УДК 004.7.052:004.414.2

Кудзиновская И. П. *аспирантка*

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ МЕТОДА МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ МАРШРУТИЗАЦИИ К БОЛЬШИМ ОТКЛОНЕНИЯМ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Кудзиновская І. П. Аналіз чутливості методу багатокритеріальної маршрутизації до великих відхилень початкових даних. Розглянуто задачу вибору оптимальних маршрутів доставки даних в корпоративній мережі. Дана задача є задачею багатокритеріальнної оптимізації з суперечними критеріями. Розроблений метод оцінки чутливості рішення задачі при великих відхиленнях початкових даних від точних значень. Як оцінка запропоновано використовувати спектральний радіус матриці пріоритетів, пов'язаний з нормою матриці простою залежністю.

Ключові слова: БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНА ОПТИМІЗАЦІЯ, МАРШРУТИЗАЦІЯ, ЕВКЛІДОВА НОРМА, КРУГИ ГЕРШГОРІНА, ЧУТЛИВІСТЬ РІШЕННЯ

Кудзиновская И. П. Анализ чувствительности метода многокритериальной маршрутизации к большим отклонениям исходных данных. Рассмотрена задача выбора оптимальных маршрутов доставки данных в корпоративной сети. Данная задача представляет собой задачу многокритериальной оптимизации с противоречивыми критериями. Разработан метод оценки чувствительности решения задачи при больших отклонениях исходных данных от точных значений. В качестве оценки предложено использовать спектральный радиус матрицы приоритетов, связанный с нормой матрицы простой зависимостью.

Ключевые слова: МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ, МАРШРУТИЗАЦИЯ, ЕВКЛИДОВА НОРМА, КРУГИ ГЕРШГОРИНА, ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЯ

Kudzinovska I. P. Analysis of sensitivity of a multi-criteria routing method to large deviations of initial data. The problem of optimal routes selection for data delivery in a corporate network is considered. This problem is the multi-critera optimization problem with contradictory criteria. The method of sensitivity estimation of problem decision under large deviations of initial data from the exact values is developed. As an estimation it is proposed to use the spectral radius of a priority matrix connected with the matrix norm by a simple dependence.

Key words: MULTI-CRITERA OPTIMIZATION, ROUTING, EUCLID`S NORM, GERSHGORIN CIRCLES, SENSITIVITY OF DECISION

В работе [1] рассматривалось применение метода многокритериальной оптимизации в задачи выбора оптимального маршрута передачи данных в сети с разнородными потоками трафика. Отношения предпочтений основаны на результатах точного измерения, вероятностных оценках и субъективных выводах. Разработан модифицированный метод анализа иерархий с точными вычислениями собственных значений матрицы приоритетов. Даны сравнительные асимптотические оценки точности, чувствительности и устойчивости алгоритмов поиска решения.

Матрица парных сравнений для критериев составляется на основании результатов анализа исходных данных. Парные сравнения применяются для того, чтобы абстрагироваться от конкретных значений характеристик маршрута, которые играют роль частных критериев, и от размерностей данных характеристик. Это позволяет тем или иным способом свести задачу многокритериальной (векторной) оптимизации к совокупности взаимосвязанных скалярных задач однокритериальной оптимизации. Значение имеет только важность одного критерия по сравнению с другим. Степень важности одного критерия по отношению к другому, в соответствии с теоретическим обоснованием метода анализа иерархий [2], определяется методом экспертных оценок. Экспертами в широком смысле в рассматриваемой задаче могут выступать:

– администратор сети;
– пользователи – заказчики услуг;
– экспертная система, в которой накапливается и обрабатывается информация о текущем состоянии сети и коммутационных узлов.

Происхождение записей в базах данных маршрутизации может быть различным:

– из программного обеспечения стека коммуникационных протоколов (создание минимальных таблиц маршрутизации, записей об адресах особого назначения типа адресов локального тестирования, групповых или широковещательных адресов);

– от администратора сети (статические записи без ограничения срока жизни, сохраняющиеся при перезагрузке, а иногда – после выключения и повторного включения устройства маршрутизации);

– от стандартных протоколов маршрутизации (динамические записи с ограниченным сроком жизни).

В настоящее время, в связи с ростом вычислительных ресурсов и внедрением вычислительных устройств в сетевое оборудование, даже такие задачи можно решить в процессе текущего управления вычислительной сетью [2]. В системе управления корпоративной сетью расчет оптимальных маршрутов для множества потоков трафика осуществляется в системе управления (см. рис.1).

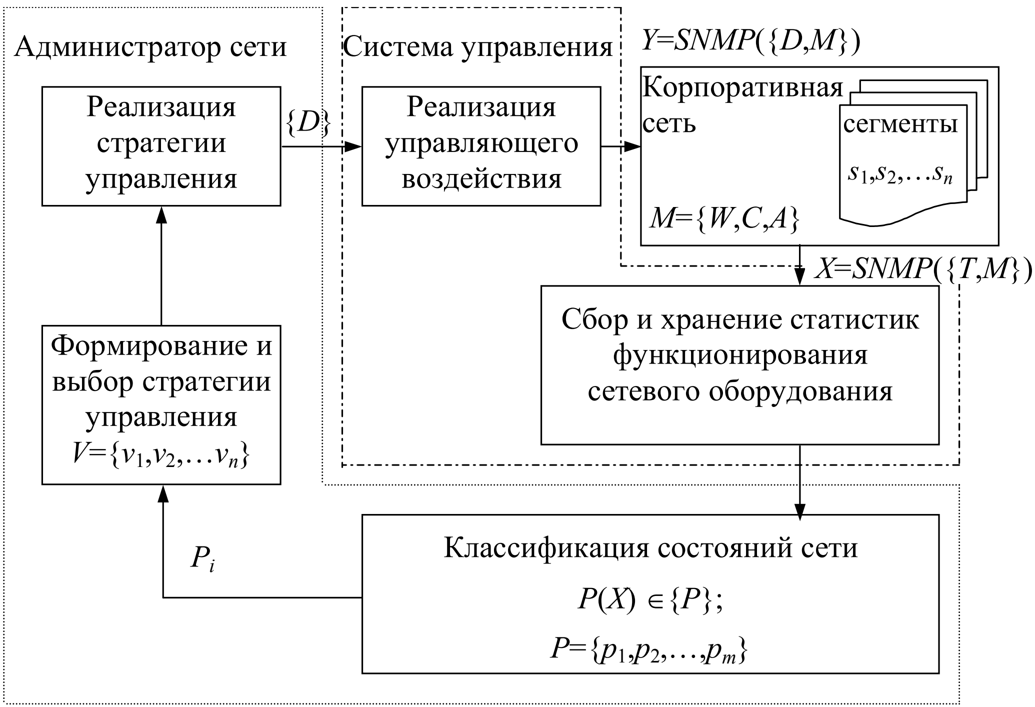

Рис. 1. Структурная схема системы управления корпоративной сетью

На рисунке приняты обозначения: *SNMP* – протокол управления сетью; $s_1, s_2,...,s_n$ – сегменты сети; M – множество объектов управления; W – множество рабочих станций; C – множество серверов; A – множество активных телекоммуникационных устройств; X – функционал текущего состояния сети; T – время; P – множество возможных состояний сети; V – множество стратегий управления сетью; D – множество параметров режима функционирования сети; Y – функционал управляющего воздействия.

Исходя из представленной схемы, перечислим основные задачи системы управления:

– идентификация состояний сетевого оборудования;

– выработка управляющих воздействий;

– реализация управляющих воздействий на объект управления.

Сложность решения поставленных задач заключается в наличии случайных задержек управляющей и сигнальной информации, неполноте априорной информации о параметрах и состоянии сетевого оборудования. В [2] разработана структура системы управления с прогнозом состояния сети на основе эталонной модели каждого сегмента (рис. 2).

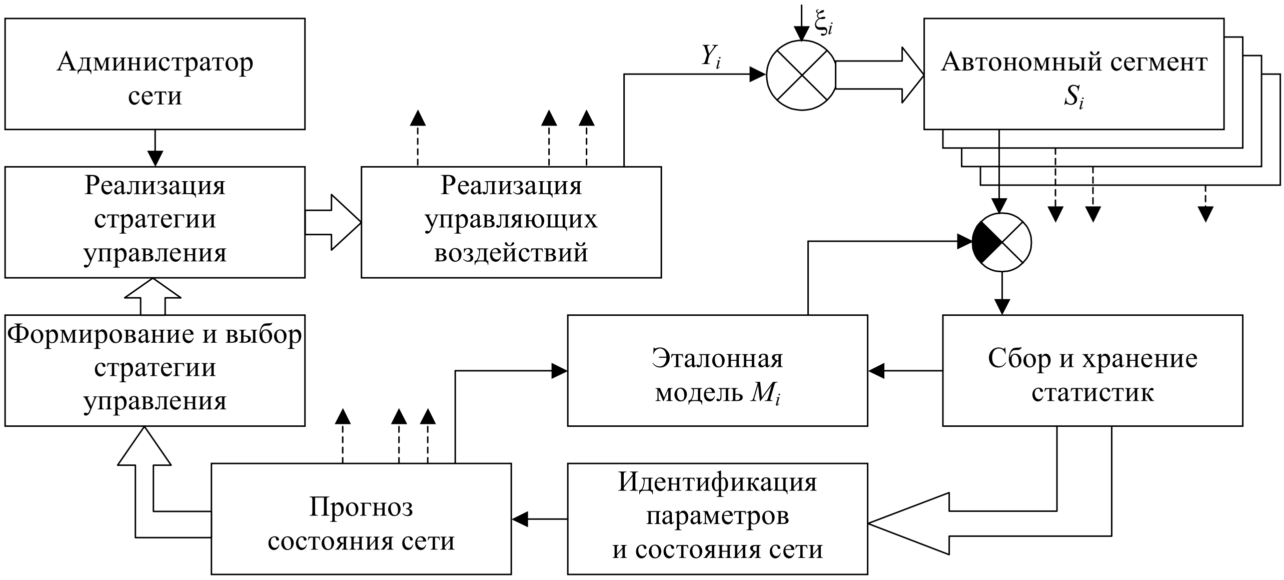

Рис. 2. Абстрактная структура системы управления вычислительной сетью с эталонной моделью. $S_1, S_2, \ldots, S_i, \ldots, S_n$ – сегменты сети; Y_i – вектор состояния; ξ_i – вектор возмущений.

Ядром парциальной системы управления i-м автономным сегментом (АС) является *i*-я эталонная модель M_i, разделенная на два подуровня. Первый уровень отвечает за состояние каждого элемента АС в отдельности и привязан к конкретному оборудованию (маршрутизаторам, мостам, коммутаторам и пр.). Второй (сетенезависимый) уровень отвечает за общее состояние АС. Такой подход позволяет отделить задачу управления надежностью оборудования от задачи анализа и управления топологией компьютерной сети.

В системе управления осуществляется поиск объектов в сети и сбор статистик для обучения эталонной модели. Далее выполняется мониторинг всех объектов и формируется прогноз работоспособности сети. Прогноз формируется на основе вектора выходных сигналов второго уровня эталонной модели. По выработанным решениям определяется, в том числе, и оптимальный маршрут доставки данных (или пучок наиболее приемлемых маршрутов).

Можно решать задачу выбора оптимального маршрута в реальном времени, основываясь на более точном методе вычисления собственных значений и собственных векторов матрицы приоритетов, чем приблизительные методы, предложенные в [3].

В качестве параметра точности решения выбран спектральный радиус матрицы, который тесно связан с нормой матрицы как верхней границей спектрального радиуса. Таким образом, и норма матрицы, и спектральный радиус могут использоваться для анализа устойчивости проблемы собственных значений для конкретной рассматриваемой задачи.

Как известно, матрица приоритетов метода анализа иерархий теоретически обратно-симметрична. Для положительных строго обратно-симметричных матриц спектральным радиусом, в соответствии с теоремой Перрона-Фробениуса, является первое собственное значение, которое всегда вещественно [4]. Другие собственные значения могут быть как вещественными, так и комлексно-сопряженными, но и те, и другие, как правило, по модулю значительно меньше спектрального радиуса.

Остается открытым вопрос об устойчивости выбранного численного метода решения и его чувствительности к отклонениям исходных данных. Этот вопрос актуален, так как в условиях гетерогенности сети матрица приоритетов может быть плохо обусловленной. Плохая обусловленность объясняется низкой точностью измерения или оценками текущих параметров сети, таких, например, как надежность или мгновенная пропускная способность. Кроме того, всегда имеет место известный произвол в определении экспертами относительной важности тех или иных описаний.

Количественные оценки устойчивости решения предоставляют числа обусловленности. Для анализа проблемы собственных значений берут спектральное число обусловленности вида

$$k(\mathbf{H}) = \|\mathbf{H}^{-1}\| \|\mathbf{H}\|, \tag{1}$$

где $\|\mathbf{H}\|$ – матрица правых собственных векторов $\vec{\mathbf{X}}_i$, $i=\overline{1,n}$ уравнения $\mathbf{A}\vec{\mathbf{X}} = \lambda\vec{\mathbf{X}}$, или $k(\mathbf{H}) = \sqrt{\mu_{\max}/\mu_{\min}}$, где $\mu_{\max}, \mu_{\min}$ – соответственно наибольшее и наименьшее собственное значение матрицы $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$, Т – символ транспонирования.

Числа обусловленности не всегда дают исчерпывающее описание обусловленности матрицы. Поэтому в качестве дополнительной характеристики устойчивости рассматриваемой задачи введем некий составной критерий оценивания чисел обусловленности и величины определителя.

Обратная матрица устойчива, если малым изменениям элементов исходной матрицы соответствуют малые изменения элементов обратной матрицы. Для обеспечения устойчивости обратной матрицы, определитель матрицы должен быть не слишком малым. В любом случае, его величина не должен быть величиной второго порядка малости по сравнению с известной оценкой Адамара для значения определителя:

$$\Delta \le \sqrt{\prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}\,.$$

В вероятностном смысле число обусловленности предоставляет отношение наибольшей полуоси к наименьшей полуоси эллипсоида дисперсии вектора, компонентами которого являются ошибки представления элементов. Поэтому общая чувствительность собственных значений матрицы $\mathbf{A}$ непосредственно зависит от величины определителя, так что $k(\mathbf{H})$ можно интерпретировать как число обусловленности для проблемы собственных значений.

В [3] показано, что изменение da_{kl} каждого элемента a_{kl} обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1} = \|a_{ij}\|$, $i, j = \overline{1,n}$, вызванное изменением da_{ij} другого элемента a_{ij} этой матрицы, равно этому изменению, умноженному на произведение некоторых двух элементов матрицы: $da_{kl} = -\sum_{i,j} a_{ki} a_{lj} da_{ij}$. Если элементы обратной матрицы достаточно велики (что при малом определителе всегда имеет место), то незначительная ошибка в элементах исходной матрицы влечет за собой значительные изменения в элементах обратной матрицы.

Далее возникает вопрос: при заданном собственном векторе и всех матрицах, из которых он получен, велик ли риск перехода от одной из них на любую другую при наличии малых возмущений в элементах? В частности, возможен ли переход из матрицы отношений приоритетов к любой другой матрице?

Другим вопросом – при рассмотрении двух собственных векторов, являющихся малыми возмущениями каждого, существуют ли малые возмущения, которые переводят один класс соответствующих матриц в другой?

В [3] ответ на эти вопросы не приводится. Здесь сделана попытка восполнить данный пробел. При этом не будем накладывать ограничений (конечно, в разумных пределах) на абсолютные величины возмущений.

Часто также возникает вопрос, насколько чувствительны приоритеты, задаваемые компонентами собственного вектора, к небольшим изменениям в величинах суждений [3]. Желательно, чтобы приоритеты не колебались в широких пределах при малых изменениях в суждении. Существуют три способа проверки этой чувствительности: 1) нахождение математической оценки колебания; 2) получение ответов, основанных на большом числе компьютерных вычислений, построенных соответствующим образом для проверки чувствительности; 3) комбинация предыдущих двух способов, особенно при невозможности проведения полной аргументации аналитически.

Рассмотрим зависимость спектрального числа обусловленности матрицы $\|\mathbf{H}\|$, полученной в результате решения задачи на собственные значения исходной матрицы $\mathbf{A}$. В результате преобразования подобия матрицы $\mathbf{A}$ с использованием матриц правых собственных векторов получаем диагональную матрицу вида

$$\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{H} = \mathbf{diag}(\lambda_i),\ i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Пусть из-за случайных возмущений элементов a_{ij} в пределах некоторой ε-окрестности матрица $\mathbf{A}$ приводится к виду $\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{A} = \mathbf{AI}(1+\varepsilon)$, собственные значения которой есть $\mu_i,\ i = \overline{1,n}$. Тогда $\mathbf{AI}(1+\varepsilon) = \mu_i\mathbf{I}$, следовательно,

$$\mathbf{AI}(1+\varepsilon-\mu_i) \tag{3}$$

– особенная матрица. Здесь ε – окрестность точки, в пределах которой могут иметь место возмущения элементов a_{ij} начальной (точной) матрицы.

Выполним преобразование подобия матрицы (3):

$$\mathbf{H}^{-1}\left[\mathbf{AI}(1+\varepsilon-\mu_i)\right]\mathbf{H} = \mathbf{diag}(\lambda_i-\mu_i) + \varepsilon\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{H}. \tag{4}$$

Правая часть матричного уравнения (4) также представляет собой особенную матрицу.

Предположим, что $\mu_i \neq \lambda_i$ для всех i. Такое предположение, как и предположение о том, что матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}+\varepsilon\mathbf{A}$ не имеют кратных собственных значений, основывается на том, что из-за случайных ошибок задания элементов матрицы, методических ошибок и ошибок вычислений всегда имеют место случайные отклонения результатов от истинных значений. Допустим, элементы матрицы $\mathbf{A}$ являются независимыми нормально распределенными величинами со средними значениями a_{ij} и одинаковой дисперсией ошибок представления. В вероятностном смысле число обусловленности дает отношение наибольшей полуоси к наименьшей полуоси для эллипсоида рассеяния вектора, компонентами которого являются ошибки представления элементов [4]. Поэтому вероятности появления кратных собственных значений μ_i, λ_i или совпадения μ_i и λ_i практически равны нулю.

Тогда

$$\mathbf{diag}(\lambda_i-\mu_i) + \varepsilon\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{H} = \mathbf{diag}(\lambda_i-\mu_i)\left[\mathbf{I} + \varepsilon\mathbf{diag}(\lambda_i-\mu_i)^{-1}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{H}\right], \tag{5}$$

где матрица в квадратных скобках в правой части выражения (5) также особенная. В этом случае, если матрица $(\mathbf{I}+\mathbf{M})$ особенная, то $\|\mathbf{M}\| \geq 1$ для нормы любого вида. Иначе при

$\|\mathbf{M}\| \le 1$ ни одно из собственных значений $(\mathbf{I}+\mathbf{M})$ не может быть нулевым. Следовательно, $\left\|\varepsilon \mathbf{diag}(\lambda_i-\mu_i)^{-1}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{H}\right\| \ge 1$ и, соответственно,

$$\varepsilon \max\left|(\lambda_i-\mu_i)^{-1}\right|\left\|\mathbf{H}^{-1}\right\|\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{H}\| \ge 1 \tag{6a}$$

или

$$\varepsilon\left\|\mathbf{H}^{-1}\right\|\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{H}\| \ge \min\left|(\lambda_i-\mu_i)\right|. \tag{6b}$$

Из выражений (6a) и (6b) вытекает, что в любом случае

$$|\lambda_i-\mu_i| \le \varepsilon k(\mathbf{H})\|\mathbf{A}\|, \tag{7}$$

по крайней мере, при одном значении i. Здесь $k(\mathbf{H})$ – спектральное число обусловленности.

Таким образом, общая чувствительность собственных значений матрицы $\mathbf{A}$ непосредственно зависит от $k(\mathbf{H})$, так что $k(\mathbf{H})$ можно трактовать как число обусловленности для проблемы собственных значений.

Принимая во внимание ослабленные условия регулярности Адамара

$$|a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} |a_{ij}| \ge 0$$

и в соответствии с теоремой о кругах Гершгорина [4] можно применить выражение (7) для локализации корней матрицы (3).

Отметим два важных следствия проведенного анализа.

1. Полученные результаты справедливы для любой нормы, для которой выполняется условие

$$\left\|\mathbf{diag}(\lambda_i-\mu_i)^{-1}\right\| = \max|\lambda_i-\mu_i|^{-1}.$$

Таким образом, можно использовать любую норму матрицы, с учетом простоты вычисления и конкретного содержания рассматриваемой задачи. Например, для практических целей часто используется Евклидова норма, потому что ее легко рассчитывать.

2. При выводе выражений для локализации корней не требовалось, чтобы ε-окрестность точек a_{ij} была малой.

Поэтому, используя полученные результаты, можно оценить текущую чувствительность решений о выборе оптимальных маршрутов к большим отклонениям начальных данных (так называемая чувствительность “в большом”). Это особенно важно для вычислительных сетей, которые, по существу, являются большими системами со случайными параметрами и структурой.

Литература

1. Лисовая И. В. Системный анализ прикладных задач многокритериальной оптимизации методом анализа иерархий / И. В. Лисовая, И. В. Мишарин, О. А. Черныш // Проблеми інформатизації та управління. – К.: НАУ, 2007. – № 3(21). – С. 99-103.

2. Жуков И. А. Методы и технологии управления корпоративными компьютерными сетями / И. А. Жуков, А. С. Савченко, И. П. Кудзиновская // Проблеми інформатизації та управління: Збірник наукових праць: Випуск 3(31). – К.: НАУ, 2010. – С. 48-52.

3. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Саати Т. – М.: Радио и связь, 1989. – 278 с.

4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. – 576 с.