

УДК 621.391:006

Бірюков Н. Л., к.т.н.; Триска Н. Р., к.т.н.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБМЕНА СООБЩЕНИЯМИ ТОЧНОГО ВРЕМЕНИ  
СЛУЧАЙНОЙ СУММОЙ СЛУЧАЙНЫХ СЛАГАЕМЫХ**

**Бірюков М. Л., Триска Н. Р. Моделирование обмена сообщениями точного времени случайными слагаемыми.** Аналізується задача прийняття найкращого рішення під час двохстороннього обміну повідомленнями точного часу (ПТЧ). Запропоновано алгоритм оцінювання статистики двохстороннього обміну ПТЧ з використанням кумулянтів (семиінваріантів) функції розподілу, які розраховуються з використанням імовірнісної моделі випадкових сум випадкових доданків.

**Ключові слова:** ПОВІДОМЛЕННЯ ТОЧНОГО ЧАСУ, ДВОХСТОРОННІЙ ПРОТОКОЛ, СТАТИСТИКА, КУМУЛЯНТ, РОЗПОДІЛ.

**Бирюков Н. Л., Триска Н. Р. Моделирование обмена сообщениями точного времени случайной суммой случайных слагаемых.** Анализируется задача принятия наилучшего решения при двухстороннем обмене сообщениями точного времени (СТВ). Предложен алгоритм оценки статистики двухстороннего обмена СТВ с использованием кумулянтов (семиинвариантов) функции распределения, которые вычисляются по вероятностной модели случайных сум случайных слагаемых.

**Ключевые слова:** СООБЩЕНИЯ ТОЧНОГО ВРЕМЕНИ, ДВОХСТОРОННИЙ ПРОТОКОЛ, СТАТИСТИКА, КУМУЛЯНТ, РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

**Biriukov M. L., Triska N. R. Modeling of precise time stamps exchange by the random sum of random components.** The problem of best decision making for two-way precise time stamps exchange is analyzed. The algorithm of statistics evaluation for two-way precise time stamps exchange using distribution function cumulants calculated by the probabilistic model of random sum of random components is proposed.

**Key words:** PRECISE TIME MESSAGES, TWO-WAY PROTOCOL, STATISTICS, CUMULANT, DISTRIBUTION.

**Введение.** Использование двухсторонних сетевых протоколов передачи времени (NTP, RTP IEEE1588™) на современном этапе движения к NGN для частотно-временного обеспечения телекоммуникационных сетей и приложений, ставит задачу переноса сообщений точного времени (СТВ) в условиях транспортных технологий с пакетным режимом передачи [1, 2]. Теоретический анализ и экспериментальные данные показывают, что в условиях пакетной передачи усовершенствование алгоритмов приема для повышения точности подстройки частоты или шкал времени следует проводить в направлении усовершенствования двухсторонних алгоритмов (таких как NTP и RTP), например, улучшая оценивание статистик обмена, используя более точные метрики оценивания или алгоритмы фильтрации [1...5].

Оценивание статистик задержки в прямом и обратном направлениях может быть улучшено в несколько раз при использовании информации о виде распределения задержки [1, 2]. В данной статье на основе анализа данных экспериментов предлагается оценка вида распределения статистик протоколов обмена СТВ с использованием кумулянтов статистических данных, в основу модели оценивания положен механизм случайных сум случайных слагаемых.

**Постановка задачи.** Оцениванию параметров в условиях неопределенностей посвящена обширная литература. В частности, в [6] используются методы максимального правдоподобия для оценки протоколов синхронизации в сенсорных сетях. Известно, что лучшее решение зависит от вида функции распределения (ФР), а из экспериментальных данных известно, что характер распределения может изменяться как в течение сеанса, так и между сеансами. Поэтому для эффективного оценивания статистики обмена СТВ требуется оценка вида ФР и ее устойчивости на заданном интервале времени.

**Анализ экспериментальных данных.** Зависимость характера распределения от нагрузки отмечается во многих работах. В [3...6] приведены данные экспериментов и статистики задержек в реальных каналах нагрузки. На рис. 1 в обобщенном виде приведены данные, полученные в эксперименте при последовательном включении 10 коммутаторов и нагрузке 20, 40, 60 и 80 % от пропускной способности каналов.

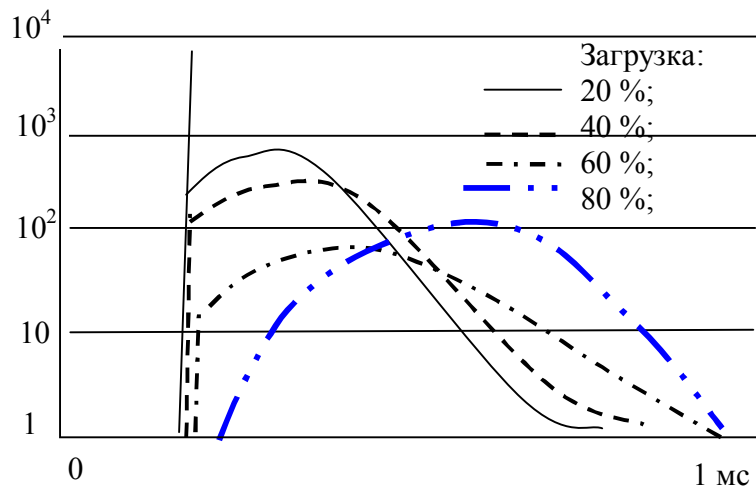


Рис. 1. Обобщенные графики распределения задержек

Можно видеть, что при малых нагрузках распределение вырождается в дельта-функцию с минимальной величиной задержки и последующим небольшим шлейфом, который имеет второй подъем и спад, пропорциональный примерно  $\exp(-x^3)$ . С ростом загрузки тракта начальная задержка возрастает пропорционально нагрузке в последовательности 180, 270, 410, 650 мкс при нагрузке 20, 40, 60 и 80 %, соответственно. Таким образом, средняя задержка на коммутатор изменяется от 18 до 65 мкс.

Можно также видеть, что при возрастании загрузки распределение “нормализуется”, то есть приближается к гауссовому распределению, что вполне логично согласуется с условиями центральной предельной теоремы.

На рис. 2 приведен график задержек в последовательности пакетов на произвольной сети Ethernet, охватывающей сотни километров, полученный в шестидневном сеансе измерения [5]. На рис. 2а шкала по оси ординат линейная, а на рис. 2б – логарифмическая. Среднее значение задержки равно 4,55 мс, среднее квадратичное отклонение составляет 13,26 мкс, а размах – 145 мкс.

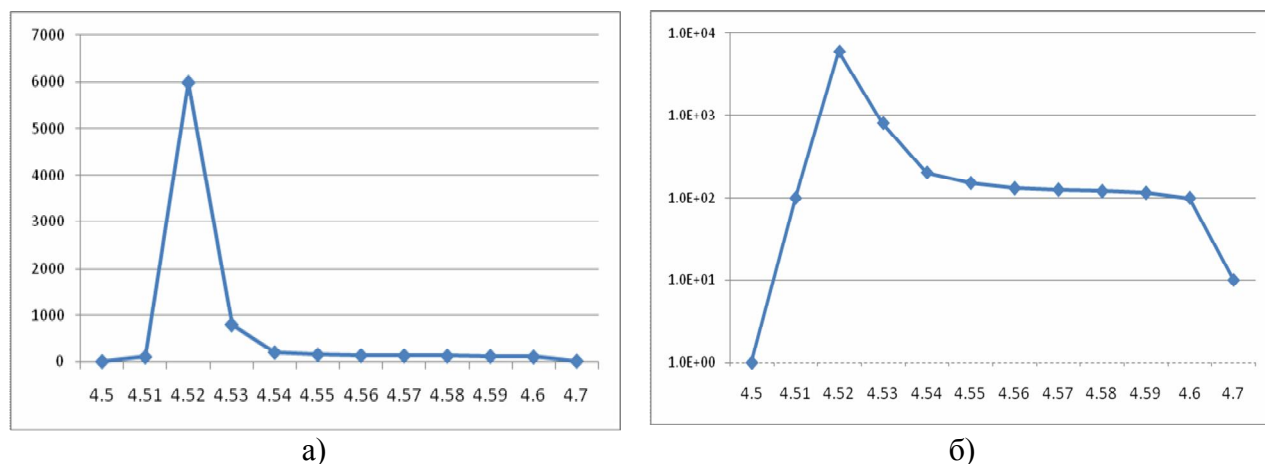


Рис. 2 Задержка в последовательности пакетов в произвольной сети Ethernet

Подобный результат получен в [6], где треугольное распределение Симпсона для задержки наблюдалось в локальной сети, а “нормализация” функции распределения наблюдалась при снижении скорости передачи, что, предположительно, происходило из-за увеличения загрузки используемых трактов Интернет.

Таким образом, статистики задержек изменяются во времени, и для повышения эффективности оценивания необходимо выдвигать гипотезу в отношении функции распределения статистики.

**Модель оценивания распределения статистик.** Как отмечалось в [1], если вклады каждого слагаемого задержки, которые суммируются в конце тракта, относительно малы, что верно при высокой загрузке тракта, то в силу центральной предельной теоремы можно предположить, что функция распределения вероятности времени прибытия СТВ близка к распределению Гаусса, а оценку данных наблюдений по критерию максимального правдоподобия можно представить в виде [1]:

$$\hat{\varphi}^{(BM)} = \frac{\bar{U} - \bar{D}}{2}, \quad (1)$$

где  $\bar{U}$  и  $\bar{D}$  – средние значения массива наблюдений при передаче СТВ от ведомого узла (В) к ведущему узлу (М)  $\{U_i\}_{i=1}^N$  и обратно  $\{D_i\}_{i=1}^N$ .

Если же поток СТВ на выходе канала после прохождения коммутаторов и маршрутизаторов имеет экспоненциальную функцию распределения, то оценка максимального правдоподобия разности времени по данным массивов наблюдений  $\{U_i\}_{i=1}^N$  и  $\{D_i\}_{i=1}^N$  использует минимальные значения, что, как показано выше, верно при низком уровне загрузки трактов:

$$\hat{\varphi}^{(BM)} = \frac{\min_{1 \leq i \leq N} U_i - \min_{1 \leq i \leq N} D_i}{2}. \quad (2)$$

Подобные рекомендации можно встретить и в других работах, как требующие дальнейшего изучения. Таким образом, алгоритмы принятия лучшего решения при обработке данных о времени прохождения СТВ в прямом и обратном направлениях могут существенно отличаться в зависимости от вида распределения. Для повышения точности оценивания разности задержек необходимо знание вида функции распределения ФР статистик обмена СТВ.

Оценка вида ФР может быть проведена по выборочным значениям моментов статистик для сравнения их с соответствующими теоретическими величинами, как правило, нормального (гауссова) распределения. Полученные таким методом моменты используются для оценки отклонения выборочного распределения от гауссовой ФР. Если выборочные моменты значительно отличаются от соответствующих моментов теоретической ФР Гаусса, то выборочное распределение отличается от нормального. С другой стороны, произвольную, негауссову плотность распределения приближенно можно представить асимптотическим разложением (ряд Эджворта) по производным гауссова распределения с использованием кумулянтов, в виде [7]:

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left[ 1 - \frac{\kappa_3}{3!} H_3(x) + \frac{\kappa_4}{4!} H_4(x) - \frac{\kappa_5}{5!} H_5(x) + \frac{\kappa_6}{6!} H_6(x) \right], \quad (3)$$

где  $\kappa_n$  – кумулянт (семиинвариант)  $n$ -го порядка произвольной ФР;

$H_n(x)$  – полином Эрмита  $n$ -го порядка.

Набор кумулянтов  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \dots, \kappa_n$ , как и моменты, может использоваться для представления выборочного распределения модельным распределением (3) и оценки его близости к гауссовому или какому-либо другому теоретическому распределению. При этом кумулянты располагают более удобными свойствами, чем моменты [7]. В отличие от моментов, во многих практически важных случаях кумулянтами высшего порядка можно пренебрегать. Кроме того, например, у распределения Гаусса, от нуля отличаются только два первых кумулянта, в то время как моменты высшего порядка не равны нулю. Отмеченные свойства делают привлекательным использование кумулянтов и кумулянтных

функцій для оцінювання статистик двохсторонніх протоколів обміна СТВ и вибору найбільш ймовірної ФР при використанні критерієв максимального правдоподібня.

Св'язь кумулянтів и моментів и їх інтерпретація достатньо хорошо вивчені. Визначення и зв'язи між моментами, кумулянтами и кумулянтними коефіцієнтами до четвертого порядку включительно представлені в табл. 1.

Табл. 1

Момент		Кумулянт	Кумулянтний коефіцієнт	Примечание
Начальний	Центральний			
$\alpha_1 = \bar{x}$	$\mu_1 = 0$	$\kappa_1 = \alpha_1 = \bar{x}$	$\gamma_1 = \bar{x} / \sigma$	Среднее значение
$\alpha_2$	$\mu_2 = D = \sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$	$\kappa_2 = \sigma^2$	$\gamma_2 = 1$	Дисперсия
$\alpha_3$	$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3$	$\kappa_3 = \mu_3$	$\gamma_3 = \kappa_3 / \sigma^3$	Асимметрия
$\alpha_4$	$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4$	$\kappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2$	$\gamma_4 = \mu_4 / \sigma^4 - 3$	Эксцесс

В табл. 2 приведені числові характеристики розподілів, які часто використовуються при аналізі затримок в трактах передачі и часто служать асимптотическими моделями реальних статистик при прийнятті рішень.

Табл. 2

Розподілення:	$\alpha_1$	$\gamma_1$	$\mu_2$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma_4$	Функція щільності
Гаусс	$\bar{x}$	$\bar{x} / \sigma$	$\sigma^2$	1	0	0	
Лаплас	$\bar{x}$	$\lambda$			0	3	$(\lambda/2)\exp(-\lambda x-\bar{x} )$
Рівномірне	$\Delta/2$	$\sqrt{3}$	$\Delta^2/12$	1	0	-1,2	$1/\Delta, x \in \Delta$
Симпсона	$\Delta/2$	$\sqrt{6}$	$\Delta^2/24$	1	0	-0,6	
Арксинуса	0	0	$\Delta^2/2$	1	0	-1,5	$1/\pi(\Delta - x)^{1/2}$
Показательне	$1/\lambda$	1	$1/\lambda^2$	1	2	6	$\lambda\exp(-\lambda x)$

$\Delta$  – размах розподілення.

В свою чергу, виборочні кумулянтні коефіцієнти  $\gamma_k = \frac{\hat{\mu}_k}{s^k}$  вивчені по виборочним моментам  $\hat{\mu}$  з використанням наступних виражень:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad \hat{\mu}_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3, \quad \hat{\mu}_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4,$$

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{\bar{x}}{s}, \quad \hat{\gamma}_2 = 1, \quad \hat{\gamma}_3 = \frac{\hat{\mu}_3}{s^3}, \quad \hat{\gamma}_4 = \frac{\hat{\mu}_4}{s^4} - 3, \quad (4)$$

де  $\bar{x}$  – виборочне середнє арифметическое,  $s$  – виборочне середнє квадратическое відхилення,  $\hat{\mu}_k$  – виборочний центральний момент  $k$ -го порядку, а  $\hat{\gamma}_k$  – виборочний кумулянтний коефіцієнт  $k$ -го порядку.

В табл. 3, 4 приведені вивчені по даним експериментів, описаних в [1], виборочні значення середнього часу помилки часового інтервалу (ОВИ) –  $x$  и стандартного відхилення  $s$ , а також виборочні кумулянтні коефіцієнти  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$ , отримані за час вимірювання  $T$  в виборках об'ємом  $N$ .

Статистические данные ОВИ при обмене СТВ  
(дополнительная нагрузка отсутствует – 0 %)

Табл. 3

Параметр	0 %, 1:1с	0 %, 32:1с	0 %, 64:1с	0 %, 128:1с
$N$	14225	13049	13119	6651
$\bar{x}$ , нс	5,6	208,536	162,43	41,216
$s$ , нс	91,38	107,94	90,192	100,36
$\hat{\gamma}_1$	0,061283	1,9319622	1,800936	0,410682
$\hat{\gamma}_3$	0,0488	-0,37219	-1,085	0,8
$\hat{\gamma}_4$	-0,755	-0,71051	1,55	1,2

Рассмотрение статистических данных рис. 1 и 2 и таблиц 3 и 4 показывает, что при возрастании загрузки распределение “нормализуется”, то есть приближается к гауссовому распределению, что вполне логично согласуется с условиями центральной предельной теоремы. При низкой загрузке, то есть менее примерно 80 %, распределения носят ярко выраженный асимметричный характер.

В “ближней зоне” малых задержек характер распределения близок к распределению Симпсона (сумма двух равномерно распределенных СВ), а правая часть распределения близка к экспоненциальному распределению или распределению Эрланга.

Статистические данные ОВИ при обмене СТВ  
(при различных уровнях дополнительной нагрузки)

Табл. 4

Параметр	0 %, 1:1с	50%, 1:1с	75%, 1:1с	80%, 1:1с	90%, 1:1с
$N$	9015	8976	8922	12334	4130
$\bar{x}$ , нс	9426,221	3931,98	-11990,6	-16958,4	4597,75
$s$ , нс	4905,293	3736,778	18519,99	19591,09	3292,124
$\hat{\gamma}_1$	1,9216428	1,052238	-0,64744	-0,86562	1,396591
$\hat{\gamma}_3$	-0,43626	0,827	-1,13041	-0,44165	0,0126
$\hat{\gamma}_4$	-1,0749	0,0077	-0,42912	-1,63809	-1,605

Выборочные значения кумулянтных распределений третьего и четвертого порядка (таблицы 3 и 4) указывают на асимметрию выборочных распределений, а их эксцесс близок к равномерному или сумме равномерных распределений, например, распределению Симпсона. Тем не менее, сравнение числовых показателей распределений (таблица 2) с выборочными значениями показывает, что модель сложения итоговой случайной величины нуждается в уточнении. В частности, если рассматривать поток на входе приемного устройства в виде случайной суммы  $v$  слагаемых случайных величин  $\xi$ :  $S(v, \xi) = \sum_{i=1}^v \xi_i$ , то

кумулянты такой модели вычисляются по определенным правилам:

$$K_{s1} = K_{v1}K_{\xi1}, \quad K_{s2} = K_{v2}K_{\xi1}^2 + K_{v1}K_{\xi2}, \quad K_{s3} = K_{v3}K_{\xi1}^3 + 3K_{v2}K_{\xi2}K_{\xi1} + K_{v1}K_{\xi3},$$

$$K_{s4} = K_{v4}K_{\xi1}^4 + 6K_{v3}K_{\xi1}^2K_{\xi2} + 4K_{v2}K_{\xi1}K_{\xi3} + 3K_{v2}K_{\xi2}^2 + K_{v1}K_{\xi4}$$

Проведенные вычисления показывают, что, например, если случайные задержки получены суммированием равномерно распределенных величин задержек, при числе коммутаторов в тракте, которое изменяется по биномиальному или экспоненциальному закону ( $np = \lambda$ ) можно получить величины, близкие к данным в таблицах 3 и 4. Варьируя виды распределений, можно получить достаточно точные данные о характере случайных величин в тракте передачи. Практическое применение кумулянтных коэффициентов

значительно проще. Например, положительная асимметрия и положительный эксцесс позволяют предположить близость статистики к экспоненциальному распределению и использовать для оценки выражение (2). Если  $\gamma_3 \approx 0$  и  $\gamma_4 \approx 0$ , то предпочтительно использовать выражение (1).

**Обсуждение и выводы.** Принятие наиболее правдоподобного решения при двухстороннем обмене сообщениями точного времени (СТВ) зависит от характера статистики, а стратегия принятия решения может изменяться в зависимости от поведения временных отклонений на интервалах наблюдения. Поэтому для эффективного оценивания статистики обмена СТВ требуется оценка вида ФР и ее устойчивости на заданном интервале времени. Полезным инструментом такой оценки может стать математический аппарат кумулянтного анализа (метода моментов).

Критерии метода моментов основаны на использовании функций от выборочных моментов, имеющих асимптотически нормальные распределения, параметры которых легко могут быть вычислены по известным методикам. Метод моментов по сравнению с другими методами проверки согласия требует существенно меньше вычислений (число операций пропорционально объему выборки). Поэтому он может быть рекомендован для использования при проверке согласия с семействами распределений, для которых не разработаны более совершенные методы, а также в качестве быстрого (экспрессного) метода. Анализ показывает, что использование кумулянтных коэффициентов может служить полезным инструментом при принятии наиболее правдоподобного решения; тем не менее, эффективность их применения требует дальнейшего изучения.

Стратегия принятия наилучшего решения при различных сочетаниях кумулянтных коэффициентов, в том числе при образовании статистик в результате сложения случайных чисел случайных слагаемых, требует дальнейшего изучения.

### Литература

1. Бирюков Н. Л. Анализ использования двухстороннего протокола для подстройки сигналов тактовой синхронизации по сигналам времени / Н. Л. Бирюков, Н. А. Макурин, Н. Р. Триска // Наукові записки Українського науково-дослідного інституту зв'язку. – 2010. – №4(16). – С. 5-11.
2. Бирюков Н. Л. Анализ точности передачи сигналов времени и частоты в телекоммуникационных сетях / Н. Л. Бирюков, Н. Р. Триска // Наукові записки Українського науково-дослідного інституту зв'язку. – 2010. – №2(14). – С. 39-45.
3. Timing and synchronization aspects in packet networks // ITU-T Recommendation G.8261/Y.1361(04/2008).
4. Sadot, Philippe. Synchronization Solutions for New Generation Networks / ZNIIS Moscow, March 25, 2009.
5. Lee Cosart. NGN Packet Network Synchronization Measurement and Analysis // IEEE Communications Magazine. February 2011. – PP. 148-154.
6. Жданов А. Г. и др. Передача речи по сетям с коммутацией пакетов (IP-телефония) ; под ред. В. Ю. Бабкова и М. А. Вознюка. – Спб.: СПбГУТ, 2001. – 148 с.
7. Малахов А. И. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований / А. И. Малахов. – М., "Сов. Радио", 1978. – 376 с.