

УДК 621.391

Недашківській О.Л., к.т.н. (Державний університет телекомунікацій)

## АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СИСТЕМИ СИНХРОНІЗАЦІЇ

**Недашківський О.Л. Аналіз математичної моделі системи синхронізації.** Розглянуто функціональну схему системи фазового автоматичного підстроювання частоти (ФАПЧ). Отримано математичну модель об'єкту управління ФАПЧ, на основі якої розроблена структурна схема системи. Проведено аналіз та розглянута можливість побудови системи ФАПЧ з принципом управління за відхиленням за допомогою операторного методу.

**Ключові слова:** система фазового автоматичного підстроювання частоти, ФАПЧ, генератор керований напругою, математична модель, операторний метод

**Недашковский А.Л. Анализ математической модели системы синхронизации.** Рассмотрена функциональная схема системы фазовой автоматической подстройки частоты (ФАПЧ). Получена математическая модель объекта управления ФАПЧ, на основе которой разработана структурная схема системы. Проведен анализ и рассмотрена возможность построения системы ФАПЧ с принципом управления по отклонению с помощью операторного метода.

**Ключевые слова:** система фазовой автоматической подстройки частоты, ФАПЧ, генератор управляемый напряжением, математическая модель, операторный метод

**Nedashkivskiy O.L. Analysis of mathematical model of the system of synchronization.** The functional diagram of phase automatic frequency control (PAFC) system is considered. The mathematical model of object of management of PAFC is got, on the basis of that system flow diagram is worked out. An analysis is conducted and possibility of construction of the PAFC system is considered with principle of management on a rejection by means of operator method.

**Key words:** phase automatic frequency control system, PAFC, voltage-controlled generator, mathematical model, operator method

**Вступ і постановка задачі.** Системи фазового автопідстроювання частоти (ФАПЧ) широко використовуються в техніці телекомунікацій. Методи фазової синхронізації широко використовуються в системах передавання та комутації з імпульсно-кодовою модуляцією для виділення тактового сигналу безпосередньо з переданої інформаційної послідовності, в апаратурі передачі даних, для стабілізації частот генераторів, тощо [1...3].

Показники якості систем фазової синхронізації (СФС), що застосовуються в різноманітних технічних засобах, значною мірою визначають ефективність та якість мереж телекомунікацій і, зрештою, якість послуг телекомунікацій.

Основними показниками якості СФС є точність в усталених режимах і швидкодія, ефективне і практичне підвищення яких є неможливим без створення адекватної математичної моделі та її аналізу [3...5].

**Математична модель ФАПЧ.** Типова функціональна схема система ФАПЧ представлена на Рис. 1,а. [1, 3, 6]. Складемо математичний опис процесів, які протікають в елементах даної схеми, та представимо їх в вигляді структурної схеми, Рис. 1,б.

Виведемо рівняння, яке відповідатиме процесам генератора керованого напругою (ГКН). Нехай в початковий момент напруга на виході регулюючого органу (РО) дорівнює нулю. В цьому випадку розлагодження ГКН відносно вхідної частоти вузла синхронізації буде

$$\omega_{ex} - \omega_{0_{ГКН}} = \Omega_H, \quad (1)$$

де  $\Omega_H$  – початкове розлагодження;

$\omega_{0_{ГКН}}$  – кутова частота ГКН при розімкненому ланцюгу управління;

$\omega_{ex}$  – кутова частота вхідного сигналу.

При замиканні ланцюга управління між точками **а**, **б** (Рис.1, *а*) миттєва частота ГКН зміниться в результаті появи напруги на вході РО. Нове значення  $\omega_{ГКН}$  в залежності від знаку миттєвої напруги на виході фільтра нижніх частот (ФНЧ) буде більше, або менше  $\omega_{0ГКН}$  :

$$\omega_{ГКН} \approx \omega_{0ГКН} \pm \omega_{РО}, \quad (2)$$

де  $\omega_{РО}$  – миттєве розлагодження, яке створює РО.

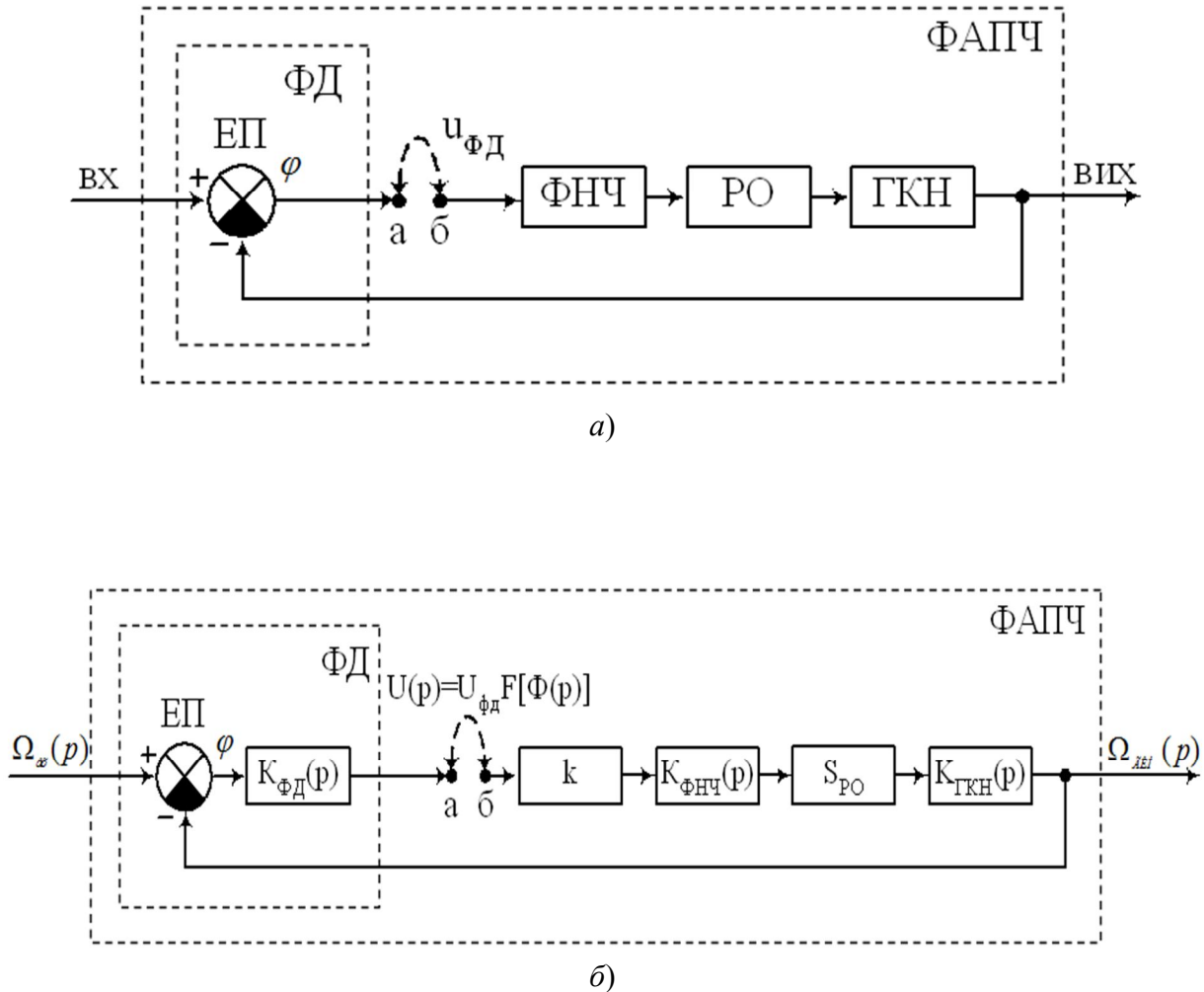


Рис. 1. Функціональна (а) і структурна (б) схеми системи ФАПЧ

Якщо вираз (2) підставити в співвідношення (1), то отримаємо рівняння, що описує процеси зміни частоти в ГКН

$$\omega_{0ГКН} = \Omega_H + \omega_{ex} \pm \omega_{РО}. \quad (3)$$

В загальному випадку миттєве значення фази ГКН зв'язано з миттєвими значенням зміни частоти цього генератора виразом

$$\phi_{ex} = \phi_{0ГКН} + \int_0^t \omega_{ГКН} dt, \quad (4)$$

де  $\phi_{0ГКН}$  – фаза ГКН при  $t=0$ ;  $\phi_{0ГКН} = \text{const}$ .

Продиференціюємо вираз (4) і отримаємо:

$$\frac{d\phi_{ГКН}}{dt} = \omega_{ГКН}. \quad (5)$$

Математичну модель поведінки ГКН в формі диференціального рівняння при врахуванні в якості вхідної величини частоти  $\omega_{PO}$ , а в якості вихідної – миттєвого значення фази  $\phi_{ГКН}$  отримаємо підстановкою співвідношення (5) в вираз (2):

$$\frac{d\phi_{ГКН}}{dt} = \omega_{ex} \pm \omega_{PO} - \Omega_n. \quad (6)$$

Рівняння величини розлагодження, яку створює РО, може бути представлено в вигляді (7), що і є математичною моделлю поведінки ГКН:

$$\omega_{PO} = S_{PO}, \quad (7)$$

де  $S_{PO}$  – крутизна характеристики РО.

Зазвичай РО працює на лінійній ділянці регулюючої характеристики, що, як наслідок, визначає незмінну крутизну  $S_{PO} = \text{const}$ .

Запишемо рівняння, яке зв'язує між собою вхідну  $U_{вх}$  і вихідну  $U_{вих}$  напруги:

$$U_{вих} = U_{вх} \pm \omega_{PO}, \quad (8)$$

де  $U_{вх}$  – миттєва напруга на вході підсилювача;

$U_{вих}$  – миттєва напруга на виході фільтра нижніх частот ФНЧ.

Підставивши вирази (7) в співвідношення (8) з врахуванням загального коефіцієнту передачі з'єднання

$$k = \frac{\omega_{PO}}{U_{вих}} \quad (9)$$

отримаємо вираз для  $k$  через параметри математичної моделі ГКН

$$k = \frac{S_{PO}}{1 \pm S_{PO}}. \quad (10)$$

Напруга на виході ФНЧ зв'язана з напругою на його вході ( $U_{ФД}$  – є вихідною напругою фазового детектора (ФД)) співвідношенням

$$U_{вих} = U_{ФД} \cdot k(t), \quad (11)$$

де  $k(t)$  – коефіцієнт передачі ФНЧ.

Рівняння системи ФАПЧ отримаємо шляхом підстановки виразів (9) і (11) в вираз (6):

$$U_{ФД} = \frac{1}{k \cdot K(t)} \cdot \frac{d\phi_{ГКН}}{dt} - \frac{\omega_{ex}}{k \cdot K(t)} + \frac{\Omega_n}{k \cdot K(t)}. \quad (12)$$

Розрахуємо фазову помилку системи ФАПЧ з врахуванням фаз вхідної частоти та ГКН:

$$\phi(t) = \phi_{ex}(t) - \phi_{ГКН}(t), \quad (13)$$

де  $\phi_{ex}(t)$  – фаза вхідного сигналу.

Помилка  $\varphi(t)$  перетворюється у ФД в напругу  $U_{\phi Д}(t)$ . В загальному випадку це перетворення описується нелінійним рівнянням. Миттєва вихідна напруга ФД визначається його експлуатаційною характеристикою, яка має періодичний характер в функції помилки системи, а саме:

$$U_{\phi Д}(\phi) = U_{\phi Д, \max} \cdot F[\phi(t)], \quad (14)$$

де  $F[\varphi(t)]$  – нормована характеристика ФД, тобто відношення по модулю миттєвої напруги до максимальної напруги.

Підстановкою виразів (13) і (14) в рівняння (12) отримаємо математичну модель об'єкту управління ФАПЧ в вигляді неоднорідного диференціального рівняння (15).

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\phi(t)}{dt} \cdot \frac{1}{K(t)} &= \frac{\Omega_H}{K(t)} \pm S_{PO} \cdot k \cdot u_{\phi Д}[\phi(t)]; & u_{\phi Д}[\phi(t)] &= U_{\phi Д} \cdot F[\phi(t)]; \\ u_{\phi Д}(0) &= u_{\phi Д} \{T[\phi(t)]\}; & u_{\phi Д}(\phi) &= u_{\phi Д}(\phi + T_{\phi}); & T_{\phi} &= const; & T_{\phi} &= 2\pi \end{aligned} \right\}, \quad (15)$$

де  $U_{\phi Д}$ ,  $T_{\phi}$  – відповідно амплітуда і період управляючого діяння.

Математична модель (15) є розімкнутою в точках **а** і **б** (Рис. 1,а) з управляючою величиною (фазовою координатою) в якості фазової помилки  $\varphi(t)$  і управляючого діяння  $U_{\phi Д}[\varphi(t)]$  з періодичністю по фазовій координаті системи  $T[\varphi(t)]$ .

На основі виведеної математичної моделі елементів ФАПЧ розроблена структурна схема ФАПЧ, яка приведена на Рис. 1,б.

**Аналіз моделі.** Для спрощення аналізу систем ФАПЧ розглянемо можливість побудови системи ФАПЧ з принципом управління за відхиленням (зі зворотним зв'язком) за допомогою операторного методу [1]. До складу системи входять: фазовий дискримінатор ФД, згладжувальний фільтр (фільтр нижніх частот) (Ф), підсилювач-перетворювач (ПП), інтегратор (І) та генератор керований напругою ГКН (Рис. 2,а). На вхід системи ФАПЧ надходить задавальна напруга  $u_1(t)$ , яка дорівнює

$$u_1(t) = U_{m_1} \cos[\omega t + \phi_1(t)].$$

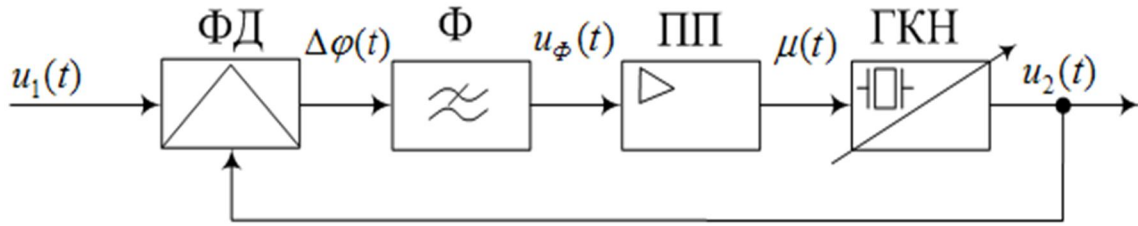
Вихідний сигнал генератора керованого напругою дорівнює

$$u_2(t) = U_{m_2} \cos[\omega t + \phi_2(t)].$$

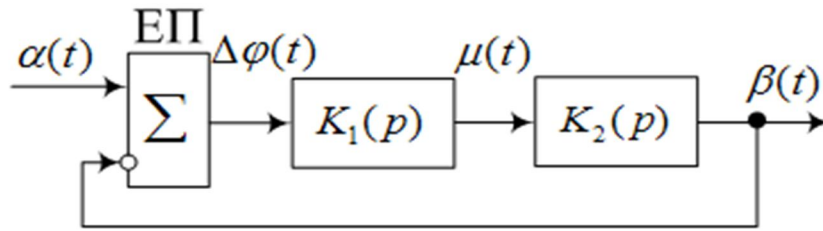
Різниця фаз  $\alpha(t)$  є задавальним діянням для системи ФАПЧ. Задача системи ФАПЧ полягає в забезпеченні рівності фаз напруг  $u_1(t)$  і  $u_2(t)$ .

За умови рівності фаз напруг  $u_1(t)$  і  $u_2(t)$  напруга на виході фільтра Ф фазового дискримінатора  $u_{\phi}(t) = 0$ . Поява кута  $\alpha(t)$  між фазами цих напруг на виході фільтра зумовлює виникнення напруги  $u_{\phi}(t)$ , яка пропорційна  $\sin \alpha(t)$ .

Ця напруга надходить на послідовно з'єднані підсилювач-перетворювач ПП. Керуюча напруга  $\mu(t)$  з виходу підсилювача-перетворювача ПП надходить на генератор керований напругою ГКН, який під її впливом зсуває напругу  $u_2(t)$  за фазою, зменшуючи різницю  $u_1(t)$  і  $u_2(t)$ .



а)



б)

Рис. 2. Функціональна (а) і структурна (б) схеми системи ФАПЧ з управлінням за відхиленням

Структурна схема такої системи для лінійного режиму матиме вигляд, зображений на Рис. 2,б.

Тут  $\alpha(t)$ ,  $\Delta\varphi(t)$ ,  $\beta(t)$  – відповідно задавальне діяння (різниця фаз задавальної  $u_1(t)$  і керованої  $u_2(t)$  напруг), помилка системи (різниця фаз напруг  $u_1(t)$  і  $u_2(t)$ ), керована величина (різниця фаз вхідної і вихідної напруг);

$K_1(p)$  – оператор послідовно з'єднаних елементів порівняння (ЕП), фільтра  $\Phi$  та підсилювача-перетворювача ПП;

$K_2(p)$  – оператор генератора керованого напругою ГКН;  $p \equiv d/dt$ .

Для лінійної системи ФАПЧ з астатизмом першого порядку слушні такі співвідношення:

1) оператор системи ФАПЧ з управлінням за відхиленням:

$$K_p(p) = \frac{\Delta\phi(t)}{\alpha(t)} = \frac{D_p(p)}{F_p(p)} = \frac{\sum_{j=0}^m c_j p^j}{\sum_{j=0}^n b_j p^j},$$

де  $D_p(p)$ ,  $F_p(p)$  – поліноми  $D_p(p) = \sum_{j=0}^m c_j p^j$  та  $F_p(p) = \sum_{j=0}^n b_j p^j$ ;

$m$  – порядок поліному  $D_p(p)$ , який залежить від виду коригувальних пристроїв, що входять у підсилювач-перетворювач ПП (зазвичай  $m=1-2$ );

$n$  – порядок полінома  $F_p(p)$  – який дорівнює порядку диференціального рівняння, що описує поведінку системи ФАПЧ.

2) оператор замкненої системи ФАПЧ:

$$K_3(p) = \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} = \frac{D_3(p)}{F_3(p)} = \frac{\sum_{j=0}^m c_j p^j}{\sum_{j=0}^n a_j p^j},$$

де  $D_3(p) = D_p(p)$ ;  $F_3(p) = D_p(p) + F_p(p)$ .

3) оператор системи ФАПЧ щодо помилки  $\Delta\phi(t)$ , зумовленої задавальним діянням  $\alpha(t)$ :

$$K_{\Delta\phi_\alpha}(p) = \frac{\Delta\phi_\alpha(t)}{\alpha(t)} = \frac{D_{\Delta\phi}(p)}{F_{\Delta\phi}(p)} = \frac{\sum_{j=1}^n b_j p^j}{\sum_{j=1}^n \alpha_j p^j},$$

де  $D_{\Delta\phi}(p) = F_p(p)$ ;  $F_{\Delta\phi}(p) = F_3(p) = D_p(p) + F_p(p)$ ;

$\Delta\phi(t)$  – складова фазової помилки, зумовленої задавальним діянням  $\alpha(t)$ .

**Висновки.** Отримано математичну модель об'єкту управління ФАПЧ, на основі якої розроблена структурна схема ФАПЧ.

Проведено аналіз та розглянута можливість побудови системи ФАПЧ з принципом управління за відхиленням за допомогою операторного методу.

Виведені основні співвідношення для лінійної системи ФАПЧ з астатизмом першого порядку.

### Література

1. Стеклов В.К. Системи фазового автопідстроювання та системи синхронно-фазової демодуляції / В.К. Стеклов, І.С. Щербина. – К.: Техніка, 2006. – 288 с.
2. Стеклов В.К. Итерационные системы фазовой автоподстройки / В.К. Стеклов, В.В. Коробко. – К.: Техніка, 2004. – 328 с.
3. Клэппер Дж. Системы фазовой и частотной автоподстройки частоты / Дж. Клэппер, Дж. Френк. – М.: Энергия, 1977. – 440 с.
4. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении / В. Линдсей. – М.: Сов. радио, 1978. – 598 с.
5. Шахгильдян В.В. Системы фазовой автоподстройки частоты / В.В. Шахгильдян, В.В. Ляховкин. – М.: Связь, 1972. – 447 с.
6. Фомин А.Ф. Аналоговые и цифровые синхронно-фазовые измерители и демодуляторы / А.Ф. Фомин, А.И. Хорошавин, И.О. Шелухин ; под ред. А.Ф. Фомина. – М.: Радио и связь, 1987. – 248 с.