Пасічник Я. А.

РЕАЛІЗАЦІЯ ПРИНЦИПУ ДОСТУПНОСТІ В ПРОЦЕСІ ФОРМУВАННЯ ПОНЯТТЯ ЧИСЛОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ У СТУДЕНТІВ ВИЩОЇ ШКОЛИ

У статті розкривається проблема реалізації принципу доступності в процесі вивчення теми "Послідовності і границі" у вищій школі. Авторка вказує на те, що організація процесу вивчення матеріалу з опорою на запропонований нею методичний підхід, шляхом реалізації дидактичного принципу доступності, забезпечує свідоме оволодіння студентами не тільки положеннями з теми "Послідовності", а й взагалі базовими знаннями з курсу математики.

В статье раскрывается проблема реализации принципа доступности в процессе изучения темы "Последовательности и границы" в высшей школе. Авторка указывает на то, что организация процесса изучения материала с опорой на предложенный ею методический подход, путем реализации дидактического принципа доступности, обеспечивает осознанное овладение студентами не только положениями темы "Последовательности", но и базовыми знаниями с курса математики.

The article analyzes the problem of realizing the principle of simplicity in the course of learning the topic "Sequences and Limits" in the High School. The author points out that organizing the process of learning material based on the methodological approach the suggests, by means of implementation of didactic principle of simplicity, provides conscious mastering not only of the principles on topic "Sequences" but also of basic knowledge in mathematics.

Математика є важливим засобом забезпечення точності пізнання. Недаремно К. Гаусс назвав математику "царицею наук", а Леонардо да Вінчі стверджував: "Ніякої достовірності немає в науках там, де не можна застосувати жодної з ма-

© Пасічник Я. А., 2009

тематичних наук, і в тому, що не має зв’язку з математикою”. Математика як навчальна дисципліна займає чільне місце в навчальних планах переважної більшості спеціальностей вищих навчальних закладів. А тому майбутні спеціалісти відповідних галузей повинні здобути свідомі та міцні знання основ математичних наук – вищої алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу, математичної статистики та математичних методів, які застосовуватимуться в практичній діяльності. Однак, як свідчить практичний досвід, рівень математичних знань як старшокласників, так і першокурсників, а також спеціалістів різних галузей, з багатьох розділів вищої математики, зокрема математичного аналізу, невисокий. Одним з фундаментальних розділів математичного аналізу є розділ “Послідовності і границі”, зміст якого лежить в основі формування понять неперервності і границі функції, її похідної, збіжності рядів тощо.

Початкові відомості з цього розділу випускники шкіл мали б засвоїти в середній школі. Однак, як свідчить практика, і зміст, і обсяг знань, здобутих учнями з цієї теми, надзвичайно малий, або точніше, майже відсутній.

У навчальних планах для вищих навчальних закладів на вивчення цієї теми виділена незначна кількість годин, якої було б достатньо тільки для узагальнення і систематизації знань, здобутих в школі, але обмаль для поглиблення і розширення знань; а отже, як наслідок, студенти зазнають певних труднощів в оволодінні і засвоєнні положень з названого розділу. Ми з’ясували причини такого стану справ і встановили, що вони пов’язані, насамперед, із недотриманням дидактичних принципів доступності і наступності як у викладі матеріалу у шкільному та вузівських підручниках з математики, так і в навчальному процесі викладання курсу.

Так, у шкільному підручнику з алгебри і початків аналізу для 11 класу [5, стор. 10 – 27] теоретичний матеріал цієї теми викладено заабстраговано, без грунтовних, доступних пояснень, без належних наочних ілюстрацій. Виклад теорії можна вважати розрахованим на людину, обізнану вже з цим матеріалом, а не на школяра, який лише розпочинає ознайомлення з матеріалом. А наведені два малюнки, які ілюструють приклади послідовностей, не супроводжуються необхідними, зрозумілими, доступними для сприймання і усвідомлення коментарями чи поясненнями.

У підручнику [1, стор. 186 – 194], рекомендованому для економічних спеціальностей вищих навчальних закладів, ця тема розкрита в оглядовому порядку, із введенням означень понять послідовності і границі, із поданим малозрозумілим доведенням двох лем і трьох теорем та наведеними прикладами нескінченно малої та обмеженої послідовностей. Однак геометрична інтерпретація цих понять відсутня. Такий виклад матеріалу, очевидно, здійснено виходячи з того, що студенти-першокурсники повинні б мати певний запас необхідних базових знань з теми, здобутих у середній школі. Але, як переконливо доводить досвід, студенти здатні пригадати, що чули про послідовності і границі в школі, проте ні означень, ні властивостей, ні способів розв'язування вправ відтворити не можуть. Причиною такого стану справ, як вказувалося вище, є відсутність належної підготовки до засвоєння матеріалу, постановки життєво практичних завдань, які призводять до необхідності розширення знань, запровадження нових понять, розкриття їх змісту, розв'язання завдань з наступним їх ускладненням тощо. Коротко кажучи, причиною є відсутність принципу доступності у викладенні матеріалу, у процесі навчання.

Доступність навчання – це важливий педагогічний принцип, який вперше був висунутий чеським педагогом XVIII ст. Я.-А. Коменським. Це він вперше поставив проблему доступності у навчанні і сформулював правила: від простого до складного, від відомого до невідомого, від близького до далекого, які стали педагогічними аксіомами.

На сучасному етапі розвитку школи, як загальноосвітньої, так і вищої, реалізація принципу доступності у навчанні не втратила своєї актуальності. А стосовно навчання математики вона набуває особливого, ключового значення, яке полягає у подоланні труднощів під час оволодіння навчальним матеріалом. Труднощі, які виникають у студентів найчастіше під час вивчення математичного аналізу, пов'язані, по-перше, з нерозумінням студентами пояснень викладача, його мови, змісту тієї інформації, яка повідомляється, неусвідомленням її на етапі початкового ознайомлення з матеріалом, а по-друге, з нерозумінням тексту підручника, відповідної символіки, наявних інструкцій на етапі закріплення матеріалу під час роботи з підручником. Окрім цього, трудноші спричиняються ще рівнем загальної математичної підготовленості до вивчення теми, у зв’язку з чим слід враховувати принцип наступності. У даній статті розкриємо, як необхідно реалізувати принцип доступності в процесі вивчення теми “Послідовності і границі” у вищій школі.

Як свідчить власний досвід, поняття послідовності і границі слід спочатку формувати на рівні інтуїтивних уявлень і поступово переходити від цих уявлень до класичних формулювань точних означень цих понять. Як наслідок, частина студентів, безсумнівно, усвідомить і засвоїть на основі інтуїтивного уявлення строгі формулювання означень понять. Але частина студентів зуміє пояснити “своїми словами”, “неточною мовою”, що саме вони розуміють під поняттям послідовності і границі, що також не менш важливо, ніж уміння формулювати точні означення (особливо, коли в цих формулюваннях не все зрозуміло). Отже, процес розкриття змісту поняття “послідовність” пропонуємо здійснити шляхом пояснення таких, наприклад, практичних ситуацій: “Нехай метеоролог досліджує зміну температури повітря протягом певного місяця, скажімо, грудня, і щоденно записує значення температури в один і той самий час, наприклад, о 12-й годині дня. Внаслідок цього отримуються числа, що йдуть у певному порядку: спочатку температура першого числа місяця, потім – температура другого числа місяця і т. д. до останнього дня місяця. Числа, що є значеннями температури, записані в порядку днів від 1 до 31 грудня, утворюють числову послідовність. Кожне окреме значення температури вважатимемо членом цієї послідовності. Отже, ця послідовність вміщує 31 член. Якщо спостереження вести протягом року, дістанемо послідовність із 365 (366) членів, яку записують так:

$8^0, 8^0, 7^0, 6^0, ..., 0^0, -5^0, -6^0, ...$

Таким чином, процес побудови послідовності може закінчитися певного дня – 31-го, чи 365-го, чи будь-якого іншого. Отже, якщо абстрагуватися від числових значень температури і позначити їх символами $a_1, a_2, a_3, ...a_n$, де індекси 1, 2, 3, ... n вказують порядок слідування днів, то запис $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ означає **скінченну послідовність**, що містить n членів. Три крапки (...) тут означають пропуск членів з індексами, більшими, ніж 3, але меншими, ніж n. Член a_1 називається першим членом, a_2 – другим і т. д., a_n – **останнім**

членом скінченної послідовності (як в цьому випадку), а індекс n вказує на кількість членів послідовності. Члени послідовності слід записувати через кому.

Але процес побудови послідовності можна уявити собі таким, що необмежено продовжується, не має кінця. У такому випадку не буде існувати останнього елемента послідовності, бо яке б не було натуральне число n, за членом a_n, який має індекс n, безпосередньо слідуватиме член a_{n+1}, який також має індекс на 1 більший. Якщо в результаті побудови отримуємо **нескінченну послідовність**, то це означає, що яке б не було натуральне число N^* (навіть досить велике), завжди знайдеться член послідовності, який має індекс N^*, а отже, і член з індексом N^*+1.

У цьому випадку послідовність записується так: a_1, a_2, a_3, ...a_n, ... a_{N^*} ... . Але в математиці прийнято нескінченну послідовність записувати так: a_1, a_2, a_3, ... *або* a_1, a_2, a_3, ...a_n, ... В останньому записі перші три крапки (...) означають, як і вище, пропуск **скінченного** числа членів; але три крапки (...), що стоять в кінці рядка, завжди означають пропуск **нескінченного** числа членів, або, точніше кажучи, **можливість необмеженого продовження**. До нескінченних послідовностей приводить процес радіоактивного розпаду, якщо вести спостереження за зміною маси радіоактивної речовини. Нехай є шматок радіоактивної речовини, маса якої протягом кожної доби зменшується вдвічі, і щоденно записується значення маси, внаслідок чого утвориться сукупність чисел, які йдуть одне за одним за певним законом, а саме, наприклад: 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, ... При цьому ми абстрагуємося від того, що будь-яка серія спостережень скінченна, і вважаємо дані серії спостережень нескінченними.

Символічно скорочено послідовність записуємо так: $\{a_n\}$. Прикладами числових послідовностей є:

а) послідовність натуральних чисел: 1, 2, 3, 4, ..., n, ...;

б) послідовність парних натуральних чисел:
2, 4, 6, 8, ... $2n$, ...;

в) послідовність непарних натуральних чисел:
1, 3, 5, 7, ..., $(2n - 1)$, ...;

г) послідовність чисел обернених до натуральних:
$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}$ ...;

д) послідовність квадратів натуральних чисел:

1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2...;

е) послідовність чисел, обернених до квадратів натуральних чисел:

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{n^2}$$

є) послідовність правильних додатних звичайних дробів, знаменник яких на 1 більший, ніж чисельник:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

Числові послідовності можна проілюструвати на числовій прямій. Наприклад, послідовність (а) натуральних чисел на числовій прямій (*0x*) зображається точками, які є кінцями одиничних відрізків, розташованих справа від початку відліку – 0. Зобразимо їх зірочками (*):

а) ––|––*––*––*––*––*––*––*––*––*––*––*–––––*––*–––→ x
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 .....n n+1...
–––––→

Аналогічно можна зобразити інші послідовності:

б) –|–|–*–|–*–|–*–|–*–––––*–––|–––*–––––|–––→
0 1 2 4 6 8 ......2n 2n+2
–––––––→

в) ––|––*––|––*––|––*––|––*––––––––*––––––→ x
0 1 3 5 7 ....(2n-1) ...
–––––→

г) ––|–*–––––––*–––––*––––––*–––––––––––––––*–––––→ x
0 $\frac{1}{n}$... $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ 1
←––––––––––

і т. д. Зауважимо, що у випадках а), б), в) побудова ілюстрацій здійснювалася вправо від точки відліку (на що вказують стрілки нижче від числової прямої), а у випадку г) члени послідовності відкладаються справа наліво. Легко здогадатися, що при великому значенні n член $\frac{1}{n}$ зображатиметься точкою, яка теоретично не співпадає з точкою відліку – нулем, але практично на малюнку розташована надзвичайно близько до неї.

Зрозуміло, що кожна з послідовностей нескінченна. Наведене нами пояснення із розглядом прикладів послідовностей забезпечує розуміння змісту навчального матеріалу і засвоєння його на інтуїтивному рівні, а також створює надійний фундамент для розкриття наступних положень цієї теми, для формування точних і строгих означень та властивостей послідовностей і границь.

На цьому етапі, на наше переконання, реалізовано принцип доступності для усвідомлення понять **послідовність, члени послідовності, скінченні і нескінченні послідовності, ілюстрація послідовності** точками числової прямої і сформовано ці поняття на інтуїтивному рівні. Методичний підхід, який, на нашу думку, є ефективним для засвоєння студентами теми, що розглядається, полягає в здійсненні поступового переходу від здобутого інтуїтивного рівня сформованості понять до строго наукового математичного рівня і здійснюється так: спочатку на основі аналізу наведених вище прикладів послідовностей доцільно поставити проблемні запитання:

1. Як встановити відповідність між множиною натуральних чисел і множиною членів послідовності?

2. Який характер цієї відповідності?

3. Як задати, означити, побудувати нескінченну послідовність?

На ці питання, напевно, зможуть відповісти студенти, які володіють найпростішими прийомами узагальнення і абстрагування. Очікувані відповіді повинні бути достатньо строгими в математичному плані; якщо ж є неточності, то викладач повинен вказати на неточності і недосконалості у формулюваннях, після чого сформулювати чітко і ясно, а саме:

1. Якщо кожному натуральному числу n поставити у відповідність певне дійсне число a_n, то множина $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, ... називається числовою послідовністю. Символічно це записують так:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & & a_n \ldots \end{array} \qquad \text{або } (\forall\, n \in \mathrm{N})\ [n \to a_n],$$

де символ “$\forall$” називається квантором загальності і означає “кожний”, “будь-який”; символ “є” означає “належить”, N – множина натуральних чисел, “→” або “↓” “ставиться у відповідність”, “відповідає”. Коротко кажучи, цей запис слід читати: “кожному натуральному числу n ставиться у відповідність певне дійсне число a_n”.

2. Ця відповідність має функціональний характер, тобто є функцією, областю визначення якої є множина N – натуральних чисел, а областю значень є підмножина множини R – дійсних чисел. Загальний член послідовності при цьому записується $a_n = f(n)$ і означає, що члени послідовності – це значення певної функції натурального аргумента.

3. Нескінченну числову послідовність найприродніше задавати аналітичним способом, тобто за допомогою формули, яка вказує в явній формі, які дії потрібно виконати над символом n – натуральним числом, щоб дістати загальний член послідовності. Наприклад, у послідовності (б) потрібно натуральне число n помножити на 2, ($a_n = 2 \cdot n$), а в послідовності (в) слід від добутку натурального числа n на 2 відняти 1 ($a_n = 2 \cdot n - 1$) і т. д. Як видно з прикладів, щоб побудувати числову послідовність, треба встановити відповідність між множиною натуральних чисел та деякою іншою числовою множиною, яку можна дістати з формули загального члена. На числовій прямій члени послідовності зображаються точками, які відповідають числам $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$... при вибраній одиниці масштабу (одиничному відрізку).

Для закріплення цих положень доцільно розглянути 2 типи завдань, пов’язаних з аналітичним заданням послідовності, а саме:

1) за даною формулою загального числа записати послідовність;

2) записати загальний член послідовності, якщо задано кілька її перших членів.

Зауважимо, що розв’язання завдання (1) не викликає труднощів, але завдання другого типу дещо складніші, і їх розв’язування вимагає гнучкості мислення, вміння виявити закономірність для побудови структури виразу загального члена. Наведемо зразок розв’язування завдань вказаних типів.

Завдання 1. Дано загальний член послідовності $a_n = 4+3\,(n - 1)$. Записати перші 5 членів цієї послідовності.

Розв’язання. Кожному натуральному числу n з множини N ($N = \{1, 2, 3, ...\}$) поставимо у відповідність число, яке визначимо, з формули загального члена. ($\forall$ n є N) [$n \rightarrow a_n$]. У нашому випадку $n \rightarrow (4+3\,(n - 1))$.

Якщо $n = 1$, то $a_1 = 4 + 3 \cdot (1 - 1) = 4 + 3 \cdot 0 = 4$.

Якщо n = 2, то $a_2 = 4 + 3 \cdot (2 - 1) = 4 + 3 \cdot 1 = 7$.

Якщо n = 3, то $a_3 = 4 + 3 \cdot (3 - 1) = 4 + 3 \cdot 2 = 10$.
Якщо n = 4, то $a_4 = 4 + 3 \cdot (4 - 1) = 4 + 3 \cdot 3 = 13$.
Якщо n = 5, то $a_5 = 4 + 3 \cdot (5 - 1) = 4 + 3 \cdot 4 = 16$ і т. д.
Отже, послідовність $\{a_n\}$ можна записати так:
4, 7, 10, 13, 16, ..., $(4 + 3(n - 1))$, ...
Завдання 2 (другого типу). Дана послідовність
$\{a_n\}$: $\frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{6}{13}$, ... Записати її загальний член.

Розв'язання. Щоб записати загальний член послідовності, необхідно встановити закон відповідності між числами натурального ряду і членами даної послідовності:

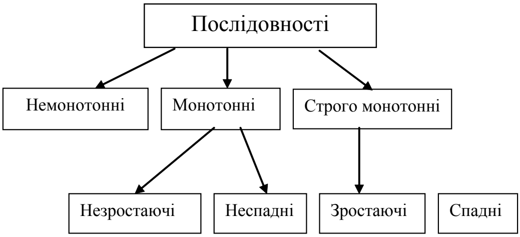
$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & & ..., n ... \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \frac{2}{5}, & \frac{4}{9}, & \frac{6}{13}, & & ? \end{array}$$

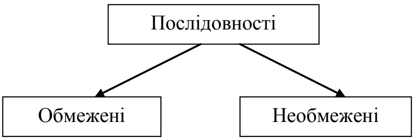
А для цього необхідно кожен член послідовності записати у вигляді виразу із змінною n, тобто у вигляді формули, в якій змінною виступає номер члена послідовності. Представимо кожен з дробів через номер члена:

Якщо $n = 1$, то $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 1}{4 \cdot 1 + 1}$.
Якщо $n = 2$, то $\frac{4}{9} = \frac{2 \cdot 2}{4 \cdot 2 + 1}$.
Якщо $n = 3$, то $\frac{6}{13} = \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 3 + 1}$.

Отже, зрозуміло, що чисельником кожного члена послідовності є число, яке у 2 рази більше від порядкового номера члена, тобто $2 \cdot n$, а знаменником є число, що на 1 більше від добутку порядкового номера члена і числа 4, тобто $4 \cdot n+1$. Таким чином загальний член цієї послідовності має вигляд: $a_n = \frac{2n}{4n+1}$.

Інша важлива інформація, яку повинні засвоїти студенти, і яка пов'язана з послідовностями, стосується класифікації послідовностей. Зазначимо, що в деяких підручниках вищої школи зустрічаються назви різних видів послідовностей, або ж навіть символічні записи їх суттєвих ознак, проте ця інформація розконцентрована і не створює цілісного уявлення про взаємозв’язки між різними видами послідовностей. Як свідчить наш досвід, доцільно спочатку подати схеми класифікації послідовностей, після чого вводити означення кожного виду і записати в символах та проілюструвати на числовій прямій. Деревовидні схеми класифікації мають вигляд:





Такі схеми дозволяють створити у студентів цілісне уявлення про математичне поняття “послідовність”, орієнтують на необхідність знати означення і властивості послідовностей кожного виду, розпізнавати їх за суттєвими ознаками, вказаними в означеннях. Скажімо, в основі означень строго монотонних послідовностей лежить відношення “більше” (>) або ж відношення “менше” (<) між її членами, тобто відношення строгої нерівності, а тому ці **означення** слід сформулювати так:

1. Якщо кожний наступний член послідовності більший від попереднього, то послідовність називається **зростаючою**. Символічно це означення записується так: $\{a_n\}$ – зростаюча, якщо $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_n < ...$, або коротше:

а) $\{a_n\}$ – зростаюча, якщо $(\forall\ n \in N)\ [a_n < a_n + 1]$,

б) $\{a_n\}$ – зростаюча, якщо $(\forall\ n \in N)\ [a_{n+1} > a_n]$.

Як відомо, є три варіанти символічного запису означення зростаючої послідовності. Важливо, щоб студенти розуміли і пам’ятали зміст (суть) символів і прочитували ці записи словесно. Прикладами зростаючих послідовностей є послідовності а), б), в), д), є), наведені вище.

2. Якщо кожний наступний член послідовності менший

від попереднього, то послідовність називається **спадною**. Символічно це записується так:

$\{a_n\}$ – спадна, якщо $a_1 > a_2 > a_3 ... > a_n > ...$, або коротше:

а) $\{a_n\}$ – спадна, якщо ($\forall$ n є N) $[a_n > a_{n+1}]$,

б) $\{a_n\}$ – спадна, якщо ($\forall$ n є N) $[a_{n+1} < a_n]$.

Прикладом спадної послідовності є послідовність 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{16}$, ... $\frac{1}{n^2}$, ...

Зростаючі і спадні послідовності називаються **строго монотонними**. Аналогічно слід ввести **означення неспадних і незростаючих послідовностей**. В основі цих означень лежить відношення нестрогого порядку, а саме "більше або дорівнює" чи "менше або дорівнює". Наведемо символічні записи цих означень:

1) $\{a_n\}$ – неспадна, якщо $a_1 \le a_2 \le a_3 \le ... \le a_n \le ...$, або
$\{a_n\}$ – неспадна, якщо ($\forall$ n є N) $[a_n \le a_{n+1}]$, або
$\{a_n\}$ – неспадна, якщо ($\forall$ n є N) $[a_{n+1} \ge a_n]$.

2) $\{a_n\}$ – незростаюча, якщо $a_1 \ge a_2 \ge a_3 ... \ge a_n \ge ...$, або
$\{a_n\}$ – незростаюча, якщо ($\forall$ n є N) $[a_n \ge a_{n+1}]$, або
$\{a_n\}$ – незростаюча, якщо ($\forall$ n є N) $[a_{n+1} \ge a_n]$.

Прикладом неспадної послідовності є послідовність показів термометра при спостереженні за температурою протягом деякого місяця, наприклад, квітня: 3^o, 4^o, 4^o, 5^o, 6^o, 6^o, 7^o, 7^o, 8^o, ...

Прикладом незростаючої послідовності є послідовність показів термометра в грудні: 9^o, 9^o, 8^o, 7^o, 7^o, 5^o, 4^o, 4^o, 2^o, -1^o, -1^o, ...

Як уже вказувалося вище, послідовності ілюструються точками на числовій прямій. Члени **монотонно зростаючої** послідовності ілюструються окремими точками, які розташовуються одна за одною зліва направо із збільшенням номера n.

———|———|———|——————————|——————————→ x

a_1 a_2 a_3 ....a_n ....

————————→

Члени **монотонно спадної** послідовності також зображуються на числовій прямій окремими точками, які із зростанням номера n розташовуються одна за одною справа наліво.

——————————|——————————|———|———|———|——————→ x

a_n a_3 a_2 a_1

←———

Як бачимо з ілюстрацій, у **строго монотонних** послідовностей немає однакових (рівних) членів, а отже, немає співпадаючих точок на числовій прямій, оскільки, згідно з означенням, між членами таких послідовностей існує відношення строгого порядку, яке виражається строгими нерівностями (> або <).

В ілюстраціях монотонних послідовностей – незростаючих та неспадних – точки, що зображають члени послідовності, можуть співпадати або ні. Співпадаючим точкам відповідають рівні члени. Наприклад, неспадна послідовність показів термометра у квітні, наведена вище, ілюструється так:

a_1 $a_2=a_3$ a_4 $a_5=a_6$ $a_7=a_8$

———|———|———|———*———*———|———*———*———|———|————————→ x

0 3 4 5 6 7

——————————————————————→

Отже, співпадаючі точки зображають відповідно члени $a_2=a_3$, $a_5=a_6$, $a_7=a_8$ і т. д. і розташовані по порядку зліва направо із зростанням номера n.

А наведена вище незростаюча послідовність показів термометра в грудні ілюструється так:

$a_{10}=a_{11}$ a_9 $a_7=a_8$ a_6 a_5 $a_3=a_4$ $a_1=a_2$

—————*———|———|———*———|———*———|———|————*————*———→ x

-1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

З ілюстрації видно, які члени послідовності рівні, а відповідні їм точки співпадають: $a_1 = a_2$, $a_3 = a_4$, $a_7 = a_8$ і т. д. Взагалі незростаючі і неспадні монотонні послідовності мають деякі рівні члени, а отже, на числовій прямій співпадають точки, тому що, згідно з їх означеннями, між членами є відношення нестрогого порядку, яке виражається нестрогою нерівністю ($\geq$ або $\leq$).

Прикладами немонотонних послідовностей є також послідовності:

1) -1, 1, -1, 1, ..., $(-1)^n$, ...

2) 0, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$, ..., $(1+\frac{(-1)^n}{n})$, ...

3) 2, 2, 2, ...

Остання послідовність є прикладом сталої послідовності і на числовій прямій ілюструється однією точкою.

Немонотонна послідовність (1) ілюструється двома точками, а послідовність (2) – нескінченною множиною точок. Наведемо ці ілюстрації:

$a_1=a_3=\ldots$ $a_2=a_4=\ldots$

1) ———*———|———*————→ x

-1 0 1

a_1 a_3 a_5 a_6 a_4 a_2

2) ––*——————*––*———|––|––*———*—————→ x

0 $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ .... 1 $\frac{7}{6}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{3}{2}$

$a_1=a_2=a_3=\ldots-a_n=$

3) ––|–––|————*——————→ x

0 1 2

Звертаємо увагу, що ілюстрація послідовності (2) не містить співпадаючих точок.

У процесі розв’язування задач часто доводиться спиратися на означення понять “обмежена” і “необмежена” послідовність, виявляти відповідну суттєву ознаку, виконувати геометричну інтерпретацію. Тому наведемо ряд означень, пов’язаних з другою класифікацією послідовностей.

1. Послідовність $\{x_n\}$ – **обмежена зверху**, якщо

$(\exists\, M \in R)\ (\forall_n \in N)\ [x_n \leq M]$.

Геометрично це означає, що на числовій прямій точки, які зображають всі члени послідовності, розташовані зліва від точки, що зображає число M.

2. Послідовність $\{x_n\}$ називають **обмеженою знизу**, якщо існує таке дійсне число m, що всі її члени більші або дорівнюють йому. Символічно:

$\{X_n\}$ – обмежена знизу, якщо

$(\exists\, m \in R)\ (\forall\, n \in N)\ [x_n \geq m]$.

Геометрично це означає, що на числовій прямій всі члени послідовності ілюструються точками, які розташовані справа від точки, яка зображає число m.

3. Якщо послідовність $\{x_n\}$ обмежена і зверху, і знизу, то її називають **обмеженою**. Отже послідовність обмежена тоді, коли існують такі дійсні числа m *і* M, що всі члени послідовності належать проміжку $[m; M]$, тобто задовольняють нерівність: $m \leq x_n \leq M$.

Означення обмеженої послідовності формулюють поіншому.

4. $\{x_n\}$ – **обмежена**, якщо

$(\exists\, C \in R)\,(C > 0)\,(\forall\, n \in N)\,[|X_n| \leq C]$.

Геометрично обмежену послідовність можна задати двома способами:

——*——|——|——|————————|————————*——→ або

m x_1 x_2 x_3 .... x_n .... M

x_1 x_2 x_3

—*——|——|—————|—|——————*——→

$-c$ 0 c

5. Послідовність $\{x_n\}$ називається **необмеженою**, якщо для довільного досить великого додатного дійсного числа C знайдеться таке натуральне число n, де член послідовності з цим номером x_n по модулю буде більшим від числа C. Символічно це означення можна записати так:

$\{x_n\}$ – необмежена, якщо

$(\forall\, C \in R)\,(C > 0)\,(\exists\, n \in N)\,[|x_n| > C]$.

Прикладом необмеженої послідовності є послідовності натуральних чисел, їх квадратів та інші.

Покажемо на прикладі, як встановити, чи послідовність обмежена, чи ні. Нехай послідовність $\{x_n\}$ задана загальним членом $x_n = \frac{5n+7}{n}$. Для з’ясування факту обмеженості слід переконатися, чи існують такі дійсні числа m та M, що всі члени послідовності задовольняють нерівність: $m \leq x_n \leq M$.

Вираз, що задає загальний член, перетворимо так:

$$x_n = \frac{5n+7}{n} = \frac{5n}{n} + \frac{7}{n} = 5 + \frac{7}{n}$$

Визначимо кілька перших членів послідовності.

Якщо n=1, то $x_1 = 5 + \frac{7}{1} = 12$.

Якщо n=2, то $x_2 = 5 + \frac{7}{2} = 5 + 3\frac{1}{2} = 8\frac{1}{2}$.

Якщо n=3, то $x_3 = 5 + \frac{7}{3} = 5 + 2\frac{1}{3} = 7\frac{1}{3}$.

Очевидно, що із зростанням номера n другий доданок $\frac{7}{n}$ загального члена дедалі зменшується і наближається до нуля, внаслідок чого члени x_n набувають значень як завгодно близьких до числа 5. Отже, всі члени послідовності знаходяться в числовому проміжку] 5; 12], тобто їх значення спадають від числа 12, бо x_1=12, до числа 5, причому всі $x_n > 5$ (строга нерівність): $5<x_n \leq 12$. Це означає, що послідовність $\{x_n\}$ **обмежена зверху** числом 12 і **обмежена знизу** числом 5, тобто існують такі дійсні числа m=5 і M=12 , що всі члени послідовності $\{x_n\}$ задовольняють нерівність $m<x_n \leq M$, а тому, згідно з означенням, послідовність обмежена.

Наведений нами зміст теми "Послідовності" розкриває вузлові її питання, фундаментальні положення, які важливі для засвоєння наступного навчального матеріалу, що стосується властивостей послідовностей і границь. На наше переконання, організація процесу вивчення матеріалу з опорою на запропонований нами методичний підхід, при якому ознайомлення з матеріалом здійснюється шляхом постановки життєво практичних задач, що приводять до нових понять, до необхідності введення термінів, що позначають ці поняття, шляхом поступового переходу від тлумачення цих понять до строгих їх означень, ілюстрацій та геометричної інтерпретації, а отже, шляхом реалізації дидактичного принципу доступності, забезпечує свідоме оволодіння студентами не тільки положеннями з теми "Послідовності", а й взагалі базовими знаннями з курсу математики.

Література

1. Васильченко І. П. Вища математика для економістів: Підручник. – 3-є вид. –К.: Знання, 2007. – 454 с.

2. Высшая математика для экономистов. Учебн. пособие для вузов / Н.Ш.Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман. Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 439 с.

3. Пасічник Я. А. Математика (Лекції для студентів-економістів). 2-е вид., доповнене і уточнене. – Острог: Острозька академія, 2000. – 284 с.

4. Столяр А. А. Педагогика математики: Учебн. пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов. Мн.: Высшая школа, 1986. – 414 с.

5. Шкіль М. І. та ін. Алгебра і початки аналізу: Підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів / М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук. – К.: Зодіак – ЕКО, 2006. – 384 с.