УДК 330.4

Тимків В. П.,
співшукач Коломийського економіко-правового коледжу Київського національного торговельно-економічного університету

ПОНЯТТЯ НЕЧІТКОЇ БАЛАНСОВОЇ МОДЕЛІ

У статті обмірковується ідемпотентний аналог побудови міжгалузевої балансової моделі, розвинуто узагальнення нечіткої арифметики на випадок операцій над множинами. Це дозволяє обробляти неточні вхідні дані, притаманні економічному дослідженню.

Ключові слова: *ідемпотичний аналог, міжгалузева балансова модель, множина, вхідні дані, матриця, рівняння.*

The idempotent analogue of construction of interbranch balance model is considering over in the article, generalization of fuzzy arithmetic is developed in case of operations above sets. It allows to proccess inexact input data, inherent economic research.

Key words: *idempotent analogue, interbranch balance model, set, input data, matrix, equation.*

Постановка проблеми. При моделюванні різних фізичних, технічних, економічних, соціальних процесів досить часто доводиться розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь (*СЛАР*), крім того, багато методів зводять розв'язок складних математичних задач до розв'язання *СЛАР* як більш простого математичного об'єкта з добре розробленою теоретичною базою. Варто зазначити, що для розв'язання таких систем з невиродженою матрицею розроблено багато чисельних методів, серед яких найбільш відомі: 1) метод Гаусса в декількох модифікаціях; 2) матричний метод; 3) метод простої ітеграції і його модифікація – метод Зейделя; 4) метод Крамера.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Методи нечіткої логіки в економічних дослідженнях використовували такі вчені, як А. В. Алексєєв, А. Н. Борисов, А. А. Гвоздик, С. А. Орловський, О. М. Рибицька, М. С. Сявавко, Р. Р. Ягер та інші. Проте моделювання міжгалузевого балансу потребує додаткового дослідження.

Мета і завдання дослідження. Мета дослідження полягає у розробці моделі міжгалузевого балансу із застосуванням підходів ідемпотентної математики.

Виклад основного матеріалу. На відміну від спеціалізованих математичних пакетів *Mathematica, Maple, Matlab, MathCAD,* у яких передбачені вбудовані функції для одержання розв’язку *СЛАР*, пакет електронних таблиць *Exel* такої вбудованої функції не має. Можна, звичайно, використовувати досить громіздкий підхід, що ґрунтується на програмній реалізації в *Exel* алгоритму методу Гаусса, але значно простіше і наочніше можна одержати розв’язок *СЛАР* через деякі вбудовані функції, що існують в *Exel*.

Нехай *СЛАР* має вигляд

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$
$a_{21}x1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$
… … … … … …
$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n$ (1)

де n кількість рівнянь чи невідомих.

Систему (1) можна записати в матричній формі: $AX=B$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тут A і B, відповідно, відома матриця і стовпець, X – стовпець невідомих $x_1 \div x_2$.

З курсу математики відомо: якщо визначник матриці A відмінний від нуля ($det\ A \neq 0$), чи іншими словами, якщо матриця A є невиродженою, то, по-перше, існує обернена матриця A^{-1}, для якої виконується умова $AA^{-1}=I$, де I – одинична матриця, і, по-друге, *СЛАР* має єдиний розв’язок, який можна відшукати за формулою $X= A^{-1}B$.

Нагадаємо, що такий підхід розв’язання (1) можна реалізувати через вбудовані математичні функції російськомовної версії *Exel*:

МОПРЕД – функція обчислення визначника квадратної матриці;

МОБР – функція обчислення оберненої матриці;

МУЖНОЖ – функція обчислення добутку двох матриць.

В англомовній версії *Exel* ці функції називають, відповідно, MDETERM, MINVERSE, MMULT.

Для більш загального випадку система (1) має вигляд

$CX=D$, (2)

де $C=(c_{ij}),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n};\ D=(d_i)$ – відповідно,прямокутна матриця і вектор.

У разі некоректно поставлених задач система (2) є або погано обумовленою, або виродженою, або, просто, прямокутною. Для таких систем мінімальний многочлен матриці $A=C^TC$ має розміри $s \le r = rangC = rangA$.

Згідно з [6] нормальний розв'язок X^+ системи (2) має вигляд

$X^+ = (1/d)B_{r-1}f$, (3)

де $f = C^TD$, а значення d_r і B_{r-1} визначаються через рекурентні співвідношення

$$
\begin{aligned}
d_1 &= SpA, & B_0 &= I,\\
d_2 &= \frac{1}{2}Sp(B_1A), & B_1 &= d_1I - B_0A,\\
&\dots & &\dots\\
d_{r-1} &= \frac{1}{r-1}Sp(B_{r-2}A) & B_{r-1} &= d_{r-1}I - B_{r-2}A,\\
d_r &= \frac{1}{n}Sp(B_{r-1}A) & d_rI - B_{r-1}IA &= 0,
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

де SpA – слід матриці A.

Останнє співвідношення правої колонки (4) можна використати для перевірки обмежень: відмінність $B_{n-1}A$ від діагональної матриці d_nI дозволяє зробити висновок про величину похибок, що виникають у процесі обчислень d_s і B_{s-1}.

Таким чином, алгоритм знаходження нормального розв'язку X^+ системи (2) складається з таких етапів:

1) обчислити $rangC = r$;
2) відшукати C^T;
3) обчислити добуток $A = C^TC$;
4) провести обчислення за схемою (4);
5) знайти за формулою (3) нормальний розв'язок.

1. Системи нечітких лінійних рівнянь

Надалі переконаємося, що системи вигляду (2) виникають при розв'язанні лінійних алгебраїчних рівнянь із опуклими та нормальними нечіткими числами.

Означення 1. Нечітке число $\tilde{a}$ із універсальною множиною $U = R$, де R – дійсна пряма, *опукле*, якщо для його довільних $x,y,z \in U$ із $x \le y \le z$ виконується співвідношення

$\mu a(y) \ge min(\mu a(x), \mu a(z))$ (5)

Надалі вивчатимемо опуклі та нормальні числа. Кожне таке число ã можна зобразити через розклад

$$\tilde{a} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]}(\underline{a}_\alpha, \overline{a}_\alpha), \qquad (6)$$

де $\underline{a}_\alpha(\overline{a}_\alpha)-$ нижня (верхня) межі нечіткого числа a на α-рівні.

Нехай $\alpha=\{\alpha 1, \alpha 2,..., \alpha k\}$, причому $0 = \alpha 1 < \alpha 2<...< \alpha k = 1$. Це дозволяє записати нечітке число $\tilde{a}$ так:

$$\tilde{a} = (\underline{a}_{\alpha_1}, \overline{a}_{\alpha_1}) \cup (\underline{a}_{\alpha_2}, \overline{a}_{\alpha_2}) \cup ... \cup (\underline{a}_{\alpha_k}, \overline{a}_{\alpha_k}). \quad (7)$$

Нехай тепер чітка система (2) має вигляд нечіткої системи лінійних алгебраїчних рівнянь (*НСЛАР*), яка в координатній формі має вигляд

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{ij} x_j = \tilde{d}_i, \quad i = \overline{1,m} \quad (8)$$

Допустимо, що нечіткі параметри $\tilde{c}_{ij}, \tilde{d}_i$ допускають представлення (6) із $\underline{c}_{ij}^{\alpha_s}(\overline{c}_{ij}^{\alpha_s})-$ нижньою (верхньою) межею нечіткого числа $\tilde{c}_{ij}$ на рівні α_s. Аналогічне представлення має місце і для нечітких чисел $\tilde{d}_i$ і $\tilde{x}_j$.

На таких засадах потрібно розв’язати *2k* систем із $a_s \in \alpha$:

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{c}_{ij}^{\alpha_s} \underline{x}_j^{\alpha_s} = \underline{d}_i^{\alpha_s} \quad (9)$$

і

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{c}_{ij}^{\alpha_s} \overline{x}_j^{\alpha_s} = \overline{d}_i^{\alpha_s} \quad (10)$$

Запишемо тепер кожну нечітку множину $\tilde{c}_{ij}$ та $\tilde{d}_i$ із $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$ через об’єднання (6), а це при виконанні умов

$$(\underline{a}_{\alpha_k}, \overline{a}_{\alpha_k}) \subseteq (\underline{a}_{\alpha_{k-1}}, \overline{a}_{\alpha_{k-1}}) \subseteq ... \subseteq (\underline{a}_{\alpha_1}, \overline{a}_{\alpha_1}), \quad (11)$$

дозволить для кожного x_j, $j = \overline{1,n}$ збудувати функції належності (див. рис. 1):

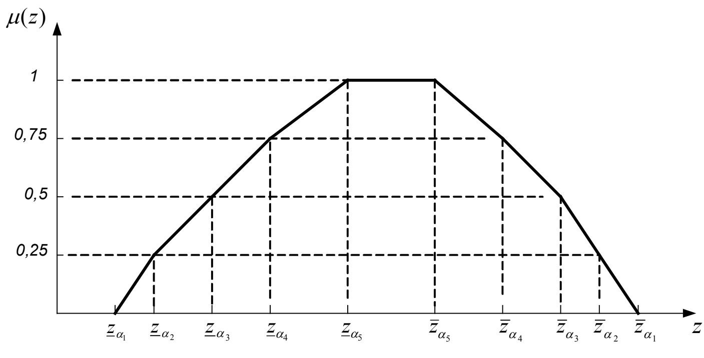

Рис. 1. Код функції належності

$$\mu(z)=\begin{cases}0, & z\in(\underline{z}_{\alpha_1},\overline{z}_{\alpha_1})\\ \alpha_i+(\alpha_{i+1}-\alpha_i)\cdot\dfrac{z-\underline{z}_{\alpha_i}}{\underline{z}_{\alpha_{i+1}}-\underline{z}_{\alpha_i}}, & z\in(\underline{z}_{\alpha_i},\overline{z}_{\alpha_i})\wedge(z<\underline{z}_{\alpha_{i+1}})\\ 1, & z\in(\underline{z}_{\alpha_k},\overline{z}_{\alpha_k})\\ \alpha_{i+1}+(\alpha_i-\alpha_{i+1})\cdot\dfrac{z-\overline{z}_{\alpha_{i+1}}}{\overline{z}_{\alpha_i}-\overline{z}_{\alpha_{i+1}}}, & z\in(\underline{z}_{\alpha_i},\overline{z}_{\alpha_i})\wedge(z>\overline{z}_{\alpha_{i+1}}).\end{cases} \qquad (12)$$

2. L-R нечіткий алгоритм

Теоретично економіку можна дезагрегувати на компоненти, належні різним технологічним укладам. Межі між цими компонентами проходять, коли розглядати національну економіку не лише всередині окремих галузей останньої, але й всередині окремих підприємств і навіть в окремому обладнанні, що укомплектоване деталями, створеними на основі якісно відмінних технологій виробництва. У зв’язку з цим важливою відмінною рисою стану економіки є характер технологічної багатоукладності. Галузева структура економіки формується на засадах суспільного розподілу праці і характеризує систему розподілу виробничих ресурсів між головними видами виробниої діяльності, а також питому вагу окремих галузей в загальному обсязі випуску продукції, надання послуг та виконання робіт.

Таким чином, галузева структура визначається тим, що, з одного боку, кожна галузь (сектор, сфера) економіки виступає як споживач продукції, а з іншого – як виробник продукції та послуг для власного споживання і задоволення потреб інших галузей та секторів економіки. Кількісний зв’язок між обсягами попиту на продукцію, послуги, роботи та обсягами їх виробництва може бути виражений через систему технологічних коефіцієнтів, що показують рівень середніх витрат виробництва цієї галузі, необхідних для випуску одиниці продукції в кожному із інших визначених структурних елементів економіки. Оскільки такий підхід до обчислення витрат і випуску продукції (послуг, робіт) дозволяє врахувати не лише рух кінцевого, але й проміжкового продуктів виробництва, він отримав назву *моделі міжгалузевого балансу.*

Ця модель дозволяє визначити пропорції обміну між різними галузями економіки і охарактеризувати її галузеву структуру через склад продукції (послуг, робіт), що випускається.

У сучасному вигляді модель міжгалузевого балансу була розроблена Нобелівським лауреатом з економіки В. Леонтьєвим, який ще в 1936 році склав першу таблицю "*витрати – випуск*".

Узявши за основу модель загальної економічної рівноваги Л. Валраса (перш за все його припущення щодо лінійного зв’язку між витратами та випуском, а також щодо незалежності технологічних коефіцієнтів від обсягів випуску), В. Леонтьєв розробив матричну модель і шахову таблицю міжгалузевого балансу, що відображали зв’язки між обсягом сукупного попиту і пропозиції у галузевому розрізі. Ці зв’язки В. Леонтьєв сформулював у матричному вигляді

$X = AX + Y$, (13)

де X – вектор-стовпець валової продукції усіх галузей, тобто галузева структура виробництва;

$A = \{aij\}$ – квадратна матриця технологічних коефіцієнтів, що показує, скільки продукції i-ї галузі потрібно для виробництва однієї одиниці продукції j-ї галузі;

Y – вектор-стовпець кінцевого використання продукції усіх галузей (сукупний попит на продукцію всіх галузей). Цей попит складається із поточного кінцевого споживання, інвестицій, державних витрат і чистого експорту.

Як тільки складається баланс на майбутнє – в нього відразу закладається потенційна можливість криз пере– чи недовиробництва. Це зумовлено тим, що, з одного боку, модель міжгалузевого балансу так само, як і інші класичні та некласичні моделі рівноваги, має власні обмеження. А це при моделюванні задач міжгалузевого балансу примушує аналітиків дотримуватися моделей ідемпотентної математики (математики прихованих можливостей), зокрема моделей нечіткої математики.

Висновки. Нечіткий варіант балансових моделей можна використати при прийнятті рішень [2, 5, 7], діагностиці, агрономії та в інших задачах, в яких параметри розмиті або визначені суб’єктивно. Але в останньому випадку ***дослідження*** вимагає обережного ставлення до арифметичних операцій над нечіткими числами, оскільки:

а) нечітке число не має протилежного і оберненого чисел;

б) додавання і множення комутативні, асоціативні, але, в загальному випадку, не дистрибутивні, а саме [7]

$A+(-A)\neq 0,$

$A*A-1\neq 1$

На підставі того, що $(A-B)+B\neq A$, $(A/B)*B\neq A$, які випливають із неможливості відшукання протилежного і оберненого чисел, в [4] був зроблений висновок про неможливість розв’язання нечітких лінійних рівнянь. Вони стають розв’язальними за певних умов [1].

У роботі розв’язуватимемо нечіткі балансові рівняння на засадах теорії L-R нечітких чисел [3].

Означення 2. Нечітким (L-R) числом називатимемо нечітку множину A в E, функція належності якої має вигляд

$\mu A(x) = min\ (LA(x),RA(x)),$ (14)

де $L_A \in L$**,** $R_A \in R$.

В (14) E розширення числової осі; L – множина неспадних, неперервних справа функцій $L{:}E \to [0,1$ із $L(-\infty) = 1, L(+\infty) = 0;$ R – множина незростаючих неперервних зліва функцій $R{:}E \to [0,1$ із $R(-\infty) = 1, R(+\infty) = 0$.

(L-R) число володіє такими властивостями:

функція належності нечіткого числа напівнеперервна зверху. Крім того, нехай A нечітке число вигляду (14). Тоді існує $x^* \in E$, для якого

$$\mu_A(x^*) = \sup_{x \in E} \mu_A(x) = h_A.$$

всі множини $y \in (0,h_A)$ рівня нечіткого числа A мають вигляд

$$A^y = \{x \in E \big/ L_A^q(y) \le x \le R_A^q\}, \qquad (15)$$

де $L^q{}_A \in M$, $R^q{}_A \in S$.

Таким чином, нечіткі числа (14) – це підклас нечітких множин на числовій осі, котрі характеризуються тим, що всі їх множники α-рівня є відрізками (або вони пусті).

Означення 3. $\boldsymbol{M}$ – множина неспадних, неперервних зліва функцій $M{:}E \to [0,1$ із $M(0) = -\infty$; $\boldsymbol{S}$ – множина не зростаючих, неперервних зліва функцій $S{:}E \to [0,1$ із $S(0) = +\infty$.

Означення 4. Функція $L^q{:}[0,1] \to E{:}$

$L^q(y)=inf\{x \in E/L(x) \ge y\}$ (16)

називається *квазіоберненою до функції* $L \in \boldsymbol{L}$; функція $Rq{:}E \to [0,1]{:}$

$R^q(y)=sup\{x \in E/R(x) \ge y\}$ (17)

називається *квазіоберненою до функції* $R \in \boldsymbol{R}$. $L^q \in \boldsymbol{M}$, $R^q \in \boldsymbol{S}$.

Приклад. Розв’язати нечітке рівняння

$X+A \subseteq$B (18)

за умов $L_A^q(y) = \frac{5}{8}y,\ \ R_A^q(y) = \frac{5}{8},$

$$L_B^q(y) = \begin{cases} \frac{13}{8}y + \frac{3}{8}, & \textit{якщо}\ \ 0 \le y \le \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{8}y + \frac{9}{8}, & \textit{якщо}\ \ \frac{1}{2} < y < \frac{3}{4}, \\ \frac{13}{8}y, & \textit{якщо}\ \ \frac{3}{4} \le y \le 1 \end{cases} \qquad R_B^q(y) = \frac{13}{8}.$$

Згідно (8) складаємо систему

$$\begin{cases} L_X^q + L_A^q = L_B^q \\ R_X^q + R_A^q = R_B^q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_X^q = L_B^q - L_A^q \\ R_X^q = R_B^q - R_A^q. \end{cases}$$

а звідси

$$L_X^q=\begin{cases} y+\frac{3}{8}, & якщо\ 0<y\le\frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2}y+\frac{9}{8}, & якщо\ \frac{1}{2}\le y\le\frac{3}{4}, \\ y, & якщо\ \frac{3}{4}\le y\le 1 \end{cases}\quad R_X^q=1$$
,

Перейшовши до прямої функції, одержимо нечіткий розв’язок співвідношення (18):

$\mu X(x) = min(L(x)X, R(x)X)$ (19)

із

$$L_X^{(x)}=\begin{cases} 0, & якщо\ x\le\frac{3}{8}, \\ x-\frac{3}{8}, & якщо\ \frac{3}{8}\le x<\frac{7}{8}, \\ x, & якщо\ \frac{7}{8}\le x\le 1, \\ 1, & якщо\ x\ge 1, \end{cases}\qquad R_X^{(x)}=\begin{cases} 0, & якщо\ x\le 1, \\ 1, & якщо\ x>1. \end{cases}$$

Вказаний тут підхід можна реалізувати і для балансової моделі (13).

Література

1. Алексеев А. В. Применение нечёткой математики в задачах принятия решений / А.В. Алексеев // Прикладные задачи анализа решений в организационно-технических системах. – Рига: Рижский политех. ин-т, 1983. – С. 38-42.

2. Борисов А.Н. Принятие решений на основе нечётких моделей. Примеры использования / А. Н. Борисов, О. А. Кримберг, И. П. Федоров. Рига "Зинанте", 1990. – 184 с.

3. Гвоздик А.А. Решение нечётких уравнений / А. А. Гвоздик // Изв. 4. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1984. – № 5. – С. 176-183.

5. Нечёткие множества и теория возможностей. Последние достижения / Под ред. Р.Р. Ягера. – М.: Радио и связь, 1986. – 408 с.

6. Орловский С.А. Проблема принятия решений при нечёткой исходной информации / С.А. Орловский. – М.: Наука, 1981. – 208 с.

7. Рибицька О. Математичні аспекти відновлення інформації / О. Рибицька, М. Сявавко. – Львів: Растр 7. – 2008. – 320 с.

8. Mitzumoto M. Algebraic Properties of Fuzzy Numbers / M. Mitzumoto, K. Tanaka // Proc. of the *IEEE*, 1976. – P. 559-563.

9. Yager R.R. On the Lack of Inverses in Fuzzy Arithmetic // Fuzzy Sets and Systems. – 1980. – Vol. 4, No.1. – P. 73-82.