та формування в них дослідницької компетентності, зокрема, з використанням ресурсів інтернет.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Окремі питання методики навчання фізики на основі освітніх ресурсів досліджували В. П. Вовкотруб, М. І. Садовий, О. М. Трифонова, В. Д. Шарко [11; 14] та ін. Питання активізації навчально-дослідницької діяльності учнів у процесі виконання практичної частини навчання фізики підіймали Ю. М. Галатюк, Н. В. Подопригора, М. І. Садовий, О. М. Трифонова, В. тІ. Тищук [1; 3; 10] та ін. Особливості практичної реалізації ресурсів інтернет в освітному процесі з фізики розлядали О. В. Ліскович, О. С. Мартинюк, М. В. Хомутенко [7; 8; 13] та ін.

Завдяки їхнім доробкам методика навчання фізики збагатилася новими формами та методами навчання, розглянуто особливості застосування різноманітних засобів навчання та ресурсів для покращення якості освітнього процесу з урахуванням індивідуальних, вікових та психологічних особливостей особистості учня.

При цьому, ми вважаємо, недостатньо дослідженим питання організації самостійної роботи