УДК 519.863 (045)

Куклинский М.В., к.т.н. *(Национальный авиационный университет)*

ФОРМИРОВАНИЕ ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНОГО МНОЖЕСТВА ВАРИАНТОВ ПОСТРОЕНИЯ СЛОЖНОЙ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Куклінський М.В. Формування парето-оптимальної множини варіантів побудови складної технічної системи. Описано підхід до формування парето-оптимальної множини варіантів побудови складної технічної системи з використанням інформації про її масово-траєкторні параметри.

Ключові слова: парето-оптимальна множина, складна технічна система, багатокритеріальна оптимізація, масово-траєкторні параметри

Куклинский М.В. Формирование парето-оптимального множества вариантов построения сложной технической системы. Описан подход к формированию парето-оптимального множества вариантов построения сложной технической системы с использованием информации про ее массово-траекторные параметры.

Ключевые слова: парето-оптимальное множество, сложная техническая система, многокритериальная оптимизация, массово-траекторные параметры

Kuklinskyi M.V. Formation of Pareto-optimal set of options for building a complex technical system. The formation of an approach to Pareto-optimal set of options for building a complex technical system, using the information about its mass- trajectory parameters, is described.

Keywords: pareto-optimal set, complex technical systems, multi-criteria optimization, mass-trajectory parameters

Вступление и постановка цели. В настоящее время, в условиях складывающейся в стране нестабильной экономической и социально-политической ситуации, требования, предъявляемые к перспективным сложным техническим системам (СТС), вступили в противоречие с возможностью их обеспечения. Так, с одной стороны, сохраняется общая тенденция к увеличению качества и спектра задач, которые могут выполняться этими системами, а с другой – снижаются объемы финансирования научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ, ужесточаются экологические требования к использованию этих систем, возникают межгосударственные споры по вопросу их принадлежности.

Само определение «сложная техническая система» подразумевает под собой то, что каждый из компонентов, входящий в ее состав, характеризуется значительным количеством параметров $x_1, x_2, ..., x_n$ и сложными связями между ними. Очевидно, что ее создание является финансово затратным мероприятием. Поэтому любой просчет или ошибка, допущенная на этапе проектирования, повлечет за собой в дальнейшем снижение предъявляемого к системе качества и большие финансовые затраты.

Поэтому необходимым становится разработка методического аппарата, позволяющего оценить качество системы на этапе проектирования с точки зрения затраченных на нее средств.

Ведь, можно разработать такой номинальный вариант построения системы, который смог бы выполнять весь перечень поставленных на нее задач. Очевидно, что он будет востребован долгие годы, но будет ли он обоснован по затраченным на нее ресурсам? А можно разработать вариант построения системы под конкретную задачу, который, несомненно, будет экономически обоснован, будет дешевым, но будет ли он востребован в дальнейшем, в условиях постоянно меняющихся требований к техническим системам?

Разработка метода поиска такого рационального варианта построения системы, который был бы экономически обоснован и при этом обеспечивал бы выполнение поставленной на него задачи и является целью данной статьи. Причем как видно из цели данный метод будет относиться к задаче многокритериальной оптимизации сложных технических систем.

Анализ публикаций. Анализ работ показал, что в идеале право на существование в большинстве отраслей имеют лишь сложные системы, удовлетворяющая в пределах своего "жизненного цикла" критериям «эффективность *(E)* – стоимость *(S)* – время *(T)*» [1]. Их сущность как раз и заключается в том, чтобы "вклад" любого образца в исполнение поставленной на нее задачи был не только тактически, но и экономически оправдан. Но, решая задачи оптимизации, связанные с этими критериями, исследователи обычно уходят от многокритериальных задач к однокритериальным. То есть, оптимизируется один из трех критериев, а остальные два принимаются в качестве ограничений. В основном, выбор критерия в качестве оптимизируемого в значительной степени зависит от того, что именно может быть задано с большей степенью точности. Причем, даже использование одного критерия часто сопряжено с существенными трудностями, обусловленными необходимостью дальнейшего применения оптимизационных моделей.

Поэтому для поиска рационального варианта построения СТС целесообразно задать допустимый набор частных критериев и свести задачу к поиску парето-оптимального множества вариантов построения этой системы.

Формирование области существования парето-оптимальных вариантов построения. Прежде чем формировать парето-оптимальное множество вариантов построения сложной системы, необходимо четко определится с основными требованиями к этой системе. Так как поиск множества уже подразумевает под собой решение многокритериальной задачи, необходимо четко сформулировать требования к критериальным функциям, их аргументам, а также необходимо учесть все связи между критериями, их физику и природу. Все эти требования должны быть неотъемлемой частью процесса обоснования выбора оптимального варианта построения сложной системы.

Характеризуя сложную систему можно сказать, что ее массово-траекторные параметры (МТП), по сути, представляют собой координаты точки в многомерном пространстве. Или другими словами, любая сложная система может быть формально описана координатами точки в многомерном пространстве массово-траекторных параметров. Уравнение существования выделяет в этом пространстве область технически реализуемых вариантов СТС, а применение моделей функционирования этой системы и методик оценки ее эффективности обеспечивает возможность каждой точке этой области поставить в соответствие численные значения указанных критериев.

Представим целевую критериальную функцию в виде квадратичного полинома

$$f(x)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m}a_{ij}x_i x_j \quad ,$$

или в матричном виде

$$f(x)=A_0+2A_1x+x^T A_2 x \quad .$$

Здесь x – вектор-столбец массово-траекторных параметров СТС;

x^T – транспонированный вектор-столбец x;

A_0 – свободный член аппроксимирующего полинома;

A_1 – вектор аппроксимирующих коэффициентов при первых степенях массово-траекторных параметров, которые не перемножаются между собой;

A_2 – симметричная квадратная матрица при вторых степенях массово-траекторных параметров, а также при параметрах, которые перемножаются друг на друга.

Для нахождения матриц A_0, A_1 и A_2 необходимо найти коэффициенты полинома a_{ij}.

Способы поиска коэффициентов полинома, а также доводы в пользу выбора квадратичной аппроксимации критериальной функции, как к классу полиномов второй степени описаны в [2, 3], поэтому останавливаться на этом моменте не будем.

Как указывалось выше, оптимизация МТП будет вестись в рамках широко известных критериев «эффективность *(E)* – стоимость *(S)* – время *(T)*». Определив критерий *T* как ограничение и используя матричный вид критериальных функций, зададим их для *E* и *S* следующими выражениями:

$$f_1(x) = A_0^1 + 2A_1^1 x + x^T A_2^1 x \ ,$$
$$f_2(x) = A_0^2 + 2A_1^2 x + x^T A_2^2 x \ .$$

Здесь верхние индексы при матрицах *A* соответствуют номеру критерия.

Найдя коэффициенты a_{ij}, можно сформировать матрицы A_0, A_1 и A_2 для критериальных функций.

Так как оптимизация многокритериальных задач подразумевает под собой минимизацию (максимизацию) главных критериев, то далее необходимо найти значения безусловных минимумов этих критериев.

Используя правила дифференцирования матричных выражений по скалярному аргументу, имеем

$$\frac{f_1(x)}{dx} = 2A_1^1 + 2x^T A_2^1 \ ,$$

$$\frac{f_2(x)}{dx} = 2A_1^2 + 2x^T A_2^2 \ .$$

Приравнивая значения $\frac{f_1(x)}{dx}$ и $\frac{f_2(x)}{dx}$ к нулю, получим значения координат безусловных минимумов для критериальных функций $f_1(x)$ – точка $A\left(\operatorname{opt} x_1^1, \operatorname{opt} x_2^1\right)$ и, соответственно, $f_2(x)$ – точка $B\left(\operatorname{opt} x_1^2, \operatorname{opt} x_2^2\right)$ (Рис. 1).

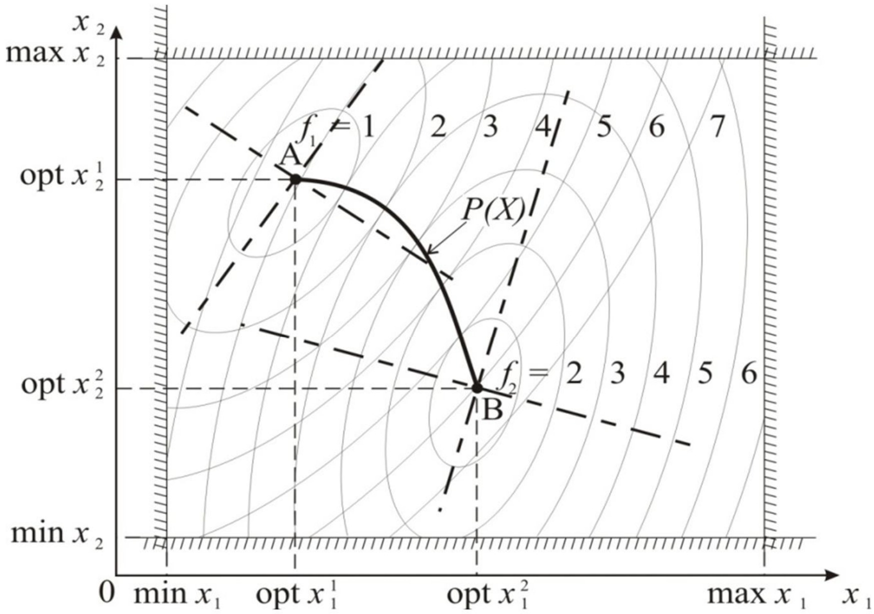

Рис. 1. Семейства исходных эллипсов

Таким образом, можно говорить, что варианты построения СТС с массово-траекторными параметрами, соответствующим точкам $A\left(\text{opt}\, x_1^1, \text{opt}\, x_2^1\right)$ и $B\left(\text{opt}\, x_1^2, \text{opt}\, x_2^2\right)$ являются оптимальными по критериям $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно, но это лишь в том случае, если данные точки принадлежат области допустимых решений. Если же точки не принадлежат этой области, то необходимо проводить дополнительные исследования, основанные на методе множителей Лагранжа и вводить существенные ограничения [4].

Рассмотрим случай, когда критериальные поверхности $f_1(x)$ и $f_2(x) = \text{const}$ являются многомерными эллипсоидами, а точки A и B принадлежат области допустимых решений (Рис. 1).

Можно показать, что при таком подходе множеству парето-оптимальных вариантов СТС $P(X)$ соответствует множество точек пространственной кривой AB, которая является геометрическим местом точек соприкосновения линий второго порядка (изоквант) семейства f_1 с линиями, принадлежащими семейству f_2.

Можно также показать, что парето-оптимальная линия AB полностью расположена внутри области, ограниченной главными осями невырожденных семейств линий второго порядка f_1 и f_2.

Но для того чтобы анализировать и сопоставлять компоненты критериев $f_1(x)$ и $f_2(x)$ они должны иметь одинаковую размерность (быть нормализованными).

Как видно из Рис. 1 для того чтобы привести исходные семейства линий второго порядка f_1 и f_2 к одной размерности, необходимо с критериальными функциями $f_1(x)$ и $f_2(x)$ провести такие ортогональные преобразования, которые позволили бы перейти в новую систему координат с помощью замены переменных, то есть перейти к новому базису, но в том же критериальном пространстве. Но это необходимо сделать так, чтобы свойства исходных семейств линий второго порядка f_1 и f_2 не менялись при переходе из исходной системы координат в новую систему и наоборот. Другими словами, необходимо повернуть их оси координат, а также сдвинуть начало координат одного из семейств.

Известно, что с помощью ортогональных преобразований всегда можно добиться параллельности осей обеих семейств, а используя сдвиг можно переместить их начала в некоторую точку [5].

Другими словами существует такое преобразование системы координат

$$x_1, x_2, ..., x_n \Rightarrow z_1, z_2, ..., z_n,$$

при реализации которого область парето-оптимальных решений находится внутри многомерного параллелепипеда, задаваемым соотношением

$$\forall \{z_1 \mid z_1 \in [\text{opt}\, z_1^1, \text{opt}\, z_1^2]\} \exists \{z_n^1, \text{opt}\, z_n^1\} \Rightarrow \{z_n\} \in P, \forall n = \overline{1, q} \;,$$

где P – область парето-оптимальных решений; z – параметры в новой системе координат; q – размерность пространства.

Причем всегда существует обратное преобразование из новой системы координат к старой системе.

Таким образом, с помощью изменения масштаба по осям, поворота и сдвига системы координат старое семейство эллипсов (Рис. 1) может быть трансформировано в семейство окружностей с центром в точке $\left(z_{01}, \quad z_{02}\right)$ и семейство деформированных эллипсов (Рис. 2).

Можно утверждать, что все точки кривой AB принадлежат обеим поверхностям и являются парето-оптимальными.

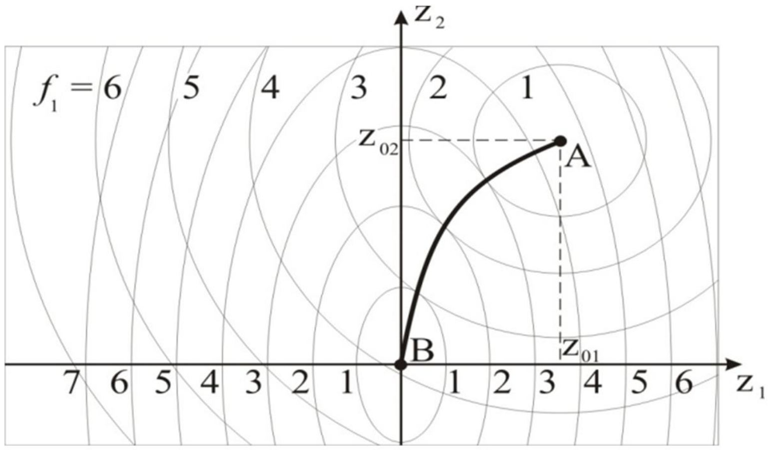

Рис. 2. Семейства деформированных эллипсов

Выводы. Предложенный подход позволяет, имея конкретную информацию об МТП сложной технической системы, представить ее критерии качества в виде квадратичных полиномов. Далее применив к ним различные методы матричного анализа и линейной алгебры сформировать парето-оптимальное множество вариантов построения этой системы.

Окончательный выбор рационального варианта построения системы из полученного парето-оптимального множества остается за исследователем. Кроме этого к найденному множеству можно применить методы, позволяющие его дальнейшее сужение [6].

Литература

1. Воронин А.Н. Многокритериальный синтез динамических систем / А.Н. Воронин. – К.: Наукова думка, 1992. – 160 с.

2. Куклінський М.В. Моделі та методи оптимізації складних систем / Максим Куклінський, Юрій Зіатдінов // Вісник Національного авіаційного університету. – 2004. – № 1 (19). – С. 147-150.

3. Куклінський М.В. Використання багатокритеріального синтезу при формуванні обліку складних систем / М.В. Куклінський, Ю.К. Зіатдінов, А.С. Климова // Інформаційно-діагностичні системи : Матеріали VI міжнародної науково-технічної конференції [«Авіа-2004»]. – 2004. – Т. 1. – С. 15.39-15.42.

4. Векторная оптимизация динамических систем / [А.Н. Воронин, Ю.К. Зиатдинов, А.И. Козлов, В.С. Чабанюк]. – К. : Техніка, 1999. – 284 с.

5. Математические основы теории автоматического регулирования : учебное пособие для втузов : Т.1 / [Б.К. Чемоданов, В.А. Иванов, В.С. Медведев и др.] ; под ред. Б.К. Чемоданова. – [2-е изд.]. – М. : Высшая школа, 1977. – 366 с.

6. Куклінський М.В. Проблеми звуження парето-оптимальної множини варіантів побудови авіаційно-космічної системи / Максим Куклінський // Збірник наукових праць «Проблеми інформатизації та управління». – 2013. – № 2(42). – С. 56-60.