УДК 330.43

Сявавко М.С.,
доктор фізично-математичних наук, професор Львівського державного інституту новітніх технологій та управління ім. В'ячеслава Чорновола

ПІДВАЛИНИ ЕКОНОМЕТРІЇ ДРУГОГО ПОКОЛІННЯ

У статті на засадах псевдообернення розглянуто новий регуляризуючий метод визначення параметрів множинної моделі регресії та економетрики. Вивчаються також нечітко-інтервальна регресійна модель та аналогічна модель, що будується на ідемпотентному півкільці з двома арифметичними операціями: додавання та множення.
Ключові слова: *множинна модель, регресія,економетрика, ідемпотентне півкільце, аналіз, лінійна алгебра.*

In this article on principles of pseudo-rotation is considered a new regularization method of determination of parameters for set model of regression and ekonometricy. Also is studied a fuzzy-interval regressive model and analogical model which is built on idempotent half-ring with two arithmetic operations: addition and increase.
Key words: *set model, regression, econometrics, idempotent half-ring, analysis, linear algebra.*

Постановка проблеми. З кожним роком зростає потреба використання в економіці математики та її потужного апарату. Ще в 1967 році у своїй бібліографічній книжці "Я – математик" Норберт Вінер писав: "Частковий розділ соціології, що відомий під назвою економіки і який відрізняється від інших головним чином більш акуратним використанням числових мір для розглядуваних величин, також є розділом кібернетики завдяки кібернетичному характеру самої соціології". Науковці і дослідники в галузі економіки все більшою мірою використовують якісні параметри оцінки соціально-економічних процесів, застосовуючи інструментарій ідемпотентної математики. З огляду на сказане тема дослідження є актуальною.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Економіка як наука виникла в 1776 році, коли шотландський філософ Адам Сміт (1723 – 1790) опублікував свою книгу "*An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*" (Дослідження природи і причини багатства народів). Важливий внесок в економіку був зроблений ще давньогрецькими вченими та іншими попередниками Сміта, але тільки Сміт вперше спромігся оформити цю галузь знань як науку, використавши ідею, що будь-яку економіку слід розглядати як складову з окремих агентів, що бажають максимізувати свій власний економічний добробут. Будь-який економіст вважає, що люди роблять вибір, який провадить до найкращих для них результатів. Математичне трактування "найкращих результатів", або *корисності* було вперше формалізоване Леоном Валрасом (1874 – 1910), уточнене Френком Рамсеєм (1931 р.), а надалі вдосконалене Джоном фон Нейманом і Оскаром Моргенштейном (1944 р.). У своїй роботі, що вийшла в Лузіані в 1871 р., Л. Валрас писав: "Чиста теорія економіки є наукою, що у всьому нагадує фізико-математичні науки". Цікавою є також думка Л. Валраса про співвідношення математико-економічної теорії з економічною практикою. За аналогією з фізико-математичними науками ми "...повинні взяти з практики такі основні поняття, як обмін, запит, пропозицію, ринок,капітал, дохід, послуги, продукти. Від цих реальних понять потрібно абстрагуватися і визначити відповідні поняття. Звернення до дійсності та практичного застосування надалі можливе тільки після створення теорії... Я не стверджую, що цим вичерпується вся економіка. Наприклад, сила і швидкість також є вимірюваними поняттями, але математична теорія сили і швидкості не вичерпує механіки. Тим не менш теоретична механіка, без сумніву, повинна передувати прикладній. Так само чиста економіка повинна передувати прикладній економіці...".

До вище сказаного слід додати, що ще в 1947 р. Герберт Саймон показав, що кращий опис фактичної поведінки людини дають моделі, що ґрунтуються на *задоволенні* (прийнятті рішень, які є "достатньо прийнятними"), а на моделях, що передбачають рутинний розрахунок оптимального рішення. Цей вчений і є першим дослідником в галузі штучного інтелекту. Його роботи в 1978 році були відзначені Нобелівською премією з економіки.

Власне економіка дала поштовх до створення "нової математики". Про це вже вказували батьки кібернетики і теорії систем Дж. фон Нейман та Л. фон Берталафі:

– логіка буде змушена зазнати метаморфоз і перетворитися в неврологію – виконувача опорної та живильної функції науки;

– більшої уваги слід приділити створенню "гештальт-математики", в засадничих положеннях якої лежала б не кількість, а відношення, тобто форма і порядок.

Все це вимагає перегляду найважливіших математичних постулатів:

– "увійшов у вічність дівочий стан абсолютної значимості, незаперечної доказовності всього математичного; настала епоха протиріч..." (Ф. Егнельс);

– "у наступні роки розмиті (нечіткі) алгоритми та стратегії керування матимуть... все більше визнання..." (Лотфі Заде);

– "зміст науки не обмежується теоріями, гіпотезами, моделями, створенням ними картини світу: в основі вона складається з наукових фактів та їх емпіричних узагальнень і головним, живим змістом в ній є наукова праця живих людей...". Тут академік В. Вернадський солідаризується з найвидатнішим українським філософом XIX ст. Панфілом Юркевичем: "якщо з теоретичного погляду можна сказати, що все гідне бути, гідне й нашого знання, то в інтересах вищого морально-духовного утворення цілком справедливим було б положення, що ми маємо знати лише те, що гідне нашої моральної й богоподібної сутності. Дерево пізнання не є деревом життя, а для духу його життя уявляється чимось дорожчим, ніж його знання".

Мета і завдання дослідження. Мета статті полягає у дослідженні, на підставі наукових віянь, однієї з важливих, точніше найважливіших, моделей економічного моделювання-економетрії.

Виклад основного матеріалу. На таких засадах виникла нова вітка математики – ідемпотентна математика (математика прихованих можливостей). Ці можливості можуть виявитися за певних умов. "Нова" математика виникла як двійник або "тінь" таридиційної. Основна парадигма математики прихованих можливостей – це ідемпотентний принцип евристичної відповідності між важливими, корисними та цікавими конструкціями і результатами традиційної математики над числовими полями в аналогічні конструкції та результати над півкільцями та півполями.

Математичні підходи починають нагадувати безпосередні міркування людини.

У запропонованій роботі на підставі новітніх наукових віянь досліджується одна з важливих, точніше найважливіших, моделей економічного моделювання – економетрії.

1. Класичний регресійний аналіз.

Класичний регресійний аналіз дозволяє оцінити як одна змінна залежить від іншої (або інших) і яким є розкид значень залежної змінної навколо прямої, що визначає цю залежність. Ця оцінка та відповідні довірчі інтервали дозволяють передбачити значення залежної змінної і визначити точність цього передбачення.

Результати регресійного аналізу можна відобразити у достатньо складній цифровій або графічній формі. Але в економетрії (регресійному аналізі) часто цікавляться не передбаченням значення однієї змінної згідно зі значеннями іншої (або інших), а просто характеристикою тісноти (сили) зв’язку між ними, що виражена одним числом. Ця характеристика називається коефіцієнтом кореляції, яку найчастіше позначають буквою. Цей коефіцієнт знаходиться в межах. Знак коефіцієнта кореляції показує напрям зв’язку (прямий чи обернений), а абсолютна величина – щільність (близькість) зв’язку. Коефіцієнт, рівний визначає такий самий жорсткий зв’язок, що і . При відсутності зв’язку коефіцієнт кореляції дорівнює нулю (див. рис. 1).

Різноманіття варіацій регресійного аналізу пов’язане з такими жорсткими обмеженнями:

– збурення регресійних рівнянь розподіляється за нормальним законом;

– збурення повинно бути гомоскедастичним, тобто мати сталу дисперсію, бути вільним від автокореляції та просторової кореляції. Нагадаємо, що автокореляція – це взаємозв’язок послідовних елементів часового чи просторового ряду даних. Автокореляція є наслідком того, що дисперсія залишків є сталою, але спостерігається їх коваріація. Вона може виникнути і через помилкову специфікації економетричної моделі. Інколи необхідно ввести в модель нову незалежну змінну;

– регресори (чинники) повинні бути вільними від суттєвої колінеарності;

– довжина рядів даних (вхідних вибірок) повинна бути більшою за число регресорів, до того ж ряди даних повинні бути вибрані згідно з великим (принаймні 10 – 15 років) проміжком часу;

– регресори і коефіцієнти регресії повинні бути детермінованими величинами, незмінними у просторі та часі тощо.

Таким чином, апріорі допускається, що кожне регресійне рівняння – ідентифіковане, лінійна регресійна модель – коректно специфікована, а матриця даних містить повну інформацію для оцінки параметрів.

Означені жорсткі обмеження можна застосувати для опису повільно змінних економічних процесів, тобто за умов стабільної економіки. Для економіки, що швидко трансформується, вони здебільшого непридатні, оскільки не відповідають об’єктивним умовам її функціонування та дослідження, а саме через:

– дефіцит знань про структуру й поведінку суб'єктів господарювання;

– динаміку процесів, які відбуваються в економічному середовищі;

– причин, що породжують конфліктні ситуації;

– невизначеність в оцінках можливих варіантів розвитку економіки;

– відсутність або неповноту необхідних вхідних даних для моделювання тощо.

Таким чином, конструювання і використання економіко-математичних моделей в нестабільній економіці вимагає розробки нової методології, нових методів дослідження, цілеспрямованого розширення можливостей математичного апарату та інструментальних засобів статистичного чи експертного аналізу економічної інформації, які ґрунтувались би на системному підході до розгляду всього комплексу проблем, які досліджуються.

До цієї нової методики слід віднести і дослідження задач лінійної регресії на засадах псевдообернення, і за умов нечіткої вхідної інформації (або згідно з теорією ідемпотентної математики).

2. Лінійна регресія та економетрика на засадах псевдообернення.

Нехай y – випадкова величина, а її математичне сподівання $M(y)$ лінійно залежить від n змінних $a_1, ...a_n$:

$$M(y) = \Theta^1 a_1 + \cdots + \Theta^n a_n \qquad (1)$$

з коефіцієнтами Θ^i, що підлягають оцінці згідно спостережених значень y.

Змінним a_j надають m серій значень, що складають матрицю розміру $m \times n$:

$$\begin{matrix} a_1^1, & \cdots, & a_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^m, & \cdots, & a_m^n \end{matrix} \qquad (2)$$

При цьому значення a_j^i розглядають як вірогідно відомі.

Матрицю A називають *матрицею регресії*, а a_j змінні регресорами. Регресорами можуть бути функції однієї змінної або функції від декількох змінних; можна також вважати всі a_j незалежними змінними.

Лінійної незалежності стовпців матриці регресії не вимагатимемо.

За кожного набору значень (2) величина приймає певне значення. Позначимо його через $\eta^1,\ldots,\eta^m$. Тоді:

$$\eta^1 = a_1^1\Theta^1 + \cdots + a_m^1\Theta^n + \varepsilon^1 ,$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\eta^m = a_1^m\Theta^1 + \cdots + a_n^m\Theta^n + \varepsilon^m ,$$

або в матричній формі

$$\eta = A\Theta + \varepsilon \qquad (3)$$

Згідно з (1) випадкові величини мають нульові математичні сподівання. Їх називають *похибками*, хоча насправді вони можуть бути справжніми відхиленнями значень величини від її математичного сподівання і не обов’язково помилками вимірювань.

Якщо ε^i є похибками вимірювань, то природньо вважати, що вони не корельовані між собою і мають однакові дисперсії.

У відношенні до системи рівнянь

$$\eta = A\Theta \qquad (4)$$

стовпець ε є нев’язкою, що виникає через наявний набір параметрів

$\Theta = \left\| \Theta^1,\ldots,\Theta^n \right\|$.

Псевдорозв’язок $\hat{\Theta}$ системи (4) є *оцінкою* наявного набору Θ, що одержаний за методом найменших квадратів. Він дорівнює

$$\Theta^+ = A^+\eta \qquad (5)$$

В (5)

$$A^+ = \frac{B_{r-1}}{d_r}A^T \qquad (6)$$

де B_s і d_s визначаються рекурентно за схемою

$$\begin{array}{ll}
d_1 = trH & B_1 = d_1 I - B_0 H \\
d_2 = \frac{1}{2}tr(B_1 H) & B_2 = d_2 I - B_1 H \\
\ldots \qquad \ldots & \ldots \\
d_k = \frac{1}{k}tr(B_{k-1}H) & B_k = d_k I - B_{k-1}H \\
\ldots \qquad \ldots & \ldots \\
d_{n-1} = \frac{1}{n-1}tr(B_{n-2}H) & B_{n-1} = d_{n-1}I - B_{n-2}H \\
d_n = \frac{1}{n}tr(B_{n-1}H) & O = d_n I - B_{n-1}H
\end{array} \qquad (7)$$

У (6, 7) $H = A^T A$, а r та tr означають, відповідно, ранг та слід матриці A.

У формулі (6) $dr \neq 0$, де d_r – крайній відмінний від нуля елемент, що визначається через рекурентні формули (7); $r \leq n$.

Якщо стовпці матриці регресії лінійно незалежні, то оцінка Θ^+ із (5) незміщена. Нагадаємо, що оцінка Θ^+ параметра Θ є незміщеною, якщо виконується рівність $M(\Theta^+)=\Theta$.

На підставі властивостей математичного сподівання маємо

$$M(\Theta^+)=A^+A\Theta \qquad (8)$$

У загальному випадку формула (8) стверджує незміщеність тільки для деяких проекцій Θ^+.

Можна переконатися в тому, що дисперсія величини Θ^+ оцінюється виразом

$$D\Theta^+ = \sigma^2(A^T A)^+ \quad (9)$$

Позначимо через $\varepsilon^+ = \eta - A\Theta^+$. Тоді для оцінки параметра маємо

$$(\sigma^+)^2 = \frac{\left|\varepsilon^+\right|^2}{m-r}.$$

Детальніше про це див. в роботі [1].

Приклад 1. Нехай в (4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \eta = \begin{pmatrix} 3 \\ 22 \\ 20 \\ 30 \\ -2 \\ 14 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Тут $r = 3$ і за алгоритмом (7) розв'язок (5) матиме вигляд

$$\Theta^+ = \frac{B_2}{222824}\begin{pmatrix} 159 \\ 169 \\ -18 \\ 479 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 7953 & 914 & 2050 & -1955 \\ 914 & 10540 & 2100 & -3478 \\ 2050 & 2100 & 5870 & -1666 \\ -1955 & -3478 & -1666 & 3209 \end{pmatrix}$$

Отже, $\Theta^+ = (2 \quad 1 \quad -1 \quad 3)^T$, $\varepsilon^+ = (-6; \ 1; \ 14; \ 1; \ 1; \ 1; \ -8; \ 1)^T$, $\sigma^+ \cong 7{,}76$.

3. Лінійна інтервальна регресійна модель

Для випадку застосування нечітких методів у бізнесі, на відміну від існуючих методів планування та управління, виникла можливість активно використовувати різноманіття думок осіб, котрі здійснюють планування та приймають рішення, а також врахувати нечітку інформацію, що виражена якісно, словами. Це дозволяє будувати модель у природний спосіб, залучаючи людину до планування, а одержаним розв’язкам надавати велику свободу тлумачення, будувати їх у зрозумілому для людини вигляді, а вже опісля надавати *ОПР* можливість зробити кінцевий висновок. У такому сенсі нечітку методологію можна розглядати як гнучку (м’яку) методологію, яка для бізнесу є більш реальною за умов постійно змінного світу.

Розпишемо (4) у вигляді

$$\eta = \tilde{A}_1\Theta^1 + \ldots\tilde{A}_n\Theta_n \qquad (10)$$

із нечіткими параметрами, функції належності яких мають вигляд рівнобедреного трикутника [2] (див. рис. 2).

Таке число $\tilde{A}_1$ записуватимемо так:

$$\tilde{A}_i = (a_i, c_i) \qquad (11)$$

Позначимо тепер через $a = (a_1, ..., a_n)$і $c = (c_1, ..., c_n)$ вектор-рядки, а $\Theta = (\Theta_1, ..., \Theta_n)$ вектор-стовпець. Тоді згідно з інтервальною арифметикою, що запропонована в [2], матимемо

$$\eta = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i,\ \sum_{i=1}^{n} c_i |\Theta_i| \right) = (a\Theta, c|\Theta|) \qquad (12)$$

Приклад 2.

$$(3,1)\cdot 2 + (4,2)\cdot(-1) = (2,4)$$

Тобто одержали інтервал з центром *2* і шириною *4*.

3.1. Зведення до задачі лінійного програмування

Відношення вкладення двох інтервалів A_i, A_j можна представити через такі нерівності

$$a_j - c_j \le a_i - c_i, \qquad a_j + c_j \le a_i + c_i \qquad (13)$$

Нехай N – число заданих вхідних і вихідних даних. Позначимо їх через $(\eta_i, \Theta_i)^*,\ i = \overline{1, N}$. При η_i цьому вихідні або спостережені змінні, а $x_i = (x_{i1}, ..., x_{in})$ вхідні вектори або пояснювальні змінні.

Лінійно-інтервальна модель

$$\eta_i^* = \tilde{A}_1^*\Theta_{i1} + \cdots + \tilde{A}_n^*\Theta_{in}$$

будується так:

Задані спостережені значення включаються в оцінюючий інтервал η^*_i, тобто для всіх i $\eta_i \in \eta_i^*$;

Ширина ^{i}-го оцінюючого інтервалу визначається як

$$\sum_j c_j \left|\Theta_{ij}\right| = c\left|\Theta_i\right|.$$

Бажано, щоб ця ширина була найменшою. Тому мінімізуватимемо суму значень ширини оцінюючого інтервалу, тобто визначатимемо інтервальні коефіцієнти

$\widetilde{A}_i^* = (a_i^*, c_i^*)$, мінімузуючи суму $S = \sum_{i=1}^{N} c\left|\Theta_i\right|$.

Таким чином, вимоги (10) і (11) можна звести до наступної задачі лінійного програмування:

$$\min \sum_{i=1}^{N} c\left|\Theta_i\right| \qquad (14)$$

за умов

$$\eta_i \geq a\Theta_i - c\left|\Theta_i\right|$$

$$\eta_i \leq a\Theta_i + c\left|\Theta_i\right|$$

$$c \geq 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

Іншими словами, шляхом розв'язання задачі лінійного програмування можна одержати коефіцієнти нечітких чисел

$$\widetilde{A}_i^* = (a_i^*, c_i^*).$$

Такий підхід дозволяє використати знання фахівців про коефіцієнти $\widetilde{A}_i^*$. Наприклад, про *i*-ий коефіцієнт маємо дуже непевні знання, але відомо, що він знаходиться в інтервалі $B_i = (\beta_i b_i)$. Тоді оцінюючий інтервальний коефіцієнт слід вказати в B_i, тобто ввести обмеження $\widetilde{A}_i < \widetilde{B}_i$. Використовуючи нерівність (13), запишемо

$$\beta_i - b_i \leq a_i - c_i, \qquad \beta_i + b_i \leq a_i + c_i \qquad (15)$$

Якщо до системи обмежень задачі (14) додати цей вираз і розв'язати цю розширену задачу, то можна одержати оцінки інтервальних коефіцієнтів, що відображають знання фахівців.

За такого підходу збільшення числа даних для розв'язання проблеми слід трактувати як набуття нової інформації або розширення можливої оцінки. За традиційного лінійного регресійного аналізу чим більшим є число даних, тим менша інтервальна оцінка. Саме в тому маємо і різницю методів.

Приклад 3 [3]. Використаємо (10) для прогнозування температури води у водосховищі, що утворене дамбою.

Використовуючи дані про температуру води і повітря з *1* липня до *31* серпня 1980 р. для однієї з дамб префектури Аїті, тільки за даними липня одержана оціночна модель, що відображає структуру температури води у водосховищі. Використовуючи цю модель, проведене прогнозування води у серпні.

Структурна фомула для температури води на глибині *10 м* має такий вигляд:

$$= \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1\Theta_{21}\Theta_{23} + \tilde{A}_2\Theta_{22}\Theta_{25} + \tilde{A}_3\Theta_{22}^2 + \tilde{A}_4\Theta_{21}\Theta_{23}\Theta_{22}^2 + \tilde{A}_5\Theta_{21}\Theta_{22}\Theta_{23}\Theta_{25} + \tilde{A}_6\Theta_{22}^2\Theta_{25}^2$$

де

$$\tilde{A}_0 = (13{,}46;\ 0{,}3),\ \tilde{A}_1 = (0{,}37\cdot 10^{-2}; 0),\ \tilde{A}_2 = (0{,}4\cdot 10^{-2}; 0),\ \tilde{A}_3 = (0{,}26\cdot 10^{-2}; 0),$$

$$\tilde{A}_4 = (0{,}02\cdot 10^{-4}; 0),\ \tilde{A}_5 = (0{,}03\cdot 10^{-4}; 0),\ \tilde{A}_6 = (0{,}77\cdot 10^{-4}; 0),$$

Θ_2 – спостережені значення температури води на глибині *5 м*:

Θ_{21} – за 1 день, Θ_{22} – за два дні, Θ_{23} – за три дні, Θ_{25} – за 5 днів до прогнозованого дня.

На рис. 3 подаються дані спостережень, а на рис. 4 і 5 зображені графіки оцінюючих значень температури води на глибині *10 м* і вказані інтервальні прогнозовані значення та реальні спостережені значення температури води на глибині *10 м* в серпні, відповідно. Допуск (ширина) інтервальних прогнозованих значень менший за $0{,}3^0C$. Серед спостережених значень за *31* день, дані за *22* день потрапляють в інтервал прогнозованих значень, що підтверджує надійність моделі оцінки.

3. Ідемпотентна інтервальна лінійна алгебра

Нехай R – поле дійсних чисел. Тоді R_{max} означає множину S=RU*{0}*, що забезпечена операціями $\oplus = max$ і $\odot$=+, де 0=-∞ і $1=0$. Аналогічно позначимо через R_{min} множину *RU{0}*, що забезпечена операціями $\oplus = min$ і $\odot$=+, де 0=+∞ і $1=0$.

Розглянемо також множину RU*{0,1}*, де 0=-∞ і 1=+∞, забезпечену операціями $\oplus = max$ і $\odot = min$. Вона визначає нечітку множину.

Отже, нехай S – множина, що забезпечена двома арифметичними операціями: додаванням $\oplus$ і множенням $\odot$. Трійку $\{S, \oplus, \odot\}$ називають ідемпотентним півкільцем, якщо вона задовольняє таким умовам:

додавання $\oplus$ і множення $\odot$ асоціативні: для всіх $x, y\ z \in S$

$x*(y*z)=(x*y)*z$;

додавання $\oplus$ комутативне: для всіх $x, y \in S$

$x \oplus y = y \oplus x$;

додавання $\oplus$ ідемпотентне: для всіх $x \in S$

$x \oplus x = x$;

множення $\odot$ дистрибутивне відносно додавання: для всіх

$x\odot(y\oplus z) = (x\odot y)\oplus(x\odot z); (x\oplus y)\odot z = (x\odot z\oplus(y\odot z)$

Детальніше про це див. в [4].

Операція $\oplus$ визначає на ідемпотентному півкільці канонічний частковий порядок: за означенням $x \le y$ тоді і тільки тоді, коли $x \oplus y = y$. Більш суворо $x < y$, $x \le y$, якщо і $x \ne y$.

Тут і надалі під операцією "*" розумітимемо операцію $\oplus$ або операцію Θ.

Визначимо алгебраїчні операції $\overline{\oplus}$, $\overline{\odot}$ в S таким чином: якщо $x, y \in S$, то $x \,\overline{*}\, y$ є точною нижньою межею множини всіх елементів $z \in S$ таких, що $x*y \subset z$. Таким чином, є "найкращим наближенням зверху до $x*y$ у сім'ї підмножини S".

Нехай S – ідемпотентне півкільце. *Замкнутий інтервал в S* – це множина вигляду

$$x = [\underline{x}, \overline{x}] = \{t \in S \mid \underline{x} \preceq \overline{x}\}$$

де $\underline{x}, \overline{x} \in S$ $(\underline{x} \preceq \overline{x})$ називаються *нижньою* і *верхньою* межами відповідно.

Зауважимо, що якщо x, y – інтервали в S, то $x \subset y$ тоді і тільки тоді, коли $\underline{y} \preceq \underline{x} \preceq \overline{x} \preceq \overline{y}$. Зокрема, $x = y$ тоді і тільки тоді, коли $\underline{x} = \underline{y}$ і $\overline{x} = \overline{y}$.

Зауваження. Нехай x, y – інтервали в S. Взагалі кажучи, множина $x*y$ не є інтервалом в S. Справді, розглянемо множину $S=\{O,a,b,c,d\}$ і нехай $\oplus$ задається таким відношенням порядку: O – найменший елемент, d – найбільший елемент, а a, b, c – непорівняльні одне з одним. Якщо Θ – нульове множення, тобто якщо $x \,\Theta\, y = 0$ для всіх $x, y \in S$, то S є ідемпотентним півкільцем без одиниці. Нехай $x=[O,a]$, $y=[O,b]$, тоді $x \oplus y=\{O,a,b,d\}$. Ця множина не є інтервалом, оскільки не містить елемент c, хоча $0 \leq d \leq c$.

Означення. Нехай S – ідемпотентне півкільце. *Слабким інтервальним розширенням* $\Im(S)$ півкільця S називають множину всіх замкнутих інтервалів S, що забезпечені операціями $\overline{\oplus}$, $\overline{\odot}$:

$$x \,\overline{*}\, y = [\underline{x} * \underline{y}, \overline{x} * \overline{y}] \text{ для всіх } x, y \in \Im(S).$$

Мають місце $\Im(S)$ твердження: *а*) слабке інтервальне розширення ідемпотентного півкільця S замкнуте відносно операцій $\overline{\oplus}$, і $\overline{\odot}$ утворює ідемпотентне півкільце; *б*) для довільних $x, y \in \Im(S)$ інтервал $x \,\overline{*}\, y$ є точною нижньою межею в $\Im(S)$ відносно впорядкування $\subset$ сім'ї всіх інтервалів, що містять множину $x*y$.

Зауважимо, що введена тут операція $\overline{\oplus}$ індукує в $\Im(S)$ канонічне часткове впорядкування $\leq$, причому $x \leq y$ тоді і тільки тоді, коли $\underline{x} \preceq \underline{y}$ і $\overline{x} \preceq \overline{y}$.

У темі 6 розглядалась множина $Matmn(S)$ всіх матриць з m рядками і n стовпчиками, коефіцієнти яких належать ідемпотентному півкільцю S.

Нехай тепер S – ідемпотентне півкільце, а $\Im(S)$ його слабке інтервальне розширення; тоді сукупність $Mat_{mn}(\Im(S))$ квадратних матриць порядку n є ідемпотентним півкільцем. *Нижньою* і *верхньою* матрицями довільної (не обов’язково квадратної) інтервальної матриці ($A=(a_{ij})\in Mat_{mn}(\Im(S))$, $A=(a_{ij})\in Mat_{mn}(\mathbb{I}(S))$) називають матриці $\underline{A}=(\underline{a}_{ij})$ і $\overline{A}=(\overline{a}_{ij})$.

Тут $\mathbb{I}(S)$ – *інтервальне розширення* ідемпотентного півкільця S з O:

$\mathbb{I}(S)=\{x\,|\,O\prec \underline{x}\preceq \overline{x}\}\cup\{[0,0]\}$,

що забезпечені операціями $\overline{\oplus}$, $\overline{\odot}$, які визначені раніше і в Темі 6. Зрозуміло, що $\mathbb{I}(S)\subset\Im(S)$.

Розглянемо дискретне стаціонарне рівняння Беллмана

$X = AX \oplus B$, (16)

де $A\in Mat_{nn}(\mathbb{I}(S))$, $B\in Mat_{ns}(\mathbb{I}(S))$, а X – невідома матриця з n рядками і s стовпцями.

В ідемпотентному інтервальному аналізі (мінімальний) алгебраїчний розв’язок системи (16) є точною зовнішньою інтервальною оцінкою об’єднаної множини мінімальних розв’язків $\sum min(A,B)$.

Пропозиція. Якщо матриця $A\in MAt_{nn}(S)$ піввизначена, то ітераційний процес $X_{k+1}=AX_k\oplus B$ стабілізується до мінімального розв’язку $X=A^*B$ рівняння (16) не більш ніж через n ітерацій для довільного початкового наближення $X_0\in MAt_{ns}(S)$ такого, що $X_0\leq A^*B$. Тут $A^* = I \oplus A \oplus A^2 \oplus \ldots$.

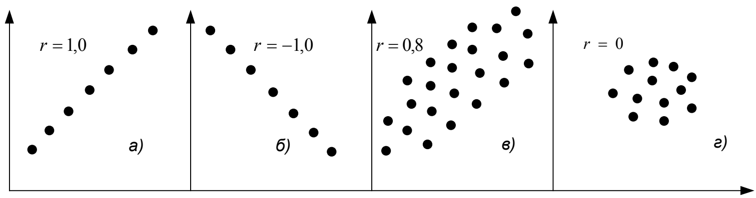

Рис. 1. Чим тіснішим є зв’язок між змінними, тим ближчою є величина коефіцієнта кореляції до 1

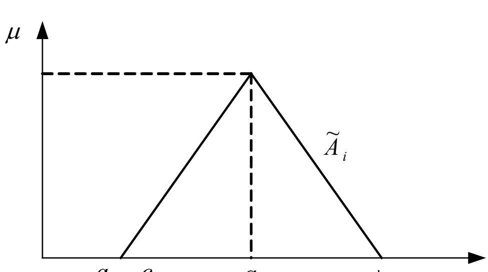

Рис. 2. Трикутне число із центром і шириною

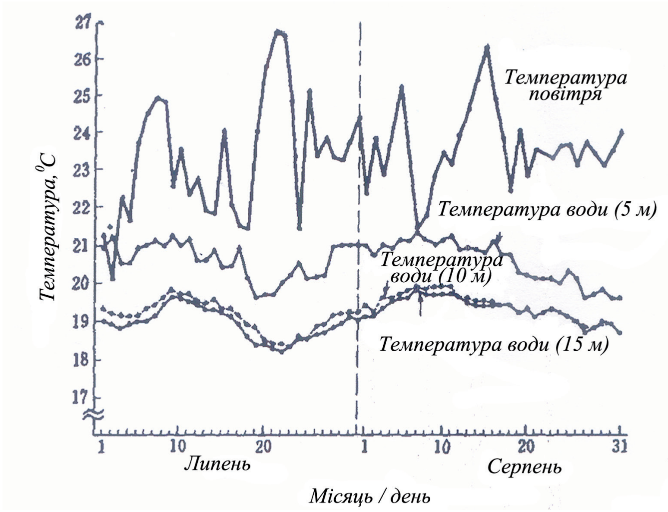

Рис. 3. Дані спостережень

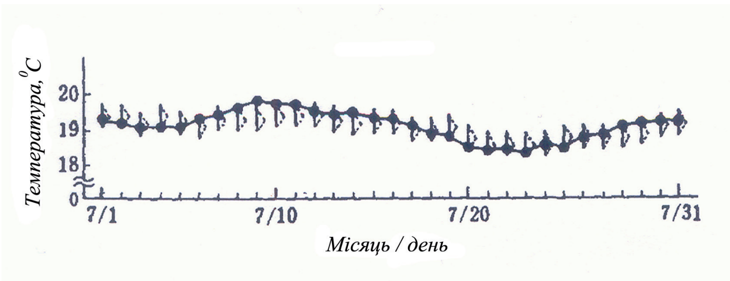

Рис. 4. Дані спостережень та оцінкові нечіткі числа (липень, глибина 10 м)

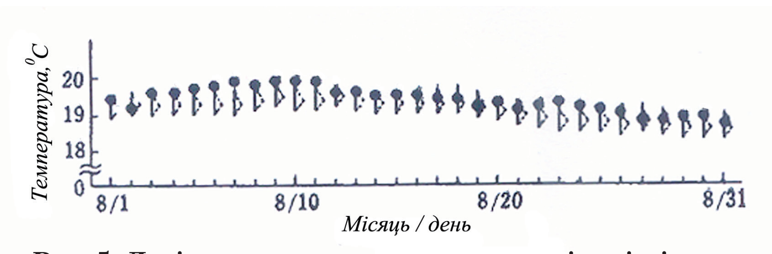

Рис. 5. Дані спостережень та прогнозовані нечіткі числа (серпень, глибина 10 м)

Висновки. Таким чином, на основі характеристики класичного регресійного аналізу, лінійної регресії та економетрики на засадах псевдообернення, лінійної інтервальної регресійної моделі, ми визначили сутність економетрії другого покоління.

Література

1. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание / А. Алберт. – М.: Наука, 1977. – 224 с.
2. Прикладные нечёткие системы / Под редакцией Т. Терано, К. Асаи, М. Сугено. – М.: Мир, 1993. – 368 с.
3. Yamakawa T. High speed fuzzy controller hardware system // Proc. 2nd Fuzzy System Symposium. – Tokyo, Japan, 6 – 1986. – P. 122-130.
4. Соболевский А.Н. Интервальная арифметика и линейная алгебра над интервальными полукольцами // А. Н. Соболевский. Докл. РАН 1999. – Т. 369. – № 6. – С. 746-749.