

УДК 621.372.54.037.372

Рыбка С. В.; Дробик А. В., к.т.н.

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВЫХ СИСТЕМ ОБРАБОТКИ МНОГОЧАСТОТНЫХ СИГНАЛОВ

**Рыбка С. В., Дробик О. В. Порівняльний аналіз ефективності цифрових фільтрових систем обробки багаточастотних сигналів.** Розглянуті характеристики інтегральної ефективності процесорів швидкого перетворення Фур'є та гребінок цифрових фільтрів з частотною вибіркою стосовно цифрових систем зв'язку і передачі різнорідних даних. З урахуванням специфіки систем зв'язку виконаний порівняльний аналіз ефективності. Зроблений висновок про переваги застосування цифрових фільтрів з частотною вибіркою в багатоканальних системах з характеристиками, що перестроюються.

**Ключові слова:** ЦИФРОВИЙ ФІЛЬТР, БАГАТОЧАСТОТНИЙ СИГНАЛ, ШВИДКЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУРЬЕ, ШПФ, ПРОЦЕСОР ШПФ

**Рыбка С. В., Дробик А. В. Сравнительный анализ эффективности цифровых фильтровых систем обработки многочастотных сигналов.** Рассмотрены характеристики интегральной эффективности процессоров быстрого преобразования Фурье и гребенок цифровых фильтров с частотной выборкой применительно к цифровым системам связи и передачи разнородных данных. С учетом специфики систем связи выполнен сравнительный анализ эффективности. Сделан вывод о преимуществах применения цифровых фильтров с частотной выборкой в многоканальных системах с перестраиваемыми характеристиками.

**Ключевые слова:** ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТР, МНОГОЧАСТОТНЫЙ СИГНАЛ, БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ, БПФ, ПРОЦЕССОР БПФ

**Rybka S. V., Drobyk O. V. Comparative analysis of efficiency of digital filter systems for multifrequency signals processing.** Descriptions of integral efficiency of processors of the fast Fourier transform and combs of digital filters with a frequency sample as it applies to digital communication and heterogeneous data communication networks are considered. Taking into account the specific character of communication networks the comparative analysis of efficiency is made. A conclusion about advantages of application of digital filters with a frequency selection in the multi channel systems with the variation of parameters is done.

**Key words:** DIGITAL FILTER, MULTIFREQUENCY SIGNAL, FOURIER TRANSFORM, FFT, FFT PROCESSOR

**Введение.** В оборудовании цифровой связи и передачи данных – системах частотного мультиплексирования и разделения каналов, одно- и многоканальных модемах и др. – широко используются цифровые устройства, в частности, многополосные цифровые фильтры [1...5]. Наиболее широкое применение вследствие простоты реализации находят цифровые процессоры быстрого преобразования Фурье (БПФ) [6, 7]. Недостатком процессоров БПФ (ПБПФ) является сложность масштабирования алгоритма, т.е. аппаратного изменения числа точек при необходимости. В этом смысле гребенки цифровых полосовых фильтров, в частности, цифровых фильтров с частотной выборкой (ЦФ ЧВ) обладают значительно большей гибкостью. При необходимости они могут легко перестраиваться как при программной, так и при аппаратной реализации [1].

В данной работе приведены результаты сравнительного анализа эффективности ПБПФ и ЦФ ЧВ. Кроме того, исследованы характеристики умов квантования для различных спектральных плотностей помех и числа разрядов цифровой системы.

**Сравнительный анализ возможностей применения цифровых фильтровых систем.** Проанализируем сравнительные характеристики и возможности использования цифровых фильтровых систем с различными принципами построения.

Предположим, что спектр сигнала  $g(f)$  описывается гауссовской кривой:

$$g(f) = \sigma_f \exp(-\sigma_f^2 f^2) \quad (1)$$

Как известно, АЧХ каждого элементарного фильтра – “точки” процессора БПФ описывается функцией вида  $\sin(x)/x$ . Для аппроксимации гауссовской кривой (1) используем взвешенную сумму функций вида

$$h(f) = \sum_{i=-m}^m k_i \sin(f - f_i)/(f - f_i) \quad (2)$$

где  $k_i$  – весовые коэффициенты;  $M = 2m + 1$  или  $M = 2m$  – число точек аппроксимации;  $f_i$  – сдвиг максимумов аппроксимирующих функций  $\sin(f - f_i)/(f - f_i)$ .

По существу, аппроксимация вида (2) – это разложение функции (1) в усеченный ряд Котельникова. В соответствии с этим весовые коэффициенты  $k_i$  выбираются равными значениям функции  $g(f)$  в точках  $f_i$ . Ошибку аппроксимации определим в виде:

$$\varepsilon_{appr} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (g(f) - h(f))^2 df / \int_{-\infty}^{\infty} (g(f))^2 df \right\}^{1/2}$$

В табл. 1 представлены результаты расчета зависимости ошибки  $\varepsilon_{appr}$  от числа членов ряда

Табл. 1

M	1	2	3	4	5
$\varepsilon_{appr}$	0.5	0.31	0.16	0.07	0.023

$M$ . Судя по этим результатам, для уменьшения ошибки аппроксимации до 10% необходимо использовать не менее четырех членов ряда. Другими словами, процессор БПФ должен иметь учетверенное число точек по сравнению с исходным.

Для получения количественных сравнительных оценок эффективности применения ПБПФ и гребенки цифровых полосовых фильтров (ЦФ ЧВ) необходимо ввести некоторый показатель эффективности. Для оценки качества обнаружения сигналов движущихся целей обычно используют так называемый коэффициент улучшения  $k_y$ :

$$k_y = \frac{P_{свых} / P_{пвых}}{P_{свх} / P_{пвх}}, \tag{3}$$

где  $P_{свх}$ ,  $P_{пвх}$  – входные мощности сигнала и помехи, соответственно;

$P_{свых}$ ,  $P_{пвых}$  – выходные мощности сигнала и помехи, соответственно.

Чтобы проанализировать качество работы реального фильтра, необходимо учесть влияние шумов различной природы. В частности, на вход аналогового или цифрового фильтра всегда будут поступать шумы приемного устройства и внешние шумы различной природы. В цифровых устройствах, кроме того, будут иметь место шумы аналого-цифрового преобразования, шумы квантования коэффициентов фильтра и квантования арифметических операций. Поэтому обобщенный коэффициент эффективности цифрового фильтра селекции движущихся целей будет определяться следующим образом:

$$k_{уобщ} = \frac{P_{свых} / (P_{пвых} + P_{швых})}{P_{свх} / (P_{пвх} + P_{швх})}, \text{ где } P_{швых} = P_{шац} + P_{квкф} + P_{квар}, \text{ т. е.}$$

$$k_{уобщ} = \frac{P_{свых} / (P_{пвых} + P_{шац} + P_{квкф} + P_{квар})}{P_{свх} / (P_{пвх} + P_{швх})}. \tag{4}$$

Все мощности помех и шумов, входящие в выражения (3) и (4), являются статистически взаимно независимыми [8]. Поэтому они просто складываются. Кроме того, предполагаем, что пиковые значения сигналов и помех никогда не превышают динамического диапазона аналого-цифрового преобразователя (АЦП) и устройства цифровой обработки сигналов (ЦОС), поэтому нелинейные эффекты можно не учитывать. В общем случае их влияние можно оценить методами теории выбросов случайных процессов [9], но для сравнительного анализа доплеровских цифровых селекторов с различными принципами построения в этом нет необходимости.

Более важными сравнительными характеристиками являются аппаратные затраты и потребляемая мощность. Как известно, недостатком устройств ЦОС является сравнительно большое энергопотребление. Потребляемая мощность и аппаратные затраты напрямую зависят от разрядности регистров и числа арифметических операций, требуемых для

обработки одного отсчета цифрового сигнала. Типовой арифметической операцией для любого устройства ЦОС является операция вида

$$y(n) = \sum_{i=1}^n a_i x(n-i), \quad (5)$$

т.е. сложение, умножение на постоянный коэффициент и пересылка “регистр-регистр”.

Для алгоритмов обработки сигналов в сетях характерно, что число операций ввода-вывода мало по сравнению с числом арифметических операций (поскольку, как правило,  $N \gg 1$ ). Поэтому при сравнении устройств ЦОС с различными принципами построения достаточно дать оценку затрат только на операции, необходимые для реализации уравнения типа (5). Пусть разрядность устройства ЦОС равна  $b$ . Тогда интегральный коэффициент эффективности цифрового ПБПФ можно выразить как отношение  $k_{\text{общ}}$  к общим затратам  $k_3$ :

$$k_{\text{инт}} = k_{\text{общ}} / k_3, \quad (6)$$

где  $k_3 = k_{\text{сл}} N_{\text{сл}} + k_{\text{умн}} N_{\text{умн}} + k_{\text{рег}} N_{\text{рег}}$ ;  $k_{\text{сл}}$  – весовой коэффициент потерь на сложение;  $N_{\text{сл}}$  – общее количество операций сложения при обработке одного отсчета сигнала;  $k_{\text{умн}}$  – весовой коэффициент потерь на умножение;  $N_{\text{умн}}$  – общее количество операций умножения при обработке одного отсчета сигнала;  $k_{\text{рег}}$  – весовой коэффициент потерь на пересылку данных;  $N_{\text{рег}}$  – общее количество операций пересылки при обработке одного отсчета сигнала.

В коэффициентах  $k_{\text{сл}}$ ,  $k_{\text{умн}}$ ,  $k_{\text{рег}}$  должны учитываться аппаратурные затраты и энергопотребление. В [1, 3] показано, что  $k_{\text{сл}} = P_{\text{дис}} b$ , где  $P_{\text{дис}}$  – мощность рассеяния на один разряд;  $b$  – число разрядов;  $k_{\text{умн}} = k_{\text{сл}} b$ ;  $k_{\text{рег}} = k_{\text{сл}} / 2$ .

**Шумовые характеристики многополосных цифровых устройств.** Для сравнительного анализа характеристик систем фильтрации сигналов необходимо выбрать модели сигналов и помех. Чаще всего при расчетах и моделировании используют наиболее распространенные гауссовскую или резонансную модели спектров мощности помех [2, 8]:

$$S_g = S_0 \exp\left[-(f - f_0)^2 / 2\sigma_f^2\right]; \quad (7)$$

$$S_r = \frac{S_0 \sigma_f^2}{\sigma_f^2 + (f - f_0)^2}. \quad (8)$$

Здесь  $S_0$  – спектральная плотность мощности помехи на частоте  $f_0$ ;  $2\sigma_f$  – среднеквадратическая ширина спектра помехи на уровне половинной мощности.

Для типовых помех в проводных каналах связи величина  $\sigma_f$  обычно лежит в пределах от 200 до 400 Гц, для помех в радиоканалах – от 100 до 250 Гц [4, 8]. Соотношения мощностей помех, сигналов и внутренних шумов приемника следующие [2, 4, 5]:

- для проводных каналов  $P_c/P_{\text{ш}}$  – от  $10^2$  до  $10^3$ ;  $P_c/P_{\text{ш}}$  – от  $10^3$  до  $10^5$ ;
- для радиоканалов  $P_c/P_{\text{ш}}$  – от 5 до  $10^2$ ;  $P_c/P_{\text{ш}}$  – от 10 до 50.

Мощность шума квантования, как известно, не зависит от способа квантования (округление или усечение) в аналого-цифровом преобразователе (АЦП), а также от способа квантования коэффициентов и результатов арифметических операций собственно в цифровом фильтре [1, 3]. Она определяется только разрядностью системы. Логично выбирать разрядности АЦП и ЦФ одинаковыми, иначе будут иметь место просто бессмысленные аппаратурные затраты, а качество работы цифровой системы все равно будет определяться минимальной разрядностью любого из элементов. Учтем также, что входной сигнал при достаточно большой ( $b > 4 \dots 6$ ) разрядности цифровой системы отсчеты дискретно-квантованного сигнала и шума квантования можно считать взаимно

статистически независимыми [8]. При этом предположении мощность шумов квантования АЦП определяется как  $P_{\text{ш.кв}} = \Delta^2/12 = 2^{-2b}/3$ , где  $\Delta = 2^{-b+1}$ .

При выводе выражения для мощности шумов квантования цифрового фильтра с частотной выборкой используем типовые линейные шумовые модели цифровых фильтров [1, 10]. В соответствии с линейной шумовой моделью ошибка квантования, порождаемая в каждом сумматоре ЦФ и умножителе на постоянный коэффициент, трактуется как парциальный аддитивный шум с равномерным распределением вероятностей. Результирующий шум квантования как аддитивная смесь парциальных шумов считается гауссовским в соответствии с центральной предельной теоремой, если фильтровая система имеет достаточно высокий порядок. Как отмечается в [10], уже при порядке ЦФ больше 2-х, статистику шумов квантования с высокой степенью точности можно считать гауссовской.

Вследствие генерации парциальных шумов квантования в каждом узле ЦФ амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) последнего для шумов квантования существенно отличается от АЧХ для сигнала. Они практически не зависят друг от друга. Реальный ЦФ является распределенной системой для шумов квантования. Поэтому, как правило, вывести выражение в замкнутой форме для мощности шума квантования на выходе ЦФ не удается [1, 3, 10]. Однако для некоторых частных форм реализации ЦФ (например, каскадной или параллельной) можно получить искомые выражения. Рассмотрим ЦФ с частотной выборкой (ЦФ ЧВ). Он состоит из нерекурсивной части с системной функцией

$$H_{\text{нрф}}(z) = 1 - kz^{-N}, \tag{9}$$

где  $N$  – порядок ЦФ;  $k$  – коэффициент прямой связи, по модулю меньший 1, и параллельного набора  $N$  рекурсивных ЦФ первого порядка с системными функциями вида

$$H_{\text{рф}}(z) = h_m / (1 - l_m z^{-1}),$$

где  $l_m$  – весовой коэффициент в  $m$ -й точке частотной выборки;  $l_m = |k|^{1/N} \exp(j2\pi m/N)$ .

Выражение для шумовой модели нерекурсивной части ЦФ ЧВ имеет следующий вид:

$$H_{\text{шнрф}}(z) = 1 - kz^{-N} + e(z), \text{ где } e(z) \text{ – системная функция для шумов квантования.}$$

Влияние этой составляющей численно выражается в добавке к входному отсчету ошибки округления  $\delta k$  результата перемножения, т.е.

$$H_{\text{шнрф}}(z) = 1 - kz^{-N} - \delta kz^{-N}. \tag{10}$$

Соответственно выражение для шумовой модели рекурсивной части ЦФ ЧВ запишется:

$$H_{\text{шрф}}(z) = \sum_{m=1}^N 1 / (1 - l_m z^{-1} - \delta kz^{-1}). \tag{11}$$

Выражение для шумовой модели ЦФ ЧВ в целом с учетом выражений (10) и (11) примет следующий вид:

$$H_{\text{шцфчв}}(z) = (1 - kz^{-N} - \delta kz^{-N}) \sum_{m=1}^N 1 / (1 - l_m z^{-1} - \delta kz^{-1}). \tag{12}$$

Наконец, для вычисления дисперсии шумов квантования ЦФ ЧВ используем известную формулу [1, 10]:  $\sigma_{\text{вых}}^2 = \sigma_{\text{вх}}^2 H_{\text{цф}}(z) H_{\text{цф}}^*(z)$ , где \* – символ комплексного сопряжения.

Приняв  $\sigma_{\text{вх}}^2 = 1$ , получим окончательное выражение для дисперсии шумов квантования на выходе ЦФ ЧВ:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{шкв}}^2 &= H_{\text{шцфчв}}(z) H_{\text{шцфчв}}^*(z) = \\ &= (1 - kz^{-N} - \delta kz^{-N}) \left[ \sum_{m=1}^N 1 / (1 - l_m z^{-1} - \delta kz^{-1}) \right] \left[ (1 - k^* z^N - \delta k^* z^N) \sum_{m=1}^N 1 / (1 - l_m^* z - \delta k^* z) \right] \end{aligned}$$



Как показано в [1, 10], дисперсия шума квантования на каждом выходе типового  $N$ -точечного процессора БПФ (на основе направленных графов “бабочка”) определяется по формуле  $\sigma_{\text{шкв бпф}}^2 = (2^{-2b}/3)(16N)$ .

Приведем также формулы для требуемого числа  $\eta$  арифметических операций, выполняемых при обработке одного отсчета входного сигнала [1, 10].

$$1. \text{ ЦФ ЧВ: } \eta_{\text{цфчв}} = 8N; \quad (13)$$

$$2. \text{ БПФ: } \eta_{\text{бпф}} = 4N(\log_2 N + 1), \quad (14)$$

где  $N$  – порядок соответствующего цифрового устройства.

**Результаты численного анализа.** Были выполнены расчеты на ЭВМ с использованием полученных выражений, приведенных формул и принятых выше численных значений параметров сигналов, шумов и помех. На рис.1 и 2 изображены графики зависимости нормированного интегрального коэффициента эффективности  $k_{\text{eff}}$  от ширины нормированного энергетического спектра помехи (на уровне 0,5 от максимального значения).

Разрядность цифровой системы  $b$  выбрана равной 32, чтобы пренебречь влиянием шумов квантования. Как известно [4, 5], динамический диапазон сетей радиосвязи должен быть не менее 30...60 дБ по мощности. Учитывая, что в цифровых устройствах для перекрытия динамического диапазона в  $N$  дБ требуется  $N/6$  разрядов, 32-разрядный процессор перекрывает требуемый динамический диапазон с большим запасом.

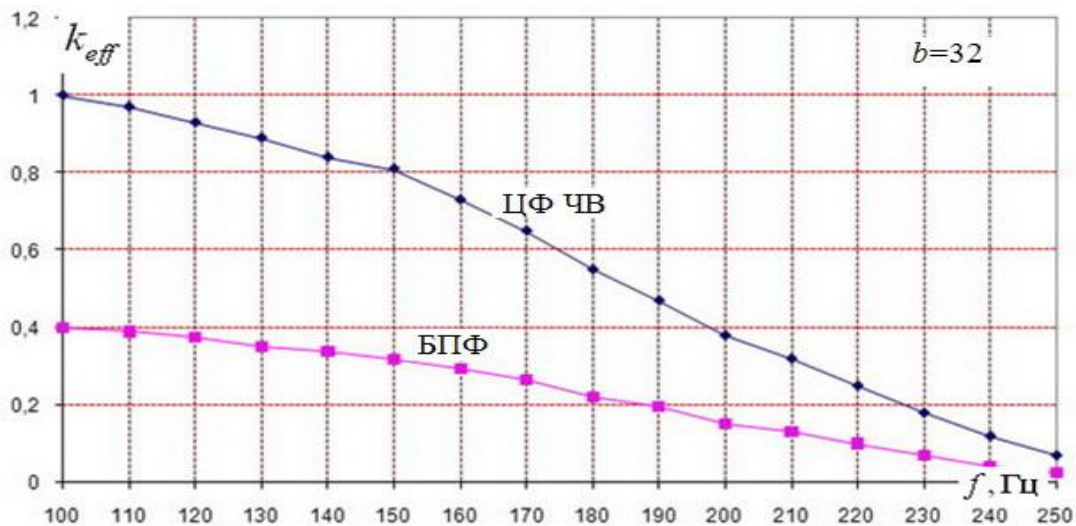


Рис. 1. Графики зависимости  $k_{\text{eff}}$  при Гауссовском спектре помех (32-разр. процессор)

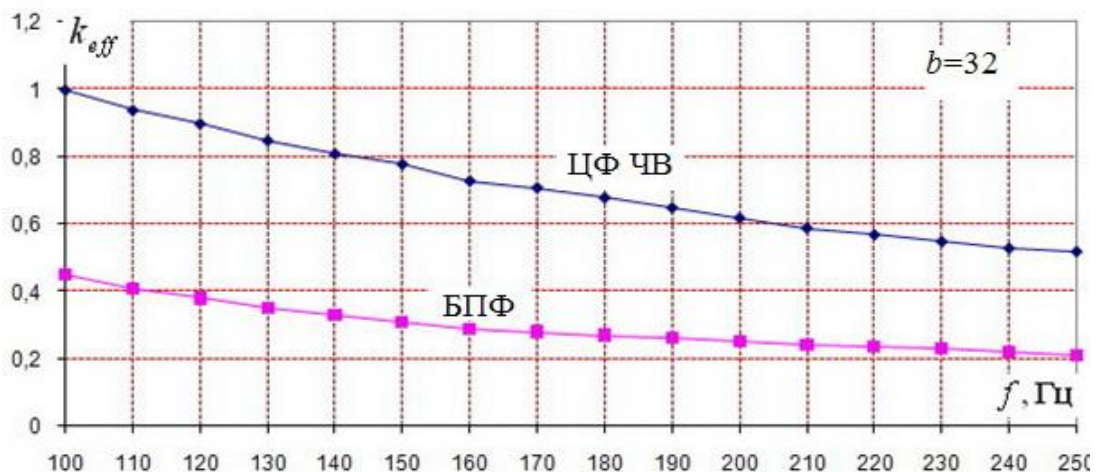


Рис. 2. Графики зависимости  $k_{\text{eff}}$  при резонансном спектре помех (32-разр. процессор)

Преимущество ЦФ ЧВ обусловлено меньшим числом арифметических операций, необходимых для обработки каждого отсчета сигнала (что следует также из выражений (13), (14)). Для сравнения на рис. 3 и 4 приведены графики зависимости  $k_{eff}$  от ширины нормированного энергетического спектра помехи для 8-разрядных ЦФ.

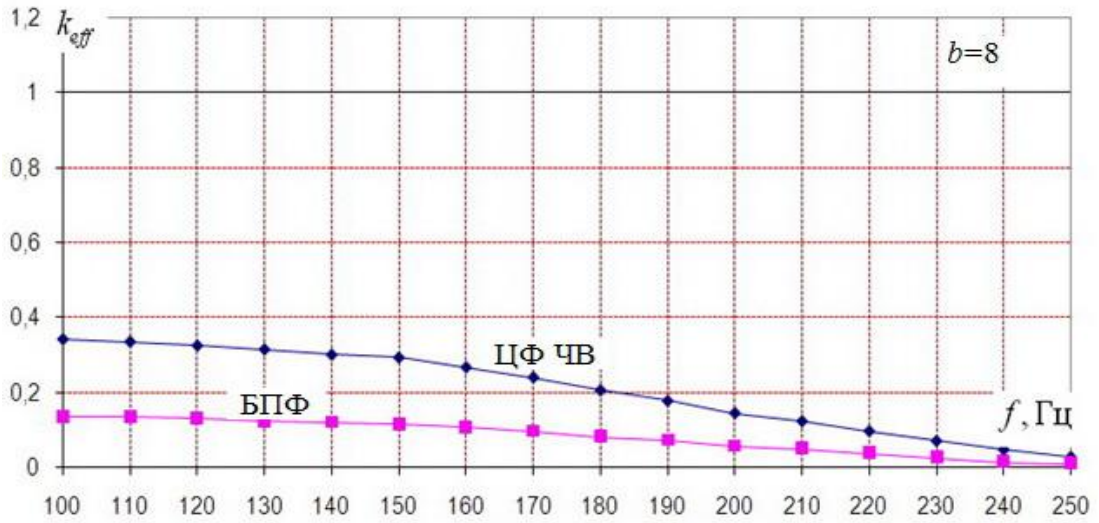


Рис. 3. Графики зависимости  $k_{eff}$  при Гауссовом спектре помех (8-разрядный процессор)

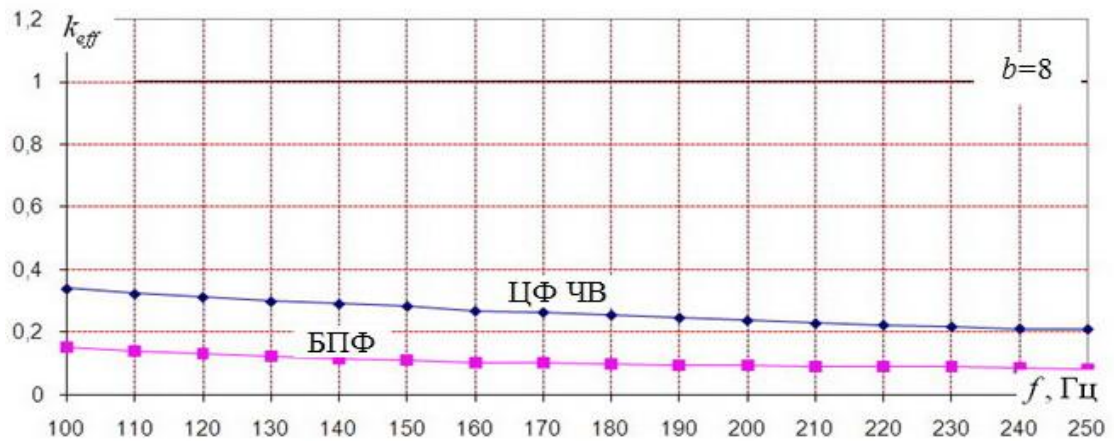


Рис. 4. Графики зависимости  $k_{eff}$  при резонансном спектре помех (8-разрядный процессор)

На рис. 5...8 изображены графики зависимостей нормированного коэффициента эффективности от разрядности цифровых устройств для частот  $f=100$  Гц  $f=200$  Гц.

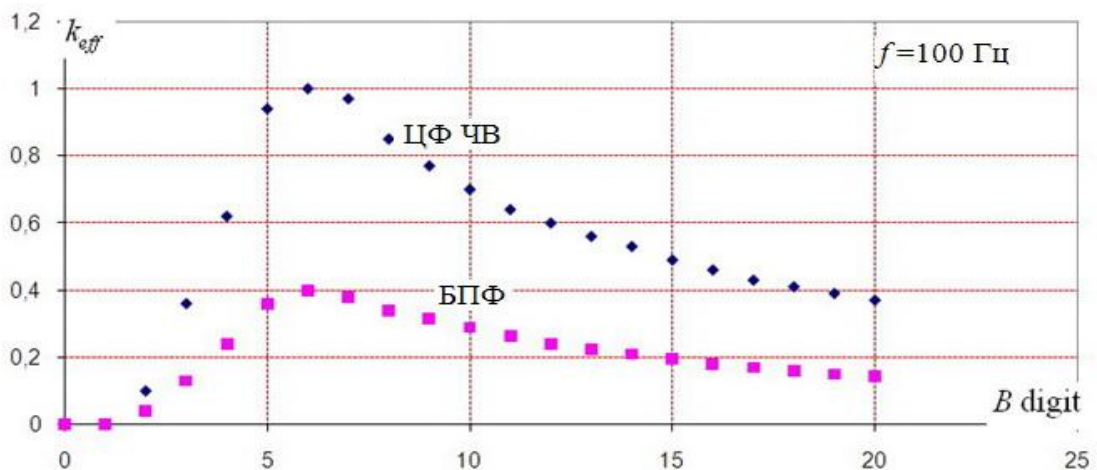


Рис. 5. Зависимость  $k_{eff}$  от разрядности при Гауссовом спектре помех ( $f=100$  Гц)

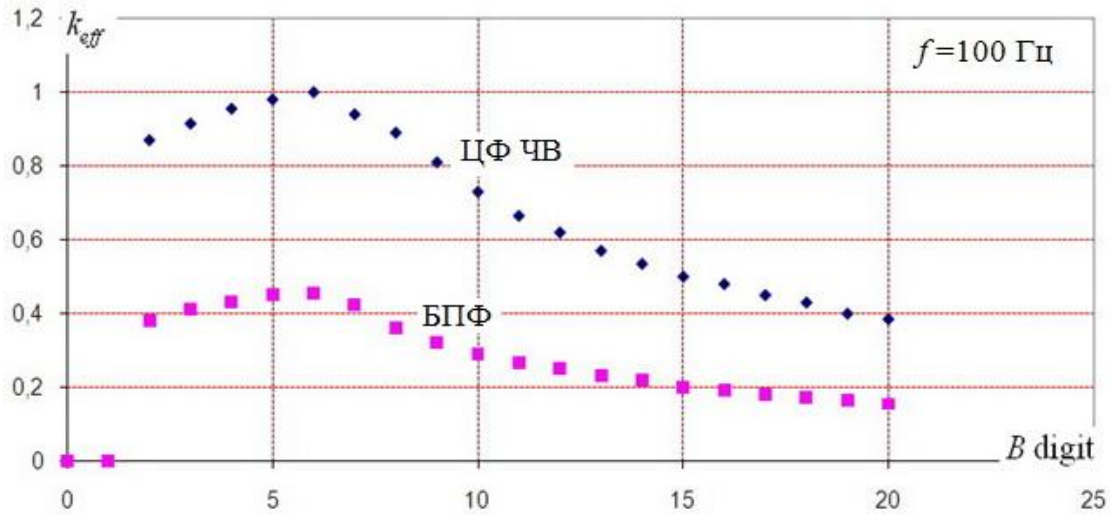


Рис. 6. Зависимость  $k_{eff}$  от разрядности при резонансном спектре помех ( $f=100$  Гц)

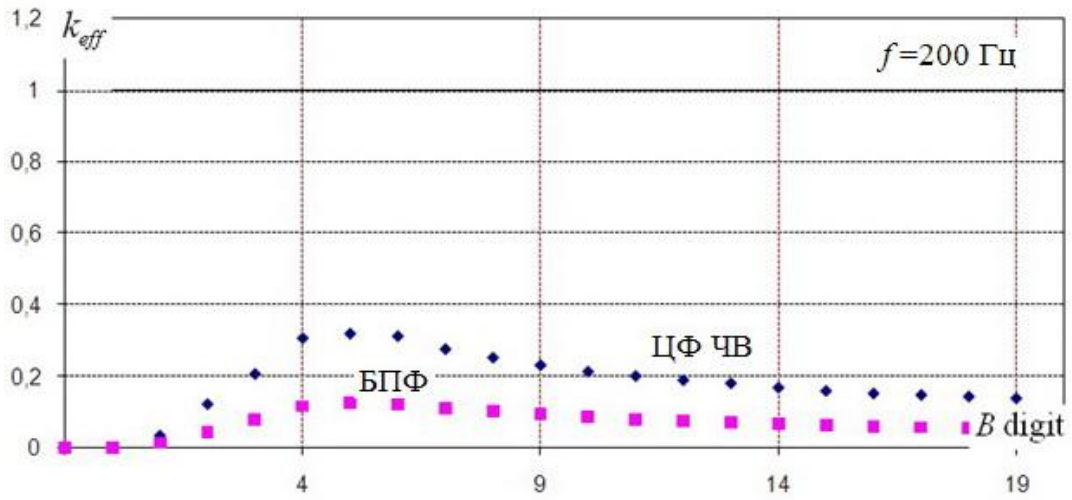


Рис. 7. Зависимость  $k_{eff}$  от разрядности при Гауссовском спектре помех ( $f=200$  Гц)

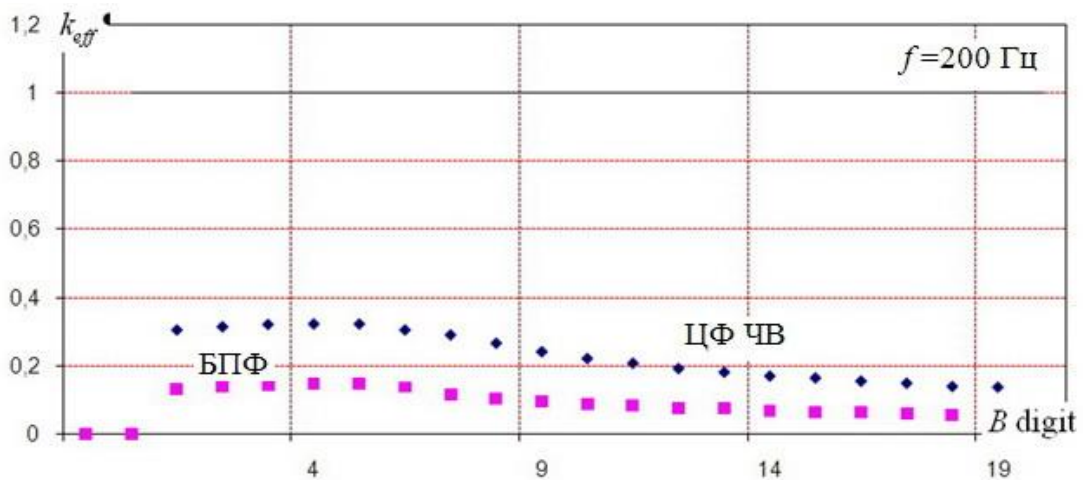


Рис. 8. Зависимость  $k_{eff}$  от разрядности при резонансном спектре помех ( $f=200$  Гц)



Наличие оптимума объясняется тем, что при слишком малой разрядности превалирует влияние ошибок (шумов) квантования, а при увеличении разрядности выше величины 7-8 быстро растут аппаратные и энергетические затраты. Естественно, требуемая разрядность цифрового устройства, как отмечалось выше, определяется необходимостью перекрытия динамического диапазона системы в целом. Напомним также, что в многоканальных фильтровых системах обработки данных нельзя использовать традиционные методы расширения динамического диапазона (например, устройства с логарифмическими амплитудными характеристиками) – амплитудная характеристика должна быть линейной. Конечно, приходится мириться с тем, что появляются паразитные составляющие в спектре обрабатываемого сигнала из-за нелинейности (ступенчатости) амплитудной характеристики АЦП. Однако при высокой разрядности эти нелинейные искажения пренебрежимо малы [10].

Необходимо уделять внимание и линейности фазо-частотной характеристики доплеровского фильтра во избежание появления неконтролируемых фазовых сдвигов составляющих спектра сигнала. Это может привести к случайно возникающим провалам в амплитудно-частотной характеристике при цифровой обработке, причем длительность существования таких провалов трудно оценить теоретически [10].

### Выводы

1. Судя по результатам проведенного предварительного анализа, можно сделать вывод, что при разработке перспективных и модернизации существующих фильтровых систем, как одночастотных, так и особенно многочастотных (многополосных) с перестраиваемыми характеристиками, целесообразно уделить внимание структурам на основе различных интерполяционных формул и частотной выборки.

2. При выборе разрядности цифрового устройства необходимо учитывать не только требования к точности, но и характеристики помех, в частности, вид и ширину спектра помех.

### Литература

1. Рабинер Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Рабинер Л., Гоулд Б.; пер. с англ. – М.: Мир, 1978. – 848 с.
2. Применение цифровой обработки сигналов; под ред. Э. Оппенгейма. – М.: Мир, 1980. – 552 с.
3. Каппелини В. Цифровые фильтры и их применение / Каппелини В., Константинович А. Дж., Эмилиани П. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 360 с.
4. Прокис Дж. Цифровая связь / Прокис Дж.; пер. с англ. / под ред Д. Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.
5. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение / Скляр Б.; пер. с англ. – [2-е изд.] – М.: Вильямс, 2003. – 1104 с.
6. Солонина А. И. Алгоритмы и процессоры цифровой обработки сигналов / А. И. Солонина, Д. А. Улахович, Л. А. Яковлев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2001. – 464 с.
7. Грушвицкий Р. И. Проектирование систем на микросхемах программируемой логики / Р. И. Грушвицкий, А. Х. Мурсаев, Е. П. Угрюмов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 608 с.
8. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Т.1. / Б. Р. Левин. – М.: Сов. радио, 1974. – 522 с.
9. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов / В. И. Тихонов. – М.: Наука, 1970. – 392 с.
10. Оппенгейм А. В. Цифровая обработка сигналов / Оппенгейм А. В., Шафер Р. В.; пер. с англ. / под ред. С. Я. Шаца. – М.: Связь, 1979. – 416 с.