УДК 336.767

Хохлов В. Ю.,
кандидат технічних наук, консультант з корпоративних фінансів та інвестиційного менеджменту

ОПТИМІЗАЦІЯ ПОРТФЕЛЯ ЦІННИХ ПАПЕРІВ ЗА РІВНЕМ СИСТЕМАТИЧНОГО РИЗИКУ

У статті представлені лінійна та квадратична моделі оптимізації портфеля цінних паперів за рівнем систематичного ризику та показана їх еквівалентність. Запропонована квадратична функція корисності інвестора з урахуванням очікуваної дохідності та систематичного ризику та показано, як для її максимізації використати алгоритм Шарпа. Побудовані ефективні границі для портфелів з компонентів індексу S&P 100.
Ключові слова: *оптимізація портфеля, систематичний ризик, бета.*

В статье представлены линейная и квадратичная модели оптимизации портфеля ценных бумаг по уровню систематического риска и показана их эквивалентность. Предложена квадратичная функция полезности инвестора с учетом ожидаемой доходности и систематического риска и показано, как для ее максимизации использовать алгоритм Шарпа. Построены эффективные границы для портфелей из компонент индекса S&P 100.
Ключевые слова: *оптимизация портфеля, систематический риск, бета.*

This paper introduces linear and quadratic models of portfolio optimization for the systematic risk and shows their equivalence. A quadratic utility function is proposed to account for the expected return and systematic risk trade-off, and it's shown how the Sharpe algorithm can be used to maximize it. To test the models, the effective beta-return frontiers were built for the S&P 100 components.
Keywords: *portfolio optimization, systematic risk, beta.*

Постановка проблеми. Управління портфелем цінних паперів за рівнем систематичного ризику є одним з найбільш актуальних завдань у інвестиційній сфері. Відомим положенням сучасної портфельної теорії є те, що інвестори отримують компенсацію саме за рівень прийнятого ними систематичного ризику. Проблемою, яка досліджується у цій статті, є підбір та оптимізація портфеля за рівнем систематичного ризику.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Класичною роботою з оптимізації портфелів цінних паперів, з якої бере початок сучасна портфельна теорія, є стаття Марковиця [1], у якій запропонована модель оптимізації портфеля за очікуваною дохідністю за повним ризиком. Аналітичний розв'язок задачі Марковиця на практиці не набув популярності, тому що не давав можливості накладати обмеження на вагу активів. Розв'язок задачі Марковиця за наявності таких обмежень можливий лише за допомогою чисельних методів, один з яких розроблений Шарпом [2], це алгоритм оптимізації квадратичної функції корисності інвестора за очікуваною дохідністю та повним ризиком. Сучасні розробки у галузі оптимізації портфеля також, в основному, фокусуються на концепції повного ризику. Відомою сучасною моделлю є модель Блека-Літтермана [3].

Але ще з початку 70-х років минулого століття сучасна портфельна теорія дійшла висновку, що маржинальні інвестори компенсуються не за повний, а за систематичний ризик, а оскільки професійні інвестори (наприклад, фонди) є маржинальними, то використання повного ризику для них не є теоретично коректним критерієм. Однією з класичних моделей, яка враховує цей факт, є модель Трейнора-Блека [4]. Але вона значною мірою ґрунтується на наявності ринкового портфеля, який розглядається як пасивне ядро, до якого додається частина, що управляється активно. Власне, питання створення портфеля з потрібною бетою Трейнором та Блеком не розглядається.

Таким чином, проблема оптимізації портфеля за рівнем систематичного ризику не дуже добре досліджена у літературі, хоча на практиці рівень систематичного ризику часто застосовується як критерій оцінки якості управління портфелем, як вказується у провідних джерелах [5, с. 814; 6, с. 406].

Мета і завдання дослідження. Метою цього дослідження є створення інструментарію оптимізації портфеля за рівнем систематичного ризику. Завданням дослідження є розробка моделей та алгоритмів, а також аналіз їхнього застосування на реальних ринкових даних.

Виклад основного матеріалу. Моделі оптимізації портфеля за систематичним ризиком. Систематичний ризик портфеля у фінансах зазвичай вимірюється за допомогою бети (бета-коефіцієнта), але з точки зору теорії бета є чутливістю, а власне систематичний ризик дорівнює добутку бети та стандартного відхилення ринкового портфеля.

Лінійні моделі. Великою перевагою застосування систематичного ризику над повним ризиком є те, що бета портфеля є зваженою сумою бети його компонентів, на відміну від варіації, яка залежить ще й від коваріацій між компонентами. Тому для бети ми можемо побудувати лінійні моделі оптимізації. Першою такою моделлю є модель максимізації очікуваної дохідності портфеля при обмеженні на рівень систематичного ризику – знайти такі ваги активів $w_1, \ldots, w_n$, що

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i \to \max \qquad (1)$$

за умов

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i \le \beta_0, \qquad (2)$$

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i \ge -\beta_0, \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \qquad (4)$$

$$w_i^{\min} \le w_i \le w_i^{\max}, \; i = \overline{1,n}, \qquad (5)$$

е w_i – вага активу у портфелі, r_p та r_i – очікувані (для ex-ante моделей) або фактичні (для ex-post моделей) дохідності портфеля та активу, β_p та β_i – бета портфеля та активу, β_p – заданий рівень систематичного ризику, $w_i^{\min}, w_i^{\max}$ – задані обмеження на мінімальну та максимальну вагу активу.

Умова (3) задається для того, щоб оптимізатор не винайшов можливий портфель з від’ємною бетою, що перевищує бажаний рівень – хоча на практиці активи з від’ємною бетою є нечастими, але вони існують. Можна також здійснювати оптимізацію для портфелів лише з додатною бетою.

Другою лінійною моделлю є модель мінімізації систематичного ризику за умови отримання дохідності не меншої за задану – знайти такі $w_1, \ldots, w_n$, що

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i \to \min \qquad (6)$$

за умов (4)–(5) та

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i \ge r_0, \qquad (7)$$

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i \ge 0, \qquad (8)$$

де r_0 – мінімальний рівень дохідності портфеля. При цьому обмеження (8) потрібно, щоб оптимізатор не знайшов можливий портфель з великою від'ємною бетою.

Оскільки моделі (1)–(3) та (6)–(8) за наявності спільних обмежень (4)–(5) є лінійними по змінних $w_1, \ldots, w_n$, то для знаходження оптимального розв'язку можна використовувати стандартний симплекс-метод.

Квадратична модель. Квадратична модель є новою розробкою, що запропонована нами виходячи з наявності алгоритму Шарпа [2], який дає змогу знаходити максимум квадратичної функції $f(\mathrm{w}) = \mathrm{bw} - k\mathrm{w}^{\mathrm{T}}\mathrm{Aw}$, де b – вектор (в оригінальному алгоритмі – вектор очікуваних дохідностей), а A – симетрична позитивно-визначена матриця (в оригінальному алгоритмі – коваріційна матриця), k – коефіцієнт, за умови наявності обмежень (4)–(5).

Квадратична модель оптимізації портфеля за рівнем систематичного ризику має цільовою функцією відстань між фактичною та заданою бетою:

$$f\left(w_1,\ldots,w_n\right) = \left(\beta_p - \beta_0\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\beta_i - \beta_0\right)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \beta_i \beta_i - 2\beta_0 \sum_{i=1}^{n} w_i\beta_i + \beta_0^2 \quad (9)$$

Мінімізація відстані між бетою портфеля та заданою бетою, таким чином, зводиться до знаходження таких ваг активів $w_1, \ldots, w_n$, що

$$2\beta_0 \sum_{i=1}^{n} w_i\beta_i - \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \beta_i \beta_i \to \max \quad (10)$$

за умови обмежень (4)–(5). Вирішення такої оптимізаційної задачі можливо за допомогою алгоритму Шарпа, якщо покласти $k = 1$, $b_i = 2\beta_0\beta_i$ та $a_{ij} = \beta_i\beta_j$.

Хоча квадратична модель (10) дозволяє знайти портфель з потрібною бетою (або найбільш близькою до неї можливою бетою), таких портфелів може бути багато. Здоровий глузд підказує, що у такому разі потрібно обирати з них такий, який має найбільшу очікувану дохідність, і саме так працює лінійна модель (1)–(5). Але модель (10) не оптимізує портфель за дохідністю. Щоб подолати цей недолік, можна за аналогією з класичною теорією ввести функцію корисності, яка зв'язує систематичний ризик та дохідність портфеля.

Функція корисності з урахуванням систематичного ризику

Функція корисності інвестора введена ще Марковицем, застосовувалася Шарпом у [2] з використанням коефіцієнта схильності інвестора до ризику, а у [5, с. 166; 6, с. 343] така ж сама функція корисності задана через коефіцієнт запобігання ризику. Усі ці функції використовують повний ризик портфеля. Але ж маржинальні інвестори компенсуються лише за систематичний ризик, тому буде доречно зробити таку модифікацію функції корисності, яка враховує тільки цей елемент ризику:

$$U\left(w_1,\ldots,w_n\right)=r_p-\frac{1}{r_t}\beta_p^2\sigma_m^2=\sum_{i=1}^{n}w_i r_i-\frac{\sigma_m^2}{r_t}\sum_{i,j=1}^{n}w_i w_j\beta_i\beta_j \quad (11)$$

де σ_m – стандартне відхилення дохідності ринкового портфеля (відносно якого розраховуються бети), а r_t – показник схильності інвестора до ризику.

Можна побачити, що функція (11) має дуже подібний вигляд до цільової функції (10). Тому задачу знаходження оптимального портфеля для інвестора з відомим показником схильності до ризику можна також розв’язувати за допомогою алгоритму Шарпа, якщо покласти $b_i = r_i$, $a_{ij} = \beta_i\beta_j$, $k = \sigma^2_m/r_t$.

Для порівняння лінійної моделі (1)–(5) та квадратичної моделі (11) з обмеженнями (4)–(5) була побудована ефективна границя портфелів за систематичним ризиком з компонент індексу Standard & Poor’s S&P 100 з використанням фактичних даних за 2010 рік (джерело: Yahoo! Finance). Оскільки це ex-post моделювання, то як дохідність у моделях використовувалась фактична повна дохідність акцій за 2010 рік. Бети вимірювалися відносно індексу S&P 500, який розглядався як ринковий портфель.

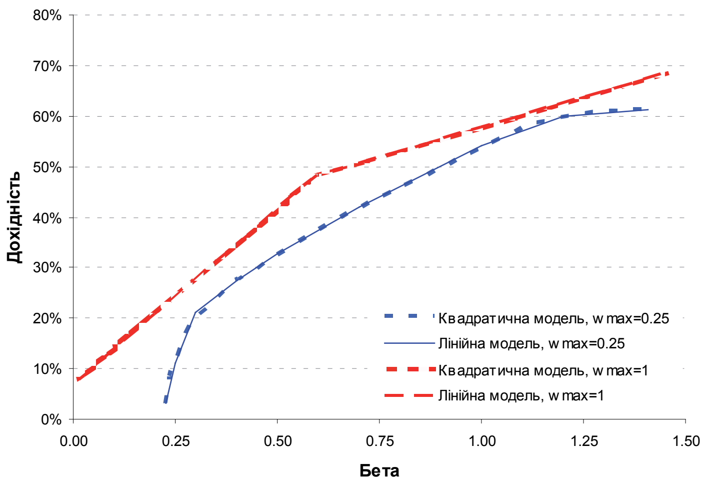

Рис. 1. Ефективні границі портфелів за систематичним ризиком

Ефективні границі можливих портфелів у просторі дохідність–бета, які були побудовані з використанням лінійного та квадратичного алгоритмів для значень $w_{max} = 0.25$ та $w_{max} = 1$ в обмеженні (5), показані на рисунку 1. Як видно з рисунка, лінійна та квадратична модель призводять то тих самих ефективних портфелів, тобто є еквівалентними за результатом. Але якщо лінійний алгоритм дозволяє знаходити портфель з максимальною дохідністю для заданого значення бети, то квадратичний алгоритм знаходить портфель з найкращими бетою та очікуваною дохідністю для заданого значення схильності інвестора до ризику r_t, але не дозволяє напряму встановлювати бажане значення бети.

Дослідження алгоритмічних властивостей запропонованих моделей

Як було зазначено вище, лінійна та квадратична модель оптимізації портфеля за рівнем систематичного ризику призводять до тих самих результатів, але вони відрізняються у параметрах. Лінійна модель виглядає більш привабливою, тому що дає змогу напряму встановлювати бажане значення бети (або бажане значення очікуваної дохідності). Квадратична модель, з іншого боку, дозволяє використовувати значення схильності інвестора до ризику.

Але чи є моделі алгоритмічно еквівалентними? Дослідження показали, що ні. Лінійна модель вимагає використання симплекс-методу. На практиці, час роботи алгоритму напряму залежить від кількості активів у результуючому портфелі, а вона визначається w_{max}, обмеженням на вагу активів. При малих w_{max} у портфелі буде присутньою велика кількість паперів та час оптимізації суттєво збільшиться.

Квадратична модель використовує алгоритм Шарпа, який не залежить від кількості активів у портфелі, тому час роботи алгоритму був таким самим для 2, 5, 10 результуючих активів та навіть зменшився при 21 активу (мабуть, тому, що як начальний розв'язок був використаний портфель з рівною вагою кожного паперу). Результати порівняння часу розв'язання задачі оптимізації по моделях (1)–(5) та (11) з обмеженнями (4)–(5) показані у таблиці 1. Час оптимізації портфеля вимірювався на 40 виконаннях алгоритму.

Таблиця 1

Порівняння часу роботи алгоритмів оптимізації портфеля

	Лінійна модель				**Квадратична модель**			
Макс. вага, wmax	1	0. 25	0. 1	0. 05	1	0. 25	0. 1	0. 05
Розмір опт. портфеля	2	5	10	21	2	5	10	21
Бета	0. 5329	0. 4040	0. 4988	0. 5452	0. 5329	0. 4040	0. 4988	0. 5452

Дохідність	43. 89%	27. 79%	25. 67%	21. 30%	43. 89%	27. 79%	25. 67%	21. 30%
Час роботи, с	0. 3835	0. 8019	1. 5954	2. 3708	0. 8610	0. 8608	0. 8523	0. 6886

Оскільки оптимізація за систематичним ризиком здійснюється переважно для диверсифікованих портфелів, то можна дійти висновку, що застосування квадратичної моделі є більш доречним для таких портфелів завдяки кращим властивостям алгоритму Шарпа, який, на відміну від симплекс-методу, не показав залежності від кількості паперів у оптимальному портфелі.

Висновки. У статті були досліджені моделі оптимізації портфеля цінних паперів за рівнем систематичного ризику. Запропонована нами квадратична модель оптимізації виявилася еквівалентною лінійній моделі, але алгоритмічно вона є більш ефективною за наявності великої кількості активів. Оскільки типові портфелі маржинальних інвесторів є добре диверсифікованими, тобто містять багато активів (20 і більше), то квадратичний алгоритм є кращим за симплекс-метод для розв’язання цієї задачі. Також запропонована функція корисності інвестора з урахуванням систематичного, а не повного, ризику, та показано, як застосувати алгоритм Шарпа для максимізації такої корисності.

Ефективна границя портфелів, оптимальних за рівнем систематичного ризику, є опуклим багатогранником у просторі дохідність-ризик, на відміну від ефективної границі портфелів, оптимальних за рівнем повного ризику (яка є параболою). Тому кількість активів у оптимальному портфелі залежить насамперед від обмеження на максимальну вагу активів.

Література:

1. Markowitz H. Portfolio Selection // The Journal of Finance. – 1952. – Vol. 7, No. 1. – P. 77–91.

2. Sharpe W. F. An Algorithm for Portfolio Improvement // Advances in Mathematical Programming and Financial Planning / K. D. Lawrence, J. B. Guerard, Jr., and Gary D. Reeves (editors). – JAI Press, Inc., 1987. – P. 155–170.

3. Black F., Litterman R. Global Portfolio Optimization // Financial Analysts Journal. – September 1992. – P. 28–43.

4. Treynor J. L., Black F. How to Use Security Analysis to Improve Portfolio Selection // Journal of Business. – January, 1973. – P. 66–88.

5. Bodie Z., Kane A., Marcus A. J. Investments. – McGraw–Hill/Irwin, 2001. – 1015 p.

6. Singal V. Portfolio Risk and Return // CFA Curriculum, Level 1, Volume 4. – CFA Institute, 2011. – P. 315–448.