УДК 339. 166

Ковальчук О. Я.,
кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри економічної кібернетики та інформатики,
Бубняк М. М.,
викладач кафедри економічної кібернетики та інформатики Тернопільського національного економічного університету

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ МЕТОДОМ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ

У статті запропоновано узагальнені функції апроксимації для прогнозування економічних процесів. Застосовано ефективні методи розв'язання систем нелінійних рівнянь для реалізації методу екстраполяції.
***Ключові слова:** функція апроксимації, метод найменших квадратів, система нелінійних рівнянь, модель прогнозування.*

В статье предложены обобщенные функции аппроксимации для прогнозирования экономических процессов. Применены эффективные методы решения систем нелинейных уравнений для реализации метода экстраполяции.
***Ключевые слова:** функция аппроксимации, метод наименьших квадратов, система нелинейных уравнений, модель прогнозирования.*

Proposed a generalization of the approximation functions for forecasting economic processes. Applied effective methods for solving nonlinear equations for the method of extrapolation
***Keywords:** function approximation, method of least squares, system of nonlinear equations, forecasting model.*

Постановка проблеми. При дослідженнях математичних моделей економічних процесів актуальними є завдання знаходження функцій апроксимації, які описують складні економічні залежності і включають у себе стандартні лінії тренду, та можливість комп'ютерної реалізації побудованої математичної моделі прогнозування за допомогою ефективних методів сучасної комп'ютерної алгебри. Важливість дослідження питання раціонального вибору типу лінії тренду та знаходження розрахункових даних як в теоретичному плані, так і в прикладних задачах (розв'язання систем нелінійних алгебраїчних рівнянь) не викликає сумнівів, тим більше, що проблема у багатьох її аспектах потребує поглибленого дослідження.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Сьогоднішны існують і успішно розвиваються декілька напрямків і концепцій прогнозування економічних процесів: однофакторний, баготофакторний, кореляційний та дисперсійний аналізи тощо. Цими питаннями, зокрема, займались такі видатні науковці, як І. Д. Квіт, Е. Кейн, Г. Шеффе та інші. Проте і сьогодні залишаються недостатньо дослідженими, а отже, актуальними питання розробки ефективних алгоритмів комп'ютерної реалізації методу екстраполяції для складних функцій апроксимації.

Мета і завдання дослідження. Побудова узагальнених функцій прогнозування, які моделюють складні зв'язки між економічними процесами. Обчислення коефіцієнтів апроксимації за допомогою ефективних алгоритмів розв'язання систем нелінійних алгебраїчних рівнянь засобами комп'ютерної алгебри.

Виклад основного матеріалу. Серед великої кількості економіко-математичних методів, які використовують для розв'язання задач керування підприємством, інвестиційними процесами тощо, особливе місце займають методи і моделі прогнозування. Завданням економічного прогнозування є встановлення зв'язків між економічними явищами (розміром основних фондів та прибутком, інвестиціями та рівнем інфляції тощо). Наприклад, інвестор завжди прагне сформувати раціональний портфель цінних паперів, тобто здійснити розподіл грошових коштів між лінійкою фінансових активів (акцій, облігацій тощо) у найвигідніших та найменш ризикованих відношеннях. Для розв'язання цієї задачі інвестор використовує статистичні дані за попередні періоди та методи прогнозування. Серед математичних методів прогнозування виділяють методи екстраполяції, які характеризуються простотою та наглядністю. Основний принцип екстраполяції полягає в тому, щоб на основі попередніх та теперішніх даних отримати розрахункові характеристики економічного процесу, який вивчається. Для сучасних математичних моделей важливою умовою є їх комп'ютерна реалізація.

У цій статті розглядається застосування методу прогнозування на всіх етапах – від збору інформації до обґрунтування отриманих результатів. Особливу увагу приділено вибору типу лінії тренду та знаходженню розрахункових даних.

Прогнозування за допомогою методу екстраполяції передбачає такі етапи:

• аналіз об'єкта прогнозування, який включає детальне вивчення залежностей заданої системи від інших систем, взаємозв'язки між даним об'єктом та іншими об'єктами системи;

• підготовка вхідних даних, що починається з перевірки статистичних даних (у випадку упущених даних їх доповнюють, використовуючи методи інтерполяції);

• у результаті фільтрування вхідних даних усувають випадкові флуктуації (збурення), які виникають або під дією неврахованих факторів, або через помилки вимірювання (ці спотворення вхідних даних впливають на вибір рівняння апроксимації; фільтрація вхідного статистичного ряду включає згладжування, яке використовують для усунення випадкових відхилень (шуму) в екстремальних значеннях вхідних даних та вирівнювання [1, с. 165]);

• вибір функції апроксимації, що здійснюється на основі вивчення статистичних даних і логічного аналізу економічного процесу, який розглядається [1, с. 166];

• оцінка математичних моделей прогнозування, що дає можливість вибрати найкращу функцію апроксимації: найпоширенішим методом оцінки параметрів є метод найменших квадратів [1, с. 170; 2, с. 12], який полягає у визначенні параметрів лінії тренду, що мінімізують її відхилення від статистичних даних;

• вибір математичної моделі, який ґрунтується на оцінці її якості прогнозування; незалежно від методу оцінки параметрів моделі екстраполяції її якість визначається на основі дослідження поведінки залишкової компоненти $y_i - \tilde{y}\ \left(i = \overline{1,n}\right)$, тобто оцінки відхилення між фактичними y_i та розрахунковими значеннями $\tilde{y}_i$ на відрізку апроксимації.

Припускаємо, що етапи аналізу об’єкта, підготовка та фільтрування вхідних даних виконані максимально якісно, а це дослідження передбачає вибір та оцінку математичної моделі прогнозування на основі вибраної функції.

Досліджується процес вибору функції прогнозування. Як лінію тренду найчастіше вибирають різні поліноми та функції.

Таблиця 1

Функції апроксимації

Функція	Рівняння
Лінійна	y(x)=a+bx
Квадратична	y(x)=a+bx+cx2
Степенева	y(x)=axb
Експоненціальна	y(x)=aebx
Модифікована експонента	y(x)=k–ae–bx
Гіперболічна	$y(x) = a + \frac{b}{c + x}$
Логарифмічна	y(x)=a ln x+b

У розглянутих функціях *a, b, c, k* – шукані параметри.

Досліджуються функції прогнозування, що описують складні залежності і включають рівняння запропонованих ліній тренду:

$y(x)=C_1x^a+ C_2x^{1-a,}$ (1)

$y(x)=C_1ln^a x+ C_2ln^{1-a} x$, (2)

$y(x)=C_1ln^a\ ln\ x+ C_2ln^{1-a}\ ln\,x$, (3)

де C_1, C_2, a – шукані параметри. З рівняння (1) при $a=1$ одержимо лінійну функцію, при $a=2$ – квадратичну, при $C_2=0$ – степеневу. Функції (2) та (3) описують складні логарифмічні залежності і також узагальнюють логарифмічну функцію, якщо покласти $a=1$ у рівності (2).

Для обчислення параметрів лінії тренду використовується метод найменших квадратів, який мінімізує відхилення лінії апроксимації від статистичних даних.

Нехай маємо n пар спостережень (x_1, y_1); (x_2, y_2); …; (x_n, y_n) і згідно з метоом найменших квадратів для знаходження параметрів C_1, C_2, a потрібно мінімізувати функцію

$$F(C_1, C_2, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} \left(C_1 x_i^{\alpha} + C_2 x_i^{1-\alpha} - y_i \right)^2 .$$

Функція (C_1, C_2, a) $F(C_1, C_2, \alpha)$ досягає мінімального значення у точці, в якій частинні похідні по C_1, C_2 та a рівні нулеві, тобто одержуємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \left(C_1 x_i^{\alpha} + C_2 x_i^{1-\alpha} - y_i \right) x_i^{\alpha} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \left(C_1 x_i^{\alpha} + C_2 x_i^{1-\alpha} - y_i \right) x_i^{1-\alpha} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \left(C_1 x_i^{\alpha} + C_2 x_i^{1-\alpha} - y_i \right) \left(C_1 x_i^{\alpha} \ln(x_i) - C_2 x_i^{1-\alpha} \ln(x_i) \right) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Ця система рівнянь є нелінійною щодо змінних C_1, C_2, a, тому розв'язати її за допомогою стандартних методів проблематично. Введемо позначення $\overline{x^k} = \sum_{i=1}^{n} x^k$ і після нескладних математичних перетворень

зведемо систему (4) до такого нелінійного алгебраїчного рівняння щодо параметра a:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\overline{x^{2-2\alpha}} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} y_i - \overline{x} \sum_{i=1}^{n} x_i^{1-\alpha} y_i}{\overline{x^{2\alpha}}\,\overline{x^{2-2\alpha}} - \left(\overline{x}\right)^2} x_i^{\alpha} + \frac{\overline{x} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} y_i - \overline{x^{2\alpha}} \sum_{i=1}^{n} x_i^{1-\alpha} y_i}{\left(\overline{x}\right)^2 - \overline{x^{2\alpha}}\,\overline{x^{2-2\alpha}}} x_i^{1-\alpha} - y_i \right)$$

$$* \left(\frac{\overline{x^{2-2\alpha}} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} y_i - \overline{x} \sum_{i=1}^{n} x_i^{1-\alpha} y_i}{\overline{x^{2\alpha}}\,\overline{x^{2-2\alpha}} - \left(\overline{x}\right)^2} x_i^{\alpha} \ln(x_i) + \frac{\overline{x} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} y_i - \overline{x^{2\alpha}} \sum_{i=1}^{n} x_i^{1-\alpha} y_i}{\left(\overline{x}\right)^2 - \overline{x^{2\alpha}}\,\overline{x^{2-2\alpha}}} x_i^{1-\alpha} \ln(x_i) \right) = 0.$$

Параметри C_1 та C_2 знаходимо з рівностей

$$C_1 = \frac{\overline{x^{2-2\alpha}} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} y_i - \overline{x} \sum_{i=1}^{n} x_i^{1-\alpha} y_i}{\overline{x^{2\alpha}}\,\overline{x^{2-2\alpha}} - \left(\overline{x}\right)^2},$$

$$C_2 = \frac{\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha} y_i - \overline{x^{2\alpha}}\sum_{i=1}^{n} x_i^{1-\alpha} y_i}{\left(\overline{x}\right)^2 - \overline{x^{2\alpha}}\,\overline{x^{2-2\alpha}}}$$

Аналогічним способом для функцій (2) та (3) одержимо нелінійні системи рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\left(C_1 \ln^{\alpha} x_i + C_2 \ln^{1-\alpha} x_i - y_i\right)\ln^{\alpha} x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}\left(C_1 \ln^{\alpha} x_i + C_2 \ln^{1-\alpha} x_i - y_i\right)\ln^{1-\alpha} x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}\left(C_1 \ln^{\alpha} x_i + C_2 \ln^{1-\alpha} x_i - y_i\right)\left(C_1 \ln^{\alpha} x_i \ln(\ln x_i) - C_2 \ln^{1-\alpha} x_i \ln(\ln x_i)\right) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

та

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\left(C_1 \ln^{\alpha} \ln x_i + C_2 \ln^{1-\alpha} \ln x_i - y_i\right)\ln^{\alpha} \ln x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}\left(C_1 \ln^{\alpha} \ln x_i + C_2 \ln^{1-\alpha} \ln x_i - y_i\right)\ln^{1-\alpha} \ln x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}\left(C_1 \ln^{\alpha} \ln x_i + C_2 \ln^{1-\alpha} \ln x_i - y_i\right)\left(C_1 \ln^{\alpha} \ln x_i \ln(\ln\ln x_i) - C_2 \ln^{1-\alpha} \ln x_i \ln(\ln\ln x_i)\right) = 0, \end{cases}$$

(6)

де C_1, C_2, a – шукані параметри моделі екстраполяції.

У [5, с. 377] запропоновано комп'ютерну реалізацію розв'язання отриманих нелінійних рівнянь за допомогою методу поділу відрізка навпіл. Цей метод має суттєвий недолік: потрібно вказати відрізок, на якому рівняння має лише один корінь, тому у цій роботі запропоновано швидкий спосіб розв'язання систем нелінійних рівнянь (4)–(6) [6, с. 252].

Якість прогнозування визначається за залишковою компонентою $y_i - \widetilde{y}$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ і характеризується адекватністю процесові, який вивчається. Адекватність гарантує врахування статистичних властивостей, а точність характеризується ступенем близькості до фактичних даних.

Класично для цих цілей служить низка коефіцієнтів, серед яких коефіцієнт детермінації [1, с. 180; 2, с. 14]

$$d = 1 - \frac{S_{yx}^2}{S_y^2},$$

де $S_{yx}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \widetilde{y}_i)^2}{n}$ – непояснена дисперсія, $\delta_{yx}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\widetilde{y}_i - \overline{y})^2}{n}$ – пояснена дисперсія, а $S_y^2 = \delta_{yx}^2 + S_{yx}^2$. Коефіцієнт детермінації показує, на скільки точно лінія тренду відображає статистичну лінійку.

Крім цього, за допомогою критерію Дарбіна-Уотсона можна перевірити наявність автокореляції відхилень фактичних даних від розрахункових за формулою

$$d_{DW} = \frac{\sum_{i=2}^{n} \left[(y_i - \widetilde{y}_i) - (y_{i-1} - \widetilde{y}_{i-1})\right]^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \widetilde{y}_i)^2}.$$

Цей коефіцієнт змінюється в межах від 0 до 4. Якщо значення d_{DW} є близьким до 0, то автокореляція існує і додатна, якщо близьким до 4, то автокореляція існує і від'ємна, якщо ж близький до 2 – автокореляція відсутня.

Підсумком робіт з вибору математичної моделі прогнозування є сформовані загальні характеристики, які включають рівняння прогнозування, оцінки точності та адекватності моделі, прогнозовані дані та інтервали. У [1-2] наводять різні коефіцієнти, які часто по-різному відображають ступінь точності моделі та дають суперечливі оцінки, тому потрібно використовувати один основний показник.

Висновки. У цій роботі запропоновано використовувати коефіцієнт детермінації, попередньо переконавшись у відсутності автокореляції. Найкращою за точністю вважається модель з найвищим коефіцієнтом детермінації.

Однофакторне моделювання економічного процесу – лише його спрощений запис. Будь-яка модель прогнозування призначена для одержання прогнозу розвитку процесу при виконанні тих чи інших умов. У цій статті запропоновано нові типи функції екстраполяції, які узагальнюють вже відомі. Лінії трендів (1)-(3) моделюють складні зв'язки між економічними процесами. Крім розробки моделі прогнозування, необхідно реалізувати ще й процедуру обчислення параметрів моделі. Нами запропоновано нові підходи до знаходження коефіцієнтів апроксимації за допомогою застосування ефективних алгоритмів розв'язання систем нелінійних рівнянь.

Практичне застосування моделі прогнозування полягає у дослідженні результатів, одержаних для різних вхідних даних при зміні чинника впливу. Лише глибокий і детальний аналіз системи прогнозування дає можливість дійти висновку про адекватність.

Література:

1. Бережная Е. В. Математические методы моделирования экономических систем / Бережная Е. В., Бережной В. И. – Москва: Финансы и статистика, 2002. – 363 с.

2. Василь Єлейко. Основи економетрії / Єлейко В. – Ч. 1. – Львів: ТзОв “Марка Лтд”, 1995. – 191 с.

3. Кейн Э. Экономическая статистика и эконометрия / Кейн Э. – Москва: Статистика, 1977. – 228 с.

4. Степеневі виробничі функції і диференціальні рівняння: Сб. труд. Международной конф. [“Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математическая физика”]. – К.: Ин-т математики НАН Украины. – 1997. – 255 с.

5. Бубняк М. М. Деякі підходи до розв’язання проблем регресійного аналізу / М. М. Бубняк // Формування економічних відносин в умовах реформування економіки. – 1999. – № 2. – С. 376-379.

6. Недашковський М. О. Обчислення з l-матрицями / Недашковський М. О., Ковальчук О. Я. – Київ: Наукова думка, 2007. – 294 с.

7. Косачев Ю. В. Экономико–математические модели эффективности финансово-промышленных структур / Косачев Ю. В. – Москва: Логос, 2004. – 244 с.