Пасічник Я. А.

НАУКОВО-МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ФУНКЦІЙ У ВИЩІЙ ШКОЛІ

У статті здійснений опис розкриття наукових основ вивчення поняття функції, властивостей функцій, їх дослідження і побудови графіків із врахуванням методичних основ викладання матеріалу, насамперед, дотримання принципу науковості в поєднанні з принципами наочності та доступності.
Ключові слова: *наочність, функція, графік.*

В статье осуществлено описание раскрытия научных основ изучения понятия функции, свойств функций, их исследования и построения графиков с учетом методических основ преподавания материала, прежде всего, соблюдения принципа научности в сочетании с принципами наглядности и доступности.
Ключевые слова: *наглядность, функция, график.*

In this article is devoted to description of the disclosure of scientific principles study of the concept of function, properties of functions, research and charting in view of the methodological foundations of teaching material, especially the principle of scholarship, combined with the principles of visibility and accessibility.
Keywords: *visibility, function, schedule.*

Сучасний період у розвитку людства – це, образно кажучи, період науково-технічної революції, коли наука перетворюється в провідну силу виробництва, коли суттєво зростають внутрішні сили наукового прогресу, а наукові відкриття швидко знаходять застосування в практичній діяльності людини, насамперед в економічній сфері суспільства. У цьому складному і бурхливому процесі математика займає почесне місце, оскільки вона розв'язує проблеми, пов'язані зі створенням сучасних електронних обчислюваних машин та пристроїв, різноманітної комп'ютерної техніки, з оволодінням внутріядерною енергією, створенням потужного знаряддя дослідження важливих питань природознавства, економіки, інженерної справи тощо. У наш час відбувається математизація знань у багатьох галузях наук і практичній діяльності, які донедавна були віддалені від використання математичних методів дослідження. І причиною цього є те, що суто якісне вивчення явищ природи, економіки, медичної справи, організації виробництва й управління дуже часто виявляється недостатнім і вимагає знання кількісних закономірностей цих процесів. Наприклад, неможливо змусити раціонально працювати систему зв'язку, якщо не знати кількісних закономірностей надходження вимог від абонентів, чи тривалості обслуговування цих вимог, якщо не знати їх пропускну здатність. Так само неможливо розрахувати поведінку літака в польоті, якщо не знати кількісних закономірностей, пов'язаних з утворенням підйомної сили, впливом вібрації на кріплення крила до фюзеляжа, впливу форми фюзеляжа і крил на опір в польоті.

Якщо ці проблеми видаються складніші, то можна навести приклади простіших проблемних задач, які не можливо успішно розв'язати без знання функціональних залежностей і зв'язків між різними параметрами та величинами, які характеризують певні процеси, без знання фундаментального математичного поняття – функції. Скажімо, розробка бюджету держави, області, району, міста та, врешті-решт, сім'ї повинна враховувати кількісні характеристики різних факторів, пов'язаних із зміною (зростанням чи зниженням) цін на товари першої необхідності, економічною стабільністю (чи нестабільністю, з кризою), з інфляцією й ін. Або ж ще простіший приклад: неможливо раціонально розрахувати витрати кількості бензину під час руху автобуса без врахування кількісних характеристик зміни (збільшення чи зменшення) відстані, чи зміни часу руху, так само як і неможливо передбачити час руху цього автобуса на певній відстані без врахування його швидкості тощо. Аналогічно в ситуації купівлі-продажу кількість купленого товару за певну суму залежатиме від ціни, яку необхідно враховувати при цьому. Так само неможливо чітко спланувати обсяг випуску продукції на певний період (рік, квартал, місяць) без врахування кількісної характеристики цього процесу – продуктивності праці.

Наведений перелік життєво важливих проблем, пов'язаних з людською діяльністю, далеко не вичерпний, але в основі їх і подібних їм лежить поняття функції. І майбутні спеціалісти з різних галузей знань – економіки, інженерної справи та інших наукових напрямків – математики, фізики, природознавства, які вивчають курс математики у вищій школі, повинні досконало оволодіти знанням функціональної залежності величин, вмінням застосовувати ці знання в практичній сфері, узагальнювати їх і переносити з одних ситуацій в інші, абстрагуючись від несуттєвих характеристик та обставин.

Поняття функції формується ще в процесі вивчення шкільного курсу математики, причому обсяг знань, передбачених програмою середньої школи, мав би дозволити випускникам достатньо орієнтуватися у функціональних залежностях і вміти проводити елементарні розрахунки. Однак, як показує практика, дуже часто випускники шкіл, зокрема ті, що вступили до вищих навчальних закладів, не вміють прогнозувати певні результати практичної діяльності, провести належні розрахунки, пов’язані з врахуванням функціональних залежностей величин, а в процесі вивчення нового матеріалу, який стосується функцій, зазнають значних труднощів, особливо під час дослідження властивостей функцій і побудови їх графіків методами аналізу означень та методами диференціального числення.

У процесі оволодіння цим матеріалом спостерігається, з одного боку, недостатній рівень знань студентами положень зі шкільного курсу математики, а труднощі, що виникають, пояснюються ще, з другого боку, недостатнім рівнем науково-дидактичних та методичних вмінь викладача. Не секрет, що викладачі часто не враховують дидактичних принципів наочності і доступності у викладанні матеріалу і їх взаємозв’язку з принципом науковості, а тому поверхово, не заглиблюючись в окремі суттєві нюанси властивостей, поспіхом формулюють їх та записують відповідні формули, які найчастіше студенти не цілком розуміють, намагаються їх зазубрити та запам’ятати без належного усвідомлення. І як наслідок цього – відсутність вміння застосовувати властивості, формули до розв’язування задач, до виявлення функціональних зв’язків між величинами, до побудови графіків.

Метою статті є розкриття наукових основ вивчення поняття функції, властивостей функцій, їх дослідження і побудови графіків із врахуванням методичних основ викладання матеріалу, насамперед, дотримання принципу науковості в поєднанні з принципами наочності та доступності. Нижче наведемо тексти пояснень та розповідей, які розкривають: а) зміст поняття функції; б) способи задання функції; в) властивості функцій і г) побудову графіків. Разом з цим їх можна трактувати як методичні рекомендації для ефективного проведення викладу матеріалу під час лекцій.

<u>Означення функції</u> слід розкривати з теоретико-множинної точки зору, а саме:

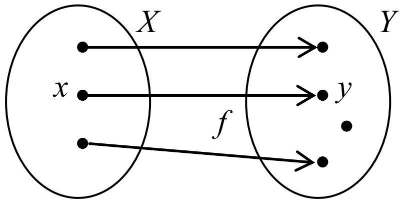
а) як певне <u>відношення</u> між елементами двох множин;

б) як <u>правило</u> або <u>закон відповідності</u> між елементами множин, і

в) як <u>позначення змінної величини</u>, яка залежить від іншої величини і при її зміні набуває різних значень.

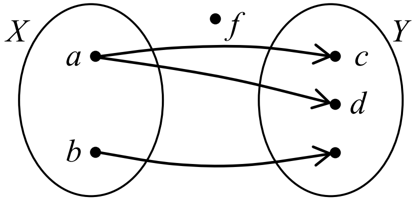
а) Нехай X і Y дві довільні множини. Якщо кожному елементу x з множини X (в символах пишемо: $x \in X$) за деяким правилом f поставимо у відповідність певне значення y з множини Y (запис: $y \in Y$), то говорять, що на множині X задано функцію f із значенням у множині Y і записують $y = f(x)$ або $f : X \to Y$. Останній запис означає, що множина X відображається у множину Y.

Таке відношення між елементами двох множин, при якому кожному елементу першої множини відповідає певний елемент другої множини, можна зобразити у вигляді графа:



Для побудови графа множини X та Y зображають кругами або замкненими криволінійними контурами без точок самоперетину, а їх елементи – точками. Стрілками з'єднують елементи множини X з відповідними елементами множини Y. Особливістю графа функції є те, що з кожного елемента множини X виходить тільки одна стрілка. До елементів множини Y може підходити одна або кілька стрілок, або зовсім не підходити жодної стрілки. Ця особливість графа функції дозволяє сформувати означення функції ще й так: “Відношення між елементами двох множин, при якому кожному елементу першої множини відповідає не більше одного елемента другої множини, називається функцією”.

При цьому слід запропонувати для обстеження іншу ілюстрацію відношення між елементами двох множин, наприклад таку:



Після цього зробити висновок, що наведена ілюстрація не є графом функції, бо в множині X є елемент a, з якого виходить дві стрілки, і йому ставиться у відповідність не один, а два елементи з множини Y, що суперечить означенню функції. А згідно з означенням, кожному елементу з множини X повинен відповідати певний (єдиний, не більше одного) елемент з множини Y.

Слід показати на графі, що елемент множини X при відображенні f називається прообразом, а відповідний йому елемент з множини Y називається образом. Множину X називають областю визначення, а множину образів – множиною значень функції.

Таке відображення записують у символах так:

а) $x \to f(x)$, або б) $x \xrightarrow{f} y$, або в) $y = f(x)$.

Букву x, яка позначає елемент з множини X, називають аргументом, а букву y, яка позначає ті елементи з множини Y, які за правилом f відповідають елементам з множини X, називають значенням функції.

Всі положення, що розкривають зміст поняття функції, будуть краще усвідомлені і студентами (і учнями в школі), якщо розглянути конкретні приклади.

Приклад. Кожному елементу x з множини $X = \{-2; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ поставимо у відповідність f число, яке є його квадратом.

Цю множину X називаємо областю визначення функції, а множину, яка складається з тих чисел, які є квадратами елементів множини X, називають областю значень функції.

Отже, $Y = \{0; 1; 4; 9\}$ – область значень.

З наведеного прикладу легко зрозуміти, що функція – це відповідність між двома числовими множинами X та Y, кожна з яких є підмножиною множини дійсних чисел – R, що символічно записують так: $X \subset R$, $Y \subset R$, де символ “$\subset$” читають “є підмножиною”, або “включається”. Законом f цієї відповідності є правило $y=f(x)$, або $y=x^2$, тобто що “елемент y є квадратом елемента x”. Як відомо, для кожного дійсного числа існує єдине (певне) число, що є його квадратом.

Важливим моментом у процесі пояснення є його узагальнення і запис у символічній формі. Адже, символічні формули дозволяють стисло і компактно відобразити значний обсяг математичної інформації. Попередньо слід ввести символи: $\forall$ – квантор загальності (читають: “для всіх”, “для кожного”); $\exists$ – квантор існування (читають: “існує”, “певний”); $\subset$ – знак включення; $\in$ – належить, R – множина дійсних чисел; f – функція, відповідність; символ “$\Rightarrow$” – (читають “якщо..., то”, причому слово “якщо” читають на початку формули, а слово “то” – на місці самого символа). Отже, за допомогою символіки означення функції можна записати так:

$(\forall\, x \in X)(X \subset R)(\exists\, y \in Y)(Y \subset R)(y = f(x)) \Rightarrow X \to Y$

Цей запис читають так: “Якщо для кожного елемента x з множини X, що є підмножиною множини дійсних чисел, існує елемент y з множини Y, яка є підмножиною множини дійсних чисел, такий що $y = f(x)$, то відповідність між множинами X та Y називається функцією".

Розглянутий вище приклад вказує на те, що правило $y = x^2$, за яким встановлено відповідність $X \to Y$, називається законом відповідності або функцією.

Отже, термін "функція" має такі смислові значення: з одного боку, відношення між елементами двох множин, за яким кожному елементу x першої множини відповідає не більше одного елемента другої множини, а з другого боку, це правило або закон відповідності, за яким встановлено це відношення.

Після цього варто розкрити третє смислове значення терміна "функція", яке пов'язане з процесами і явищами навколишньої дійсності, наприклад, з явищами руху, купівлі-продажу, з виробничою діяльністю та іншими, і виражає зв'язок між двома величинами, з яких одна є незалежною змінною (аргументом) і позначається x, а значення другої – y змінюється залежно від першої. Найпростіші приклади залежностей між такими групами величин: ціна, кількість, вартість; швидкість, час, відстань; продуктивність праці, час, виконана робота; витрати сировини на один виріб, кількість виробів, загальна витрата сировини та інші.

Доцільно, оскільки це й важливо, розглянути прямо пропорційну залежність між величинами кожної групи при виборі однієї з величин за сталу, а також обернено пропорційну залежність при виборі за сталу величину іншу з величин кожної групи.

Наприклад, при сталій ціні із зміною (зменшенням чи збільшенням) кількості змінюється (зменшується чи збільшується) вартість. Отже, вартість (w) є функцією від кількості (k) присталій ціні (c). Ця функціональна залежність вартості (w) є прямопропорційною до кількості (k) при сталій ціні (c): $w = k \cdot c.$ Якщо ж сталою величиною виступає вартість (w), тобто обсяг грошей, що необхідно витратити на купівлю продукції, то із змінною (збільшенням чи зменшенням) ціни (c) зміниться (зменшиться чи збільшиться) кількість продукції. В цьому випадку функцією є величина кількість (k), яка перебуває в обернено пропорційній залежності від ціни (c) при сталій вартості (w):

$$k = \frac{w}{c}.$$

Аналогічно варто розглянути прямо пропорційну та обернено пропорційну залежності між величинами: продуктивність праці (p), час (t) і обсяг виконаної роботи (r). Ці залежності для кожної групи величин варто записувати в символах, але ще більш важливо для розуміння – формулювати їх в популярній формі. Наприклад: чим більша продуктивність праці (p), тим вищий (більший) обсяг виконаної роботи (r) за один і той самий час (t). Чим більша продуктивність праці (p), тим менше часу (t) необхідно затратити на виконання одного і того самого обсягу роботи (r).

У зв’язку з різними підходами до трактування поняття функції необхідно розглянути різні способи задання функцій. Функція вважається заданою, якщо вказано її область визначення (множина X) і спосіб (правило, закон) встановлення відповідності між елементами x та y. Множина Y може бути задана явно або неявно. Найчастіше її утворюють за законом (правилом) відповідності. Так, у вище розглянутому прикладі множину $Y = \{0; 1; 4; 9\}$ було утворено в результаті піднесення елементів множини X до квадрата. Множину X називають областю визначення функції і позначають $D(f)$, а множину значень функції позначають $E(f)$. Як видно з означення функції, з теоретичної точки зору, не суттєво, яким саме конкретно способом встановлюється відповідність між елементами області визначення ($D(f)$) і множини значень ($E(f)$) функції. Суттєво, щоб така відповідність була цілком певною і однозначною, тобто що кожному елементу з області визначення мусить за певним правилом відповідати один і лише один елемент з множини значень функції.

Існують такі основні способи задання функції: словесний, аналітичний, табличний, графічний і графом. Задати функцію словесно означає вказати правило (закон) відповідності між елементами множин X та Y, причому множина X задається, а множину Y найчастіше можна утворити на основі закону відповідності.

Аналітично задають функцію формулою, яка зв’язує змінні x та y. Якщо функція задана аналітично і не вказана область визначення $D(f)$, то під останньою слід розуміти область існування виразу, який задає цю функцію. Наприклад, у вище розглянутому прикладі, де функція $y = x^2$, областю визначення була задана скінченна множина. Але якщо не була б вказана область визначення, то нею слід вважати множину дійсних чисел (R), оскільки вираз x^2 існує при всіх значеннях з множини R.

Але для функції $y = f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$ областю визначення є множина тих значень змінної x, при яких існує вираз $\dfrac{2x}{x^2 - 4}$.

Важливо пригадати із студентами умови існування алгебраїчних дробів, відтворити в них вміння встановлювати ці умови і визначати, при яких значеннях змінної x існує вираз $\dfrac{2x}{x^2 - 4}$, сформувати вміння формулювати узагальнення: дріб існує тоді і тільки тоді, коли його знаменник не перетворюється в нуль. Отже, для того, щоб існувала ця функція, задана аналітично дробом $\frac{2x}{x^2-4}$,

необхідно, щоб $x^2 - 4 \neq 0$. Розв’язавши цю нерівність, знайдемо, які значення змінної x слід вилучити з множини дійсних чисел (R), щоб дістати область визначення $D(f)$ цієї функції:

$x^2 - 4 \neq 0$, $(x - 2)(x + 2) \neq 0$, $(x - 2) \neq 0$, $(x + 2) \neq 0$. Звідси $x \neq -2$ і $x \neq 2$.

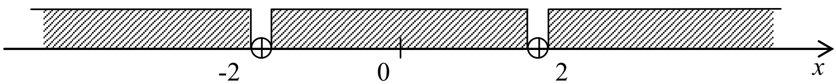
Важливо також добитись усвідомлення студентами структури області визначення цієї функції і сформувати в них вміння зображати її на числовій прямій, оскільки в майбутньому ці вміння використовуватимуться під час побудови графіків функцій у системі координат на площині, для встановлення інтервалів зростання чи спадання функцій, інтервалів опуклості й інше. Отже, для цієї функції область визначення являє собою множину дійсних чисел, з якої вилучено множину, що складається з чисел – 2 і 2. Це символічно записують так:

$D(f) = R \setminus \{-2; 2\}$. Знак “\” читається “без”.

Її також можна записати у вигляді об’єднання (знак “$\cup$”) окремих відкритих проміжків, а саме:

$D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$

На числовій прямій цю область ілюструють так:



Потрібно обов’язково звернути увагу на те, що кінці відкритих проміжків не належать цим проміжкам, а отже, не належать до області визначення $D(f)$. Цей факт на числовій прямій зображають не зафарбованим кружечком і розуміють, що точки, які зображають числа -2 та 2, є “виколотими” з прямої. Заштрихована область на числовій прямій і є областю визначення цієї функції $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$.

Після вправ на визначення області визначення дробових функцій доцільно розглянути кілька прикладів аналітичного задання функцій, коли функція не просто задана формулою, але що змінні у формулі мають певний зміст – геометричний, фізичний, хімічний, економічний тощо. І при цьому необхідно встановити область визначення функції. Скажімо, кожному значенню радіуса (r) круга відповідає цілком певне значення площі (s) круга, тобто площа круга (s) є функцією від його радіуса (r) і між ними існує функціональна залежність:

$S = \pi r^2$. І хоч вираз πr^2 існує на всій множині R-дійсних чисел, однак областю визначення цієї функції (S) не є множина дійсних чисел R, а лише множина додатних дійсних чисел (R_+), оскільки довжина радіуса (r) може бути виражена тільки додатнім числом. Отже, $D(s)= R_+$.

Пропонуємо розглянути зі студентами інший приклад, який вимагає від них проявити гнучкість мислення. Так, наприклад, кожному натуральному числу *n* $(n \in N)$ сторін опуклого многокутника відповідає цілком певна сума (S) його внутрішніх кутів, яка обчислюється за формулою $S = 2d(n-2)$, де d – міра прямого кута (90° або $\frac{\pi}{2}$).

Отже, сума внутрішніх кутів опуклого многокутника є функцією числа сторін многокутника, яке є аргументом. Але поставимо питання: що є областю визначення цієї функції? Знову ж таки з погляду алгебри вираз $2d(n-2)$ існує на всій множині дійсних чисел (R), однак її (множину R) не можна вважати областю визначення цієї функції (S), оскільки число n сторін многокутника не може бути ні від’ємним, ні дробовим, а також не може дорівнювати числам 1 та 2. А тому, уявляючи собі різні многокутники, можна дійти висновку, що функція S має областю визначення множину натуральних чисел, починаючи від числа 3, бо найменше число сторін у многокутника може дорівнювати числу 3. Що ж до найбільшого значення аргумента n, то теоретично можна уявити многокутник з нескінченно великою кількістю сторін (таке уявлення використовується при виведенні формул довжини кола та площі круга), але практично максимальну кількість сторін многокутника вважають обмеженою ($n = 12$; $n = 20$ тощо). Отже, для функції S, що виражає суму внутрішніх кутів опуклого многокутника залежно від кількості сторін, областю визначення є скінченний відрізок натурального ряду, починаючи з числа 3.

Таким чином, задаючи функцію аналітично, необхідно точно встановити всю ту множину значень аргумента, які є допустимими для існування функції. Тому область визначення функції часто називають областю допустимих значень аргумента.

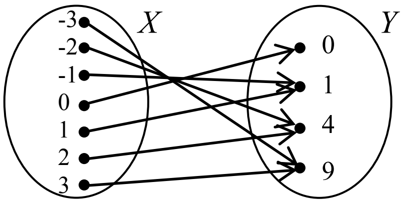
У математичному аналізі найчастіше функцію (функціональну відповідність) задають аналітично тоді, коли областю визначення її є певна нескінченна числова множина, на основі чого ілюструють функцію графіком. Якщо областю визначення функції є скінченна числова множина, то функцію зручно задавати таблично. Наприклад, функцію $y = x^2$, задану на множині $X = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$, можна задати таблично так:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

У таблиці значення аргумента x записані у верхньому рядку, а відповідні значення функції y – у нижньому.

Отже, областю визначення $D(f)$ є множина X, а областю значень – $E(f) = \{9, 4, 1, 0\}$.

Як вказувалось вище, відповідність між множинами зручно задати графом, з якого дуже добре видно, що кожному елементу з першої множини (X) ставиться у відповідність певний елемент другої множини (Y). Функцію $y = x^2$, задану вище таблично, можна зобразити графом так:

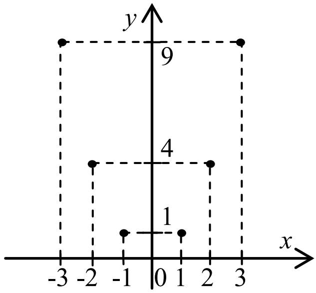


Аналізуючи граф чи таблицю, можна задати функцію множиною пар виду (x; y), де перша компонента x пари є елементом з множини X, а друга компонента y – відповідний елемент (образ) з множини Y. Позначимо множину пар, які задають функцію, буквою P.

Отже, Р = {(-3,9), (-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4), (3,9)}множина задає функцію $y = x^2$, на множині Х = {-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3}.

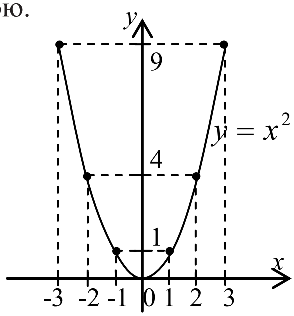
Засвоєння студентами способів задання функції повинно бути неперервним процесом, у якому одні способи переплітаються з іншими, взаємозв'язані з ними.

Перш ніж розкрити графічний спосіб задання функції, слід повторити зі студентами геометричний зміст поняття пари чисел, а саме, що кожній парі в системі координат на площині відповідає точка, абсцисою якої є перша компонента пари, а ординатою – друга компонента пари. Таким чином, якщо функція задана множиною P пар, то в системі координат цій множині відповідатиме сукупність точок, яка називається графіком функції. З попереднього прикладу очевидно, що таких точок буде стільки, скільки елементів у множині X, бо кожний елемент множини X є абсцисою певної точки. У розглянутому прикладі є 7 точок:



Цей факт варто узагальнити: якщо областю визначення $D(f)$ функції є скінченна множина, то графіком цієї функції є скінченна множина точок площини. Якщо ж областю визначення функції є незчисленна множина (деякий інтервал множини дійсних чисел), то графіком цієї функції є незчисленна множина точок, яка зображається певною неперервною кривою на площині.

Якщо функцію $y = x^2$ розглядати не на скінченній множині X, як в попередньому випадку, а на множині [–3; 3], тобто на відрізку, що є підмножиною множини дійсних чисел, то графіком її буде лінія, яка називається параболою.

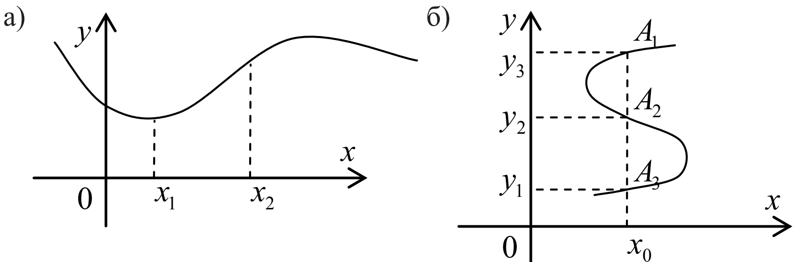


На основі таких роз’яснень слід зробити узагальнення, що задати функцію графіком означає в прямокутній декартовій системі координат побудувати множину точок (лінію), абсцисами яких є елементи з області визначення (X), а ординатами – відповідні їм елементи з множини значень функції (Y).

Разом з цим студенти повинні усвідомити, що для кожної функції, яка задана одним із способів (таблично, графом, парами, аналітично), можна побудувати в системі координат графік, який найбільш наочно ілюструє залежність між аргументом $x \in D(f)$ та значенням функції $y = f(x)$, $y \in E(f)$. Найчастіше графіком функції є деяка лінія на площині в системі координат XOY.

Навпаки, лінію на площині можна трактувати як графік деякої функції. Проте, якщо кожну функціональну залежність можна ілюструвати графіком (лінією) у системі координат на площині, то не кожна лінія на площині в системі координат є графіком якої-небудь функції. Це пояснюється тим, що згідно з означенням, розглядаються лише такі відповідності, які є однозначними функціями, тобто кожному значенню x аргумента відповідає певне (єдине) значення функції $y = f(x)$.

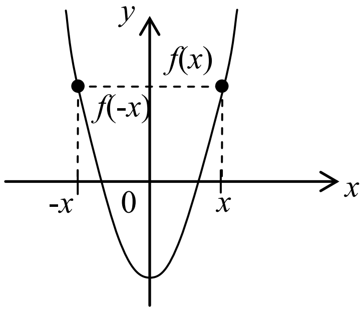
Варто студентам запропонувати для порівняльного аналізу дві ілюстрації, одна з яких (а) є графіком функції, бо кожному значенню аргумента x (точці на осі абсцис) відповідає єдине значення функції (єдина точка на лінії), тобто перпендикуляр, проведений в будь-якій точці осі OX, перетинає криву лінію в одній точці. Друга ілюстрація (б) не відображає функціональну залежність, оскільки одному значенню аргумента (x_0) відповідає кілька значень ординати (y), тобто перпендикуляр, проведений в довільній точці (x_0) осі абсцис, перетинає лінію в кількох точках – A_1, A_2, A_3. Це означає, що одному значенню аргумента x ставиться у відповідність не одне, а 3 (три) значення y. Отже, така лінія не є графіком ніякої функції.



Такого типу вправи, їх аналіз, зіставлення й узагальнення сприяють розумінню, усвідомленню і міцному засвоєнню означення поняття функції, її властивостей і формування вмінь будувати графік. Свідоме володіння знанням властивостей функцій студентами дозволить їм швидше виконати ескіз кривої, що відображає функціональну залежність.

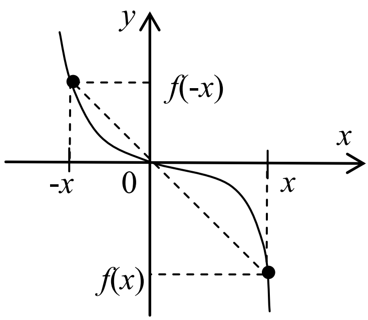
Розкриття властивостей функції необхідно проводити на конкретних прикладах функцій, шляхом формулювання означень та запису формул, що символізують ці означення, після чого зробити висновки про конфігурацію графіка та його розташування в системі координат.

Так, скажімо, для парної функції $f(x)$ виконується рівність $f(-x)=f(x)$ для будь-якого значення аргумента x з області визначення X, тобто $(\forall x \in X)\ [f(-x)=f(x)]$. Слід звернути увагу, що значення аргумента (-x) та x зображаються на осі OX симетричними точками відносно початку координат, а відповідні їм значення функції рівні, а тому точки (–x; f(–x)) і (x; f(x)) розташовані симетрично відносно осі ординат. Оскільки ці точки лежать на лінії, яка є графіком функції, то можна стверджувати, що графіком парної функції є лінія, симетрична відносно осі ординат (OY).



Якщо ж *f(x)* – непарна функція, то $(\forall x \in X)\ [f(-x)=-f(x)]$. Пояснюючи цю властивість, необхідно наголосити знову, що значення аргумента (-x) та x зображені точками осі OX, які симетричні відносно початку відліку. Разом з цим точки *(–x; f(–x))* і *(x; f(x))* симетричні відносно початку координат. А отже, лінія, що є графіком непарної функції, симетрична відносно початку координат.

Ця інформація лежить в основі побудови графіків функцій і прискорює цей процес, оскільки а) щоб побудувати графік парної функції, достатньо побудувати його в одній – лівій (правій) півплощині і симетрично відобразити відносно осі OY на другу праву (ліву) півплощину; б) щоб побудувати графік непарної функції, достатньо побудувати його в одній – першій (другій) чверті і симетрично відобразити відносно початку координат на третю (четверту) чверть.



Якщо функція не є ні парною, ні не парною, то, звичайно, процес побудови графіка не можна прискорити так, як для парної чи непарної функції, але, враховуючи інші властивості – монотонність, обмеженість, періодичність, можна виконати з достатньою точністю побудову графіка.

Побудова графіків функцій – це дуже важливий процес, який здійснюється за строгим алгоритмом на основі дослідження функцій методами диференціального числення. Але обмеженість обсягу цієї статті орієнтує на необхідність розкриття науково-методичних основ побудови графіків функцій у наступних статтях.

Сформульовані нами вище науково-методичні положення, які стосуються розкриття змісту поняття функції, способів задання та прийомів підготовчої роботи щодо формування вмінь будувати ескіз графіка, забезпечать свідоме і міцне засвоєння студентами знань із названого розділу математичного аналізу.

Література:

1. Пасічник Я. А. Математика для економістів: Підручник. – Острог: Видавництво національного університету “Острозька академія”, 2010. – 432 с.