4. Молоковский И.А. Исследование возможности передачи информации с помощью беспроводных технологий в телекоммуникационных сетях промышленных предприятий» / Молоковский И.А. Сборник научных трудов Донецкого национального технического университета (факультет КИТА), серия: «Вычислительная техника и автоматизация». – 2010. – Вып. 19(171). – С. 77-82.

5. Радиосвязь под землей на излучающем кабеле для создания телекоммуникационных систем на шахтах, рудниках и спецобъектах [Електронний ресурс]; матер. компанії «Інформаційна Індустрія», 2005 // – Режим доступу:
http://www.informind.ru/catalog/catalog_ system_expo_4/

УДК 004.056.53

Букелкул Салих, асп. (Гос. унив-т информационно-коммуникационных технологий)

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ИЗУЧЕНИЯ ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ ТРЕБОВАНИЯ В СИСТЕМЕ С БОЛЬШОЙ НАГРУЗКОЙ

Букелкул Саліх. Загальні принципи вивчення часу перебування вимоги в системі з великим навантаженням. Розглянуто загальні принципи вивчення часу перебування вимоги в системі з великим завантаженням, а також наведені способи знаходження граничного розподілу часу перебування вимоги в системі у разі докритичного, критичного і надкритичного завантажень.
Ключові слова: СИСТЕМА, ЗАВАНТАЖЕННЯ, ГРАНИЧНИЙ РОЗПОДІЛ, ЧАС ПЕРЕБУВАННЯ

Букелкул Салих. Общие принципы изучения времени пребывания требования в системе с большой нагрузкой. Рассмотрены общие принципы изучения времени пребывания требования в системе с большой загрузкой, а также приведены способы нахождения предельного распределения времени пребывания требования в системе в случае докритической, критической и надкритического загрузок.
Ключевые слова: СИСТЕМА, ЗАГРУЗКА, ПРЕДЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, ВРЕМЯ ПРЕБЫВАНИЯ

Bukelkul Salikh. General principles of the study of stay time of requirement in the system with the large loading. The general principles of studying the residence time requirements in the system with a large load, and shows how to find the limit distribution of the residence time requirements in the system in the case of sub-critical, critical and supercritical downloads.
Keywords: SYSTEM, LOADING, MAXIMUM DISTRIBUTION, STAY TIME

Известно, что в системах с бесконечной очередью при нагрузке $\rho \geq 1$ основные характеристики, такие как длина очереди и время пребывания в системе, с течением времени в том или ином смысле стремятся к бесконечности (например, сходимость в самом слабом месте – к бесконечности стремиться математическое ожидание) [1]. Факт ухода на бесконечность справедлив и для стационарных характеристик систем при изменяющейся загрузке $\rho\uparrow 1$. В системах $M/GI/1/\infty$с различными дисциплинами обслуживания (впрочем, как и в системах $GI/GI/1/\infty$) это свойство является отражением узловой теоремы восстановления, примененной к процессам восстановления, образованным последовательными моментами начал периодов занятости. Как следует из соответствующих уравнений для распределения длин периодов занятости, средняя длина периода занятости стремиться к бесконечности при $\rho \uparrow 1$, равна бесконечности при $\rho =1$, а при $\rho > 1$ длина периода занятости с ненулевой вероятностью принимает значение бесконечность. В соответствии с этим задача нахождения предельного распределения времени пребывания требования в системе, которая исследуется в данной статье, ставиться по разному для случаев докритической ($\rho<1$), критической ($\rho=1$) и надкритического ($\rho>1$) загрузок.

Наиболее важными предоставляются следующие постановки задач. В случае докритической загрузки рассматривается стационарное распределение времени пребывания требования в системе и изучается его предельное поведение при $\rho \uparrow 1$. В случае критической загрузки изучается предельное при $t\to\infty$ распределение времени пребывания в системе требования, поступившего в момент t. В случае надкритической загрузки можно для различных дисциплин исследовать как предельное распределение времени пребывания в системе требования, поступившего в момент t при $t \to \infty$, так и асимптотическое поведение вероятности того, что требования поступившее в момент t, будет обслужено.

Наиболее интересным для изучения является случай критической загрузки. Далее будет показано, что предельное распределение времени пребывания требования в системе в этом случае определяется, в основном асимптотическим поведением непоглощенной части непрерывного снизу процесса с независимыми превращениями(или случайного блуждания), имеющего поглощающий экран в нуле. Кроме того будут также более детально обсуждены и случаи докритической и надкритической загрузок, предложены методы нахождения предельных распределений времени пребывания требования в системе и установлена связь между этими распределениями и предельными распределениями сумм случайного числа случайных слагаемых.

Несколько в стороне от дальнейших исследований стоят инвариантная дисциплина и инверсионный порядок обслуживания с вероятностным приоритетом. Для них предельное при $\rho \uparrow 1$ стационарное распределение времени пребывания в системе требования длины х определяется теми же формулами, что при $\rho<1$, является собственным, но с бесконечным математическим ожиданием. Интересно отметить этот факт, поскольку он присущ и многим другим дисциплинам с инверсионным порядком обслуживания [2, 3].

В случае $\rho \geq 1$ рассмотрим $F(t,x)$ – вероятность того, что находящееся в момент t на обслуживании требование имеет остаточную длину менее x . Если $F(t,x)$ при $t \to \infty$ сходиться к некоторому предельному распределению $F(x)$, то, по крайней мере для дисциплины с непрерывной функцией $w(x,y)$, существует (несобственное) предельное распределение времени пребывания в системе требования длины x.Предельное распределение времени ожидания начала обслуживания требования длины х имеет вид:

$$\omega x(s) = \int_0^\infty [\omega(x,y) + \pi_\infty(s,y)\nu(x,y)]\, dF(y).$$

Для определения $F(x)$ можно воспользоваться следующими простыми рассуждениями относительно предельного стационарного потока моментов, в котором длина обслуживаемого требования принимает значение x.

Обозначим через $\alpha(x) = \pi_\infty(\mathrm{o},x) = \exp[-\lambda x(1-\pi(o))]$ – вероятность периода занятости требованиями длины x, а через $\beta(\gamma,u)$ – вероятность того, что начавшие обслуживаться требования длины y, обслуживаются до длины u. Тогда $\beta(y,u) = e^{-\lambda \int_u^y \int_o^\infty \omega(x,z)(1-2(x))\, d\theta(x) dz}$.

Вероятность того, что поступившее в систему требование длиныu обслужиться до длины y, имеют вид: $\int_{\mathrm{o}}^\infty [\omega(u,x) + \alpha(x)\nu(u,x)] \mathrm{d}F(\mathrm{x})\beta(u,y)$

Наконец, для плотности $f(x)$ распределения $F(x)$ справедливо уравнение:

$$f(y) = \lambda \int_{\mathrm{o}}^\infty f(x) \int_{\mathrm{y}}^\infty \beta(u,y)[\omega(u,x) + \alpha(x)\nu(u,x)] \mathrm{d}G(u) ox \qquad (1)$$

В уравнении (1) если p=1, то $\alpha(x) = 1, \beta(y,u) > 1$ и $f(y)=\alpha(1-G(x))$.

$$\beta(y,u) = \mathrm{e}^{-x \int_{\mathrm{u}}^y \int_{\mathrm{o}}^z (-1-\lambda(\mathrm{x}))\mathrm{d}G(x)\mathrm{d}z}, \text{ а уравнение (1) принимает вид:}$$

$$f(y) = \lambda \int_y^\infty \beta(u,y)\mathrm{d}G(u) \int_{\mathrm{o}}^\infty \alpha(x) f(x) \mathrm{d}x + \lambda \int_y^\infty \int_y^x \beta(u,y) \mathrm{d}G(u)(1-\alpha(x)) f(x) \mathrm{d}x,$$

и его можно разрешить, например, методом последовательных приближений. Отметим также, что если $w(x,y)=\sum_w^J w_{\mathrm{i}}^{(1)}(\mathrm{x}) \mathrm{w}_{\mathrm{i}}^{(2)}(y)$, то решение уравнения (1) сводиться к решению линейной однородной системы управлений. Например, для инверсионного порядка обслуживания и без прерывания обслуживания имеем, соответственно:

$$f(y) = \lambda \int_y^\infty \beta(u,y) \mathrm{d}G(u) \quad \text{и} \qquad f(y) = \lambda(1G(y))\rho^{-1}.$$

Обозначим через $\rho_x = \lambda \int_0^x y \mathrm{d}G(y)$ и $\rho_x = \lambda \int_0^x m_y \,\mathrm{d}F(y)$ для систем – загрузку систем требованиями длины(приоритета) меньше x. Определяем x_0 как решение неравенств $\rho_{x_0-0} \leq 1$и$\rho_{x_0+0} \geq 1$.

Специфика изученных дисциплин обслуживания такова, что при вычислении стационарного распределения времени пребывания в системе требования длины (приоритета) $x < x_0$, можно, во-первых, исключить из рассмотрения все требования длины (приоритета) больше x_0, а во-вторых, пользоваться полученными в [4…7] расчетными формулами, считая только, что в систему поступают требования длиныменьше x_0. Если же x_0, является точкой разрыва функции $\rho(x)$, то исполнительно нужно провести рендомизацию, т.е. допустить в систему требования длины x_0 с вероятностью $\left(1 - \rho_{x_{0-0}}\right)/ (\rho_{x_0} - \rho_{x_{0-0}})$.

Итак, изучим асимптотическое поведение распределения времени пребывания в системе требования максимальной длины (приоритета). Будем предполагать, что случаю $\rho \uparrow 1$ соответствует изменение интенсивности входящего потока λ, а остальные параметры системы остаются неизменными. Кажущиеся более общими варианты изменения длины рассматриваемых требований или изучения времени пребывания в системе требований не максимальной длины исследуется абсолютно аналогично. Не вносит принципиальных трудностей и случай изменения остальных параметров системы.

Для дисциплин, в случае, когда максимальная длина требования является точкой непрерывности распределения $G(x)$ (или $F(x)$), основную роль при изучении предельного распределения времени пребывания в системе требования максимальной длины играет асимптотическое поведение распределения времени до окончания периода занятости, проистекающего в момент t при $t \to \infty$ или в стационарном режиме при $\rho \uparrow 1$. В свою очередь, время до окончания периода занятости, проистекающего в момент t, можно представить в виде суммы двух величин, одна из которых – виртуальное время ожидания начала обслуживания в момент t, а вторая – сумма случайного числа независимых случайных слагаемых, причем распределение каждого слагаемого совпадает с распределением периода занятости той же системы. Индекс суммирования не зависит от слагаемых и распределен по закону Пуассона с диаметром, равным произведению интенсивности входящего потока λ на виртуальное время ожидания начала обслуживания[6]. Преимущество такого подхода становиться очевидным, если рассмотреть случай, когда максимальная длина требования $x_{\max}$ является точкой разрыва функции распределения $G(x)$ (или $F(x)$), а обслуживание требований одной длины производиться в порядке поступления. Тогда в представлении времени в системе требования максимальной длины в виде суммы случайного числа случайных слагаемых нужно взять слагаемые, распределенные как период занятости системы требованиями длины(приоритета) меньше $x_{\max}$, а вместо интенсивности входящего потока λ использовать интенсивность $\lambda G(x_{\max})$ или$\lambda F(x_{\max})$ поступления требований длины меньше $x_{\max}$. Кроме того, такой подход позволяет рассматривать как системы с меняющимся приоритетом, так и порядки обслуживания требований одной длины, отличные от обслуживания требований в порядке поступления.

Наиболее просто исследуется случай $\rho \uparrow 1$. Стационарное распределение виртуального времени ожидания начала обслуживания имеет ПЛС.

$$1 - \rho + \lambda(1 - \rho)(1 - s))(s - \lambda - \lambda g(s))^{-1}.$$

Предположим, что при $s \downarrow 0$ имеет место разложение:

$$1 - g(s) = tns - \alpha s^{\gamma} + 0(s^{\gamma})(\alpha > 0, 1 < \gamma < 2). \qquad (2)$$

Нормируя виртуальное время ожидания начала обслуживания постоянной $C = (1 - \rho)^{-1/(\gamma-1)}$при $\lambda \uparrow \lambda_0 = 1/m$, получаем предельное стационарное распределение нормированного виртуального времени ожидания начала обслуживания с ПЛС.

$$\varphi\,(s)(1 + \lambda_0 \alpha s^{\gamma-1}). \qquad (3)$$

Для определения предельного стационарного распределения времени до окончания периода занятости воспользуемся теоремой о сумме случайного числа случайных слагаемых. Рассмотрим уравнение периода занятости:

$$\pi(s) = g\big(s + \lambda - \lambda\pi(s)\big).$$

Нормируя период занятости величиной $(1-\rho)^{-\gamma|(\gamma-1)}$, и учитывая (2), видим, что ПЛС $\pi(s)$ нормированного периода занятости приближенно определяется формулой:

$$1 - \pi(s) \sim (1-\rho)^{\frac{1}{\gamma-1}}\varphi(s),\ \text{где } \varphi(s) \text{ – решение уравнения: } \varphi + \alpha x_0^{\gamma}\varphi^{\gamma} = ms. \qquad (4)$$

Рассмотрим теперь сумму $[(1-\rho)^{-\gamma|(\gamma-1)}]$ независимых нормированных периодов занятости (в данном случае $[a]$ означает целую часть a). Распределение этой суммы при $\rho\uparrow 1$ будет сходиться к предельному с ПЛС $\exp\{-\varphi(s)\}$. Поскольку распределение индекса суммирования, равного числу периодов занятости, нормированного константой $(1-\rho)^{-\gamma|(\gamma-1)}$, также сходиться к предельному с ПЛС, задаваемым формулой (3), где вместо s подставлено $\lambda_0 s$, то, как следует из результатов, существует предельное стационарное распределение времени до окончания периода занятости, нормированного величиной$(1-\rho)^{-\gamma|(\gamma-1)}$, с ПЛС $w(s) = (1 - \lambda_0^{\gamma}\lambda(\varphi(s))^{\gamma-1)^{-1})} = \varphi(s)(ms)^{-1}$.

В частном случае γ=2 (длина требования имеет конечный второй момент) получаем из (4)$\varphi(s) = (\sqrt{1+4\alpha\lambda_0}s - 1)(2\alpha\lambda_0^2)^{-1}$,и предельное стационарное распределение времени до окончания периода занятости,нормированного величиной $(1-\rho)^{-2}(2\alpha\lambda_0)^{-1}$, задается своим ПЛС $w(s) = \sqrt{1+2s} - 1)s^{-1}$,/

В случае $\rho > 1$ рассмотрим виртуальное время ожидания начала обслуживания в момент t и $t\to\infty$. Но тогда по закону больших чисел виртуальное время ожидания начала обслуживания, нормированное величиной t, будет стремиться к постоянной, равной $(\rho\text{-}1)/m$, и если функция распределения $G(x)(f(x))$ непрерывна в точке $x_{\max}$, вероятность того, что требования приоритета $x_{\max}$, поступившее в систему в момент t, будет обслужено, стремиться к нулю при $t\to\infty$. Для систем M|GJ|1|∞ этой вероятности соответствует вероятность поглощения непрерывного снизу и слева однородного процесса с независимыми превращениями. Интерес представляет также исследование условного распределения времени ожидания начала обслуживания требования длины $x_{\max}$, поступившего в систему в момент t, при условии, что это требование будет обслужено и $t\to\infty$.

Если же $p_{x_{\max-0}} \le 1$ и в системе реализована дисциплина FIFO обслуживание требований одинаковой длины, рассматриваемая задача снова сводиться к суммированию независимых одинаково распределенных случайных величин до случайного индекса, причем индекс суммирования, нормированный временем t, сходиться к постоянной (по вероятности). Доказанная теорема позволяет полностью изучить класс предельных распределений и необходимые и достаточные условия в этом случае, причем индекс суммирования может как угодно зависеть от слагаемых.

При $p_{x_{\max-0}} = 1$ и дисциплинеLIFO обслуживания требований одной длины вероятность обслуживания до конца требования максимальной длины также стремиться к нулю.

Наконец, если $p_{x_{\max-0}} < 1$ и дисциплина обслуживания требования одной длины LIFO, исследование системы проводится так же, как и в случае инвариантной дисциплины или инверсионного порядка обслуживания с вероятностным приоритетом.

Наиболее сложен и интересен для исследований случай ρ=1, однако и полученные в этом случае результаты наиболее полные и просто формулируемые. Прежде всего заметим, что если найти предельное распределение нормированного виртуального времени ожидания начала обслуживания, то используя результаты по суммированию случайных величин до случайного индекса[6], нетрудно определить для различных дисциплин предельное распределение времени пребывания максимальной длины. Далее, как уже говорилось, определяется время, прошедшее с начала последнего до момента t периода занятости, с ростом *t* стремиться к бесконечности. Однако, если это время нормировать значением *t*, то будет справедлив следующий результат.

Обозначим через $_t$время, прошедшее с начала последнего до момента *t* периода занятости. Тогда, если распределение периода занятости удовлетворяет условию

$$1\text{-}R(x) \sim C_x{}^{-\beta}(\ C > 0, 0 < \beta < 1), \tag{5}$$

то $$P\left\{{}_t t^{-1} < x\right\} \to \frac{\sin \pi\beta}{\pi} \int_0^x y^{-\beta}\,(1-y)^{\beta-1}, \quad \mathrm{d}y (0 \le x \le 1). \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что постоянная β тесно связана с разложением $g(s)$ в сумме. Точнее говоря, условия (5) выполнено тогда и только тогда, когда выполнено условие (2), причем $\beta\gamma = 1$.

Таким образом, в случае критической загрузки задача определения предельного распределения времени пребывания в системе требования максимальной длины свелась к задаче определения предельного при $t\to\infty$ распределения виртуального времени ожидания начала обслуживания в момент *t* при условии, что первый период занятости не окончился к моменту *t*. Эта задач и будет решаться в дальнейшем, причем исследования будут проводиться как для непрерывных слева непрерывных снизу однородных процессов с независимыми приращениями, так и для непрерывных снизу целочисленных случайных блужданий, целочисленных случайных блужданий с геометрически распределенным скачком вниз и случайных блужданий с экспоненциально распределенным скачком вниз. Полученные результаты касаются не только критической загрузки(чему в терминах процессов или случайных блужданий соответствуют $M\xi(1)=0$), но также и докритической ($M\xi\ (1)< 0$) и некритической ($M\xi\ (1)>0$) загрузок. Более того, для случая критической загрузки и существования второго момента полученная теорема для произвольного случайного блуждания, что применимо к анализу общих чисел вида GJ/GJ/1/∞/. Заметим также, что все требования, предъявляемые к поведению ПЛС в нуле, нетрудно выразить, используя тауберовы и абелевы теоремы, в терминах поведения функций распределения на бесконечности.

Нетрудно видеть, что существует(собственное) предельное условное распределение длины открывающего период занятости требования при условии, что период занятости продлиться бесконечно долго. Теперь, воспользовавшись теоремой и формулой (6), имеем для ПЛС предельного распределения нормированного виртуального времени ожидания начала обслуживания выражение: $\varphi(s) = 1 - \frac{\sin\frac{\pi}{\gamma}}{\pi} \int_0^\infty \int_0^1 \mathrm{e}^{-u}\,(x + \frac{u}{s^y})^{-\frac{1}{y}}(1-x)^{\frac{1-y}{y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}u$.

Литература

1. Дынкин Е. Б. Некоторые предельные теоремы для сумм независимых случайных величин с бесконечными математическими ожиданиями Е. Б. Дынкин // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1955. – №19. – С.247-266.

2. Кагоненко В. А. Системы массового обслуживания с инверсионным порядком обслуживания и вероятностным приоритетом : дис. ... канд. техн. наук. –М., 1981. – 140 с.

3. Букелкул Салих. Большая загрузка в системе с инверсионным порядком обслуживания и вероятностным приоритетом / Букелкул Салих // Вісник Державного університету інформаційно-комунікаційних технологій. – 2012. – Т.10, №1. – С. 101-107.

4. Гнеденко Б. В. Об одной теореме переноса / Б. В. Гнеденко, Х. Фахим // ДАН СССР. –1969. –Т.187, №1. – С.15-17.

5. Печинкин А. В. О сходимости к нормальному закону сумм случайного числа случайных слагаемых / А. В. Печинкин // Теория вероятностей и ее применение. – 1973. – Т.18, №2. – С.380-382.

6. Саас Д. Одна задача теории суммирования до случайного индекса / Д. Саас, Б. Фрайер // Литовский мат. об. – 1971. –Т. II, №1. – С.181-187.

7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2 В. Феллер. – М.: Мир, 1967. – 752 с.