

## ПІФАГОРІЙСЬКА МУЗИЧНА ДОКТРИНА

*Стаття присвячена музично-теоретичній концепції піфагорійців. Зокрема, описано піфагорів стрій, співвідношення інтервалів піфагорового строю та їх зв'язок з тогочасною математикою.*

**Ключові слова:** *піфагорійці, піфагорів стрій, інтервал, число, піфагорова кома.*

Протягом багатьох століть у найрізноманітніших музичних культурах музична теорія була більш чи менш тісно пов'язаною з математикою. Фізичні властивості звуку, закономірності ритму і ладу зумовлювали такий зв'язок. Цій тематиці були присвячені праці як теоретиків музики (починаючи від Античності аж до наших сучасників), так і математиків, фізиків, природознавців (Д'Аламбера, Ляйбніца, Ейлера, Гельмгольца та ін.). До останнього часу математичні методи використовувались достатньо обмежено і, в основному, для пояснення лише окремих сторін музики або деяких понять її теорії. Приблизно з середини ХХ століття виникла ідея тотальної математизації не лише теорії музики, але й творчого процесу композитора. Ця ідея доволі активно розробляється в закордонній (західній) літературі, зокрема, в працях М. Сімоні (Mary Simoni), Г. Діаз-Херез (Gustavo Diaz-Jerez), Е. Сміт (E. Smith), Д. Рандела (Don Randel), Я. Ксенакіса (I. Xenakis).

В українській літературі спостерігається практично повна відсутність досліджень на цю тему, що й зумовлює **актуальність пропонуваної статті.**

**Об'єктом** дослідження є музично-теоретична думка Античної Греції. **Предметом** – піфагорійський стрій та співвідношення його інтервалів.

**Мета** статті – описати наукову теорію музики піфагорійців, зокрема їх концепцію музичного строю та музичних інтервалів.

**Основні завдання:**

- описати специфіку музично-теоретичної думки піфагорійців;
- описати принципи побудови піфагорового строю;
- виявити взаємозв'язки та співвідношення інтервалів піфагорового строю.

Констатуючи факт все тіснішого зближення музики з точними науками, зауважимо, що ідея пошуку зв'язків між музикою і математикою, використання формальних інструкцій та процесів для створення музики сягає далеко в глибину музичної історії, аж до часів античної Греції. Наприклад, Піфагор вірив у наявність прямого зв'язку між законами природи і гармонією звуків, вираженою в музиці. У своїй книзі «Історія західної музики» американський музикознавець Дональд Гроут писав: «Слово „музика” мало для давніх греків набагато ширше значення, ніж для нас. У вченні Піфагора та його послідовників, музика була невіддільною від чисел, які, як вважалося, були ключем до цілого духовного і фізичного всесвіту. Таким чином, система музичних звуків і ритмів, виражена в числах, втілює гармонію космосу і пов'язується з нею» [3, с. 31].

В основні піфагорійської доктрини було твердження, що всі речі є числами, або пов'язані з числами, або поводяться як числа [5, с. 202].

Цікаво, що піфагорійська теорія про повсюдну присутність чисел бере початок з вивчення музичних інтервалів, які дозволяли досягнути стану «орфічного катарсису»<sup>1</sup> відповідно до віри в те, що музика «очищає душу», як медицина очищає організм [5, с.201].

«Греки зробили одне з найбільших людських відкриттів: вони відкрили могутність розуму. Саме греки класичного періоду, який сягнув найвищого розквіту в VI–III ст. до н. е., зрозуміли, що людина наділена здатністю мислити, наділена розумом, який, спираючись на спостереження або досвід, може відкривати істини» [2, с. 16].

---

<sup>1</sup> **Орфізм** – давньогрецький релігійний рух, що виник у 6 столітті до н. е. і мав на меті за допомогою обрядів «очищення» і «праведного» орфічного образу життя спокутувати давній гріх титанів, який, за переконаннями послідовників даної релігійної течії, лежить на всьому людстві (див. Загрей). Засновником таких обрядів та автором поем, в яких були викладені засади нової релігії, вважався міфічний співець Орфей.

Нелегко дати відповідь на питання про те, що привело греків до їхнього відкриття. Перші спроби осмислити оточуючий світ були зроблені в Іонії, грецьких поселеннях в Малій Азії. Натурфілософія іонійців представляла собою скоріше набір сміливих висновків, хитрих здогадок і блискучих інтуїтивних прозрінь, ніж результат ретельних наукових досліджень. Філософи іонійської школи так пристрасно прагнули побачити картину світу в цілому, що вдалися до широких узагальнень, минаючи проміжні етапи. Але разом з тим містичні уявлення про природу вони замінили раціональним підходом. Квінтесенцію поглядів іонійців прекрасно відображають слова Анаксагора: «Розум править світом» [2, с. 17].

Вирішальним кроком на шляху до нового пояснення світу стало застосування математики. Цей крок вимагав не меншої інтуїції та глибини думки, ніж віра в силу людського розуму. А полягав він в тому, що, на думку стародавніх греків, план, за яким збудовано всесвіт, має математичний характер – і тільки математика дозволить людині відкрити цей план.

Математика як логічний висновок і засіб пізнання природи – витвір стародавніх греків, яким вони почали серйозно займатися приблизно за шість століть до нової ери. Людський розум всесильний, і якщо цю могутню силу прикласти до вивчення природи, то математичний план, який лежить в основі світобудови, вдасться розкрити і пізнати.

Можливо саме завдяки такому підходу греки стали першими, кому вистачило відваги і генію дати раціональне пояснення явищ природи. Невгамовний потяг греків до пізнання був позначений хвилюючими переживаннями пошуку і дослідження. В процесі цих пошуків, вони відкривали нові ділянки людського знання, прокладаючи таким чином шлях для наступних поколінь.

Першою науковою школою, яка запропонувала свій варіант «математизованого» плану будови всесвіту, були піфагорійці, очолювані Піфагором Самоським (близько 585–500 рр. до н. е.)<sup>2</sup>.

Піфагорійці жили на півдні Італії. Натхнення для своїх філософських досліджень вони почерпнули з релігійних поглядів греків, в яких центральне місце відводилось очищенню душі та її звільненню

---

<sup>2</sup> За переказами Піфагор був першим мислителем, який назвав себе філософом, а всесвіт – космосом (що з грецької означає устрій, порядок). Він розглядав космос як закономірне впорядковане ціле, підпорядковане законам гармонії і чисел.

від скверни й в'язниці тіла. Натурфілософія піфагорійців мала яскравий раціональний характер. Вони зауважили, що деякі, якісно цілком відмінні, явища мають однакові математичні властивості. З цього піфагорійці зробили висновок, що саме математичні властивості відображають суть явищ. Точніше, суть явищ вони вбачали в числі та числових співвідношеннях. В їхньому поясненні природи числу відводилась роль начала начал. Піфагорійці вважали, що всі тіла складаються з фундаментальних частинок, «одиниць буття», які в певних комбінаціях відповідають різним геометричним фігурам. В сумі ці одиниці дають матеріальний об'єкт. Число було матерією і формою Всесвіту. Звідси і основна теза вчення піфагорійців: «всі речі суть числа» [2, с. 18].

Особливої уваги надавали вони числам 1, 2, 3, 4, які утворювали так званий *тетрактис*. Піфагорійці вважали, що всі об'єкти в природі складаються з четвірок, таких, як чотири геометричних елементи: точка, лінія, поверхня і тіло.

Вчення піфагорійців сьогодні може видатись дивним, оскільки для нас числа – абстрактні поняття, а речі – фізичні, або матеріальні, об'єкти. Звичне для нас поняття числа виникло в результаті абстрагування, а раннім піфагорійцям така абстракція була не притаманна. Для них числа були точками або частинками. Кажучи про трикутні, квадратні, п'ятикутні та інші подібні числа, піфагорійці мали на увазі набори точок, камінців, або інших дрібних предметів, розташованих у формі трикутників, квадратів та інших геометричних фігур. Пізніше, розвинувши та вдосконаливши своє вчення, піфагорійці почали розглядати числа як абстрактні поняття, а об'єкти – як конкретні реалізації чисел. Саме в такому аспекті слід, напевне, розуміти висловлювання знаменитого піфагорійця V ст. до н. е. Філолая: «Якби не число і не його природа, ніщо існуюче не можна було б збагнути ні саме по собі, ні в його відношенні до інших речей... Потужність чисел проявляється, як неважко зауважити... в усіх вчинках і думках людей, в усіх ремеслах та музиці» [2, с. 18].

Така абсолютизація ролі числа призвела до того, що всі сфери зацікавлення піфагорійців виявились пов'язаними між собою через арифметику та геометрію<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup> Показовою в цьому сенсі є астрономічна теорія піфагорійців. Вони вважали, що тіла, рухаючись в просторі, продукують звуки. Можливо, на таку думку їх наштотхнуло спостереження: якщо розкручувати камінь, прив'язаний на мотузці, – він зі свистом розтинатиме повітря. Піфагорійці вважали, що тіло яке рухається швидше дає вищий звук, ніж тіло яке руха-

Органічний синтез акустики, арифметики, геометрії, фізики та астрономії становить основне піфагорійське переконання і є визначним культурним історичним явищем.

В житті античної Греції музика займала надзвичайно важливе місце. Вона була необхідним компонентом різноманітних уcht, свят, театральних вистав, змагань і т. п. Греки відводили для музики особливу роль в процесі виховання, приписуючи їй властивість великого етичного впливу на людину. Теорія етосу дуже активно розроблялась грецькими вченими. Музика була обов'язковим предметом викладання в школі. Цілком природно тому, що в епоху розквіту грецької культури (VI–IV ст. до н. е.), в епоху знаменитих драматургів – Есхіла, Софокла, Еврипіда і неперевершених скульпторів Фідія і Праксителя, музика опиняється в центрі уваги найвидатніших вчених і філософів Греції. До музики проявляє інтерес і такий різносторонній мислитель, як Піфагор.

Справді геніальними були праці Піфагора з астрономії. Вони приблизно на дві тисячі років випередили людство і справили вирішальний вплив на Коперніка<sup>4</sup>. Ще більш значущими виявились його знахідки в теорії чисел, алгебрі та геометрії. Але для нас особливо цікавими є відкриття Піфагора в ділянці музичної акустики, які безпосередньо пов'язані з його відкриттями в математиці. Він математично обґрунтував розвинуту шляхом слухового відбору складну музичну систему Греції.

Яким же чином вдалось пов'язати музику з математикою та розділом фізики – акустикою?

---

ється повільніше. Згідно астрономічних поглядів піфагорійців, планети рухаються тим швидше, чим далі вони від Землі. Таким чином звуки, які видають планети, змінюються залежно від віддаленості їх (планет) від Землі і утворюють гармонічне співзвуччя. Як і кожна гармонія, така «музика сфер» може бути зведена до суто числових співвідношень. Тому рух планет теж можна звести до числових співвідношень. Ми ж не чуємо музику небесних сфер тому, що звикли до неї від народження. Один з «найбільш послідовних» древніх теоретиків музики, а також провідний астроном свого часу Птолемей, вважав, що математичні закони лежать в основі систем і музичних інтервалів, і небесних тіл, і що певні модуси (лади) і навіть певні ноти відповідають певним планетам, їх руху та їх відстаням одна від одної. Ця ідея, зокрема, була викладена Платоном в поетичній формі в міфі про «музику сфер» – нечутну музику продуковану рухом планет.

<sup>4</sup> Піфагор вважав Землю кулею, яка рухається навколо Сонця. Навіть у XVI ст., на момент виходу праці «Про обертання небесних сфер» Н. Коперніка в 1543 році, це вчення називалось піфагорійським.

Піфагорійцям вдалось, завдяки двом відкриттям, звести музику до простих співвідношень між числами. Перше відкриття, – що висота звуку, залежить від довжини струни, яка коливається, а друге – що гармонічні інтервали дають струни, довжини яких відносяться між собою, як цілі числа. Відкриття ці було зроблено експериментальним шляхом, завдяки дослідом на монохорді<sup>5</sup>. А саме, піфагорійці зауважили, що на монохорді можна отримати звуки не лише шляхом збудження коливань цілої струни, але і її частин. Причому  $1/2$  струни звучить на октаву (за сучасною термінологією) вище,  $2/3$  струни – квінтою вище, а  $3/4$  струни – квартою вище від основного тону, який дає ціла струна.

Ці інтервали (за переказами вони отримали застосування під час настроювання ліри Орфея) стали основними інтервалами так званого *піфагорового* строю<sup>6</sup>. Решта інтервалів були знайдені послідовниками Піфагора за допомогою обчислень, як похідні від квінти. Тобто, формування піфагорового строю здійснювалось не дослідним, а математичним способом. Він полягав у наступних міркуваннях: оскільки  $2/3$  цілої струни дають звук на квінту вище її основного тону, а  $3/4$  цілої струни – звук квартою вище від того ж тону, то  $2/3$  будь-якої частини струни повинні дати звук квінтою вище цієї частини, а  $3/4$  будь-якої частини – звук квартою вище цієї частини.

Таким чином, якщо основний тон струни є, наприклад, *c*, то  $2/3$  цієї струни дасть звук на квінту вище, тобто *g*. Приймаючи  $2/3$  струни за новий цілий відрізок, знову візьмемо від нього  $2/3$  і отримаємо третій відрізок струни, рівний  $4/9$  від всієї довжини струни ( $2/3 \cdot 2/3 = 4/9$ ). Він дасть звук на дві квінти або на нону вище від основного тону цілої струни, тобто звук *d'*. Цей звук лежить за межами октави *c* – *c'*. Щоб перенести його на октаву вниз, тобто звести (як і всі далі отримані нами звуки) в межі однієї октави, подвоїмо довжину відрізка струни, що дає цей звук:  $2 \cdot 4/9 = 8/9$ .

---

<sup>5</sup> Музичний інструмент, що складався зі струни, натягнутої на резонансний корпус. На монохорді, спеціально сконструйованому Піфагором, була ще шкала з поділками, які при вкороченні звучної частини струни дозволяли визначати, яка частина її (струни) звучить [3, с.12].

<sup>6</sup> Піфагоровим прийнято називати музичний стрій, що утворюється шляхом послідовної побудови чистих квінт і зведення всіх отриманих звуків в межі одного октавного зворяду.

Отже, отриманому звуку  $d$   $\frac{8}{9}$  струни. Наступна квінта дасть  $\frac{2}{3}$  від  $\frac{8}{9}$ , тобто  $\frac{16}{27}$  струни. Їй відповідатиме звук  $a$ ,  $\frac{2}{3}$  від  $\frac{16}{27}$ , тобто  $\frac{32}{81}$  струни дасть звук  $e^1$ . Оскільки він лежить за межами октави  $c - c^1$ , то беремо замість нього звук  $e$ . Останньому відповідає  $2 \cdot \frac{32}{81} = \frac{64}{81}$  струни. На кінець,  $\frac{2}{3}$  від  $\frac{64}{81}$ , тобто  $\frac{128}{243}$  струни, дає звук  $h$ .

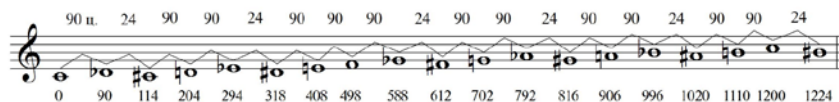
Тепер, розташувавши всі знайдені звуки в порядку зростання (або спадання) їх висоти і підписавши під ними відповідні частини струни<sup>7</sup>, ми отримаємо діатонічну мажорну гаму піфагорової настрійки, в якій частотні співвідношення між звуками виражені в частинах струни:

$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$a$	$h$	$c^1$
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$

(81/64 = 408 центів)

Кожен інтервал піфагорового строю отримується шляхом тієї чи іншої кількості квінтових ходів (вверх або вниз від вихідного звуку з наступними октавними перенесеннями), і має єдиний кількісний вираз. До того ж утворений квінтовий ланцюг має ту особливість, що кожна його наступна ланка породжує звук з новою назвою (тобто звуки в квінтовому ланцюгу не повторюються).

Випишемо частину звукоряду піфагорового строю<sup>8</sup>:



Видно, що цей звукоряд утворює послідовність малих секунд (діатонічних півтонів) розміром 90 центів та менших інтервалів («мікроінтервалів») величиною 24 центи (або  $\frac{73}{74}$ ). В стародавній Греції інтервал, менший від  $\frac{1}{8}$  цілого тону, називався *комою*. «Мікроінтервал» з виписаного звукоряду становить близько  $\frac{1}{9}$  тону.

<sup>7</sup> Зв'язок висоти звуку з частотою коливань був визначений тільки через 2200 років після Піфагора. Це відкриття належить французу Марену Мерсену – одному з учнів знаменитого Галілео Галілея.

<sup>8</sup> Числа над нотоносцем показують в центах величину інтервалу між сусідніми звуками. Числа під нотоносцем відображають величину інтервалу між першим і даним звуком.

Він отримав назву *піфагорової коми*. Вона показує нам, наскільки хроматичний півтон піфагорового строю більший за діатонічний.

Якщо взяти кілька перших звуків натурального гармонічного звукоряду і порівняти їх висоту з тими ж звуками піфагорійської настройки, то неважко зауважити повне співпадіння за висотою 1-го, 2-го, 3-го, 4-го, 6-го, 8-го, 9-го звуків (4-й, 6-й, і 8-й звуки є октавними повтореннями 2-го і 3-го звуків, 9-й обертон співпадає з піфагорійською ноною). П'ятий звук натурального звукоряду розходиться за висотою з аналогічним звуком квінтової настройки. Саме у величині великої терції проявляється одна з дуже важливих рис піфагорового строю.

Велика терція у цьому строї отримується як четверта квінта у квінтовому ланцюгу з її наступним перенесенням на дві октави вниз. Піфагорійська велика терція з інтервальним коефіцієнтом  $^{81}/_{64}$  рівна 408 центів. Вона є значно ширшою ніж велика терція натурального звукоряду, величина якої, як п'ятого обертону ( $^{5}/_{4}$ ), рівна 386 центів.

Щоб порівняти величину дробів  $^{81}/_{64}$  і  $^{5}/_{4}$ , їх треба звести до спільного знаменника, яким в даному випадку є 64. Тоді  $^{5}/_{4} = ^{80}/_{64}$ . Різниця між цими інтервалами (або відношення між двома дробами) рівна  $^{81}/_{64} : ^{80}/_{64} = ^{81}/_{80}$ . Інтервал  $^{81}/_{80}$ , рівний 22 центам (приблизно  $^{1}/_{10}$  цілого тону), був відкритий в II ст. н. е. грецьким акустиком Дідімом і отримав назву дідімової або синтонічної коми.

Інтервали піфагорового строю (за винятком октави) є похідними від квінти, тому піфагорів стрій називають строєм однофакторним. Покажемо, що такий стрій є незамкнутим. Справді, нехай  $\nu$  – частота коливань вихідного звуку. Оскільки наступний звук отримується як квінта ( $^{3}/_{2}$ ) від попереднього, то його частота буде  $^{3}/_{2}\nu$ . Відповідно, частота  $n$ -го звуку в цьому ряді буде рівна  $(^{3}/_{2})^n \nu$ , де  $n$  – натуральне число (тобто  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$ ). Очевидно, що  $^{3}/_{2}$  ні в якому степені не дасть ціле число, а це означає, що ми ніколи не отримаємо звуку з частотою  $2\nu, 3\nu, 4\nu, 5\nu$  і т. д., тобто, кратною частоті вихідного звуку. Отже, не отримаємо октавного подвоєння, потроєння і т. д. вихідного звуку.

Для вираження співвідношень між основними інтервалами строю піфагорійці використовували і дуже популярні у них пропорції. Переважно розглядали три пропорції: арифметичну ( $a - m = m - b$ ), геометричну ( $a : g = g : b$ ) та гармонічну ( $(a - h) : a = (h - b) : b$ ) (де  $a, b, m, g, h$  – цілі додатні числа).



До встановлених числових співвідношень між основним тоном, квартою, квінтою та октавою вказані пропорції мали такі застосування:

– відношення основного тону (1), квінти ( $\frac{3}{2}$ ) та октави (2), тобто  $1 : \frac{3}{2} : 2$ , розумілось як арифметична пропорція. Справді:

$$2 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - 1;$$

– геометричну пропорцію піфагорійці вбачали в рівності відношень між тоном (1) і квартою ( $\frac{4}{3}$ ) та квінтою ( $\frac{3}{2}$ ) і октавою (2):

$$1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{2} : 2 \quad \text{і} \quad 1 : \frac{3}{2} = \frac{3}{2} : 2;$$

– відношення тону (1), кварта ( $\frac{4}{3}$ ) і октави (2), тобто  $1 : \frac{4}{3} : 2$ , давало гармонічну пропорцію, оскільки

$$(2 - \frac{4}{3}) : 2 = (\frac{4}{3} - 1) : 1.$$

Дуже цікавою була також геометрична інтерпретація музичних тонів. Тон мислився у вигляді куба. Тоді кварта прирівнювалась до ікосаедра, квінта – до октаедра, октава – до тетраедра.

Після того як піфагорійці «звели» астрономію і музику до числа, музика і астрономія виявились пов'язаними з арифметикою і геометрією, і всі чотири дисципліни почали вважатись математичними. Вони увійшли в програму загальної освіти, причому таке їх становище збереглося аж до середньовіччя. В середньовіччі комплекс загальноосвітніх дисциплін, який складався з арифметики, геометрії, музики і астрономії, отримав назву *квадрівіум*.

Вже в IV ст. до н.е. грецький філософ Арістоксен, учень Арістотеля, запропонував замінити піфагорів стрій поділом чистої кварта на п'ять рівних півтонів. Практично це відповідає сучасному темперованому строю (чиста кварта рівна 498 центів;  $498 : 5 = 99,6$ ). Можна припустити, що новаторство Арістоксена було викликане жорсткістю звучання піфагорійських ізольованих терцій і секст. Виникла суперечка про якості обох систем між послідовниками Піфагора (каноніками) і прихильниками Арістоксена (гармоніками). В умовах пануючого на той час в Греції одноголосся стрій Арістоксена збіднював виразові можливості інтонування мелодії, тому практичного поширення не отримав. Таким чином, піфагорів стрій вийшов переможцем з цієї першої сутички.

В II ст. н. е. інший грецький вчений, послідовник Піфагора, музичний акустик Дідім запропонував запровадити в музичний стрій в якості основного інтервалу «чисту» терцію розміром  $\frac{5}{4}$  (відомий тепер вже нам п'ятий звук натурального гармонічного звукоряду).

Це нововведення Дідіма мало принципове значення. В основі його музичного строю була вертикаль – гармонія, яка протиставлялась горизонталі (мелодії) піфагорового строю. Однак, пропозиція Дідіма, випередивши історію майже на півтори тисячі років, не знайшла сприятливого ґрунту для розвитку. Ідеї Дідіма були повернені до життя лише в кінці XV століття.

Теоретичне застосування піфагорійцями чисел і їх різних математичних властивостей були свого роду формалізмами, або первісними «алгоритмами», за якими греки створювали свої музичні системи. Однак такі «формалізми» стосувались в основному теорії, тоді, як їх конкретне застосування в музичній практиці залишається під питанням, оскільки давня грецька музика була здебільшого імпровізаційною. Ймовірно найбільше грецькі математичні гіпотези й теорії вплинули на формування системи музичних інтервалів і ладів, якими послуговувались музиканти, а таким чином вплинули і на процес виконання.

Беззаперечним є вплив піфагорійців на майбутні покоління музикантів і теоретиків музики. Грецький «піфагоризм», був сприйнятий візантійцями, від них перейшов до арабів, в Західну Європу, і, врешті-решт, він пронизав всю окцидентальну філософську думку. В основі музичних концепцій теоретиків від Арістоксена до Гукбальда, Царліно і Рамо лежала та сама піфагорійська ідея, злегка видозмінена, залежно від віянь часу. «Мимоволі напрошується висновок, що мистецтво, а, ймовірно, і всі права на інтелектуальну діяльність, належать світу чисел» [5, с. 202].

*Александра Тракало. Пифагорийская музыкальная доктрина. Стаття посвящена музыкально-теоретической концепции пифагорейцев. В частности, описано пифагоров строй, соотношения интервалов пифагорового строя и их связь с математикой того времени.*

**Ключевые слова:** пифагорейцы, пифагоров строй, интервал, число, пифагорова комма.

*Aleksandra Trakalo. Pythagorean musical doctrine. The article is about the music theory concepts of the Pythagoreans, in particular, Pythagorean scale, Pythagorean scale interval ratios and their relationship with the then mathematics are described.*

**Keywords:** Pythagoreans, Pythagorean scale, interval, number, Pythagorean comma.

## Література

1. Герцман Е. Античное музыкальное мышление / Е. Герцман. – Ленинград: Музыка, 1986. – 224 с.
  2. Клайн М. Математика. Утрата определённости [пер. с англ. Ю. Данилов] / Морис Клайн. – Москва: Мир, 1984. – 434 с.
  3. Grout D. J. A History of Western Music. 5<sup>th</sup> ed. / Donald Jay Grout, Claude V. Palisca. – New York : W. W. Norton & Company, 1996. – 843 pp. (с. 31)
  4. Ireland K. A Classical Introduction to Modern Number Theory / Kenneth Ireland, Michael Rosen – 2nd ed. – Springer New York, 1990. – 394 pp.
  5. Xenakis I. Formalized Music: Thought and Mathematics in Composition / Iannis Xenakis. – Bloomington : Indiana University Press, 1971. – 387 pp.
-