

УДК 519.21

Марченко Н.Б., к.т.н. (Національний авіаційний університет)

ВИЗНАЧЕННЯ ПОХИБКИ ОЦІНКИ ЧАСТОТИ ЗА ПОЛОЖЕННЯМ МАКСИМУМУ СПЕКТРА ДЛЯ ВАГОВОЇ ФУНКЦІЇ ДОЛЬФА-ЧЕБИШЕВА

Марченко Н.Б. **Визначення похибки оцінки частоти за положенням максимуму спектра для вагової функції Дольфа-Чебишева.** Розглядається проблема оцінки частоти та амплітуди сигналу, що приймається на фоні завад за допомогою вагової функції Дольфа-Чебишева. Визначається ступінь наближення отриманих розв'язків для похибки оцінювання частоти радіосигналу за положенням максимуму спектра.

Ключові слова: просторо-часовий сигнал, вагова функція Дольфа-Чебишева, спектр, оцінка частоти, спектральна щільність, перетворення Фур'є

Марченко Н.Б. **Определение погрешности оценки частоты по положению максимума спектра для весовой функции Дольфа-Чебышева.** Рассматривается проблема оценки частоты и амплитуды сигнала на фоне помех с помощью весовой функции Дольфа-Чебышева. Определяется степень приближения полученных решений для погрешности оценки частоты радиосигнала по положению максимума спектра.

Ключевые слова: пространственно-временной сигнал, весовая функция Дольфа-Чебышева, спектр, оценка частоты, спектральная плотность, преобразование Фурье

Marchenko N.B. **Determination of error estimates for the position of maximum frequency range for the weight function Dolph-Chebyshev.** The problem of estimation of frequency and amplitude of the received signal to background noise using a Dolph-Chebyshev weight function is examined. Determine the degree of approximation obtained solutions for error estimation for radio frequency spectrum maximum position is determined.

Keywords: space-time signal, Dolph-Chebyshev weight function, spectrum, frequency estimation, spectral density, Fourier transform

Із загальної теорії радіолокації, зокрема [1, 2], відомо що основним фактором, що обмежує зниження похибки вимірювання, є похибка оцінювання різниці частоти, в якій найчастіше міститься корисна інформація щодо контролюючих параметрів технологічних процесів. Відомо що для високоточних радіолокаційних систем (РЛС) вимірювання параметрів технологічних процесів характерно високе відношення сигнал-завада та наявність сигналоподібних завад значного рівня. В цих випадках найбільш вагомою є методична похибка оцінки частоти сигналу, притаманна перетворенню Фур'є [3, 4].

Таким чином, аналіз джерел інформації за темою досліджень показав, що існують ефективні процедури спектрального аналізу радіосигналів в радіотехнічних системах та РЛС із застосуванням вагових функцій (ВФ), на базі яких створені технічні пристрої, алгоритми та програмні комплекси. При цьому алгоритми, що дозволяють підвищити точність оцінки частоти суттєво залежать від властивостей ВФ [5, 6].

Вагова обробка застосовується для зменшення похибки оцінки частоти та при обробці сигналу в часовій області. В роботах [6, 7] відомі ВФ використані для підвищення точності та завадостійкості цифрових вимірювачів частоти, а в [8] – для підвищення точності оцінювання частоти сигналу радіолокаційних дальномірів з неперервним випроміненням та частотною модуляцією зондуючого сигналу.

Відомо, що оцінки частоти та амплітуди відрізка синусоїди за її спектральною щільністю в загальному випадку відрізняються від точного значення частоти і амплітуди неперервної гармоніки [5], з якої “вирізана” ця вибірка через вплив складової спектральної щільності, що розташована на від'ємній області частот та через взаємний вплив гармонік

багатокомпонентного сигналу. Зауважимо, що серед множини відомих ВФ існує обмежене число ВФ, що враховують особливості спектра дискретних сигналів. До таких ВФ в першу чергу відноситься ВФ Дольфа-Чебишева, для якої форма огинаючої визначається не лише параметром α , однозначно пов'язаним з рівнем бокових пелюсток, але і числом дискретних відліків вибірки сигналу. Для більшості ВФ, отриманих для обробки неперервних сигналів, форма огинаючої відліків не змінюється при зміні їх числа на інтервалі аналізу. Через сталу форму огинаючої ВФ при зміні числа відліків дискретної вибірки сигналу змінюється форма спектральної щільності зваженого сигналу, ширина основного пелюстка та рівень бічних пелюсток спектральної щільності. В результаті, оцінки параметрів сигналу залежать від числа його відліків.

Враховуючи великий інтерес та практичну значимість гармонічного аналізу, можна зробити висновок, що зниження методичних похибок оцінок при спектральній обробці сигналу є важливою та недостатньо вивченою проблемою. Спираючись на відому залежність вибору форми ВФ від спектральної складової сигналу, що обробляється [4, 9], можна зробити висновок, що важливою і не розв'язано досі є задача знаходження ВФ, що адаптована до спектральної складової сигналу, що дозволяє виключити або мінімізувати методичні похибки оцінювання частоти та амплітуди сигналу на фоні завад. Широке застосування ВФ не лише в спектральному аналізі, а і в задачах інтерполяції сигналів та синтезу різних радіотехнічних систем, тощо, є додатковим підтвердженням актуальності досліджень, направлених на оптимізацію параметрів ВФ.

Співвідношення $T_n(X) = \cos(n\theta)$ задає відображення більшості алгебраїчних поліномів Чебишева n -ного порядку на більшість тригонометричних поліномів. За допомогою цього відображення можна отримати такий вираз для вікна Дольфа-Чебишева, який визначається через значення еквівадистантних відліків перетворення Фур'є вікна [5]:

$$w(k) = (-1)^k \frac{\cos \left[N \arccos \left[\beta \cos \left(\pi \frac{k}{N} \right) \right] \right]}{\operatorname{ch} [N \operatorname{ch}^{-1}(\beta)]}, \quad 0 \leq |k| \leq N-1,$$

$$\text{де } \beta = \operatorname{ch} \left[\frac{1}{N} \operatorname{ch}^{-1}(10^\alpha) \right]; \quad \arccos(X) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \operatorname{tg}^{-1} \left[X / \sqrt{1,0 - x^2} \right], & |X| \leq 1,0; \\ \ln \left[X + \sqrt{X^2 - 1,0} \right], & |X| \geq 1,0. \end{cases}$$

Наведемо нормуючий вираз спектральної щільності обмеженої вибірки гармонічного сигналу з ВФ Дольфа-Чебишева:

$$\begin{aligned} \dot{S}_q(Q, x) = & \frac{\exp(j\Phi)}{Q} \left[\operatorname{ch} \sqrt{\ln^2(Q + \sqrt{Q^2 - 1}) - (x_p \pi)^2} + \right. \\ & \left. + \exp(-j2\Phi) \operatorname{ch} \sqrt{\ln^2(Q + \sqrt{Q^2 - 1}) - (x_\Sigma \pi)^2} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

де Q^{-1} – рівень бічних пелюсток складових спектральної щільності від області додатних та від’ємних частот; Φ – фаза; $x_{\Sigma} = x_n - x_1$.

Для оцінки частоти сигналу необхідно розв’язати рівняння

$$\frac{d}{d\Omega} |\dot{S}(\Omega)|^2 = \frac{d}{d\Omega} \left| \sum_{i=1}^N \dot{S}_i(\Omega) \right|^2 = 0, \quad (2)$$

Тут $\dot{S}_i(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t) u_i(t) \exp(-j\Omega t) dt$ – спектральна щільність i -ї компоненти зваженої вибірки сигналу $u(t) = \sum_{i=1}^N U_i(t) \cos[\phi_i(t)]$, отриманого на симетричному часовому інтервалі $[-0,5T \dots 0,5T]$; $w(t)$ – ВФ, симетрична відносно середини вибірки сигналу; U_i – амплітуда i -ї компоненти сигналу.

Обмежуючись в розкладі квадратичним наближенням, отримаємо перший наближений розв’язок рівняння (2) та, відповідно, похибку:

$$\Delta x_1 = x_{\max 1} - x_1 \approx - \left\{ |\dot{S}(x_1)|^2 \right\}' / \left\{ |\dot{S}(x_1)|^2 \right\}'' \quad (3)$$

Перший наближений розв’язок для (3) можна привести до вигляду [3, 8]:

$$\Delta x_1 \approx \frac{-[\cos \Phi_{\Sigma} + S_n(x_1)/S_1(0)] S_n'(x_1)}{S_1''(0) + S_2''(x_1) S_n(x_1) / S_1(0) + \cos \Phi_{\Sigma} [S_1''(0) S_n(x_1) / S_1(0) + S_n''(x_1)]}, \quad (4)$$

де $\Phi_{\Sigma} = \Phi_n - \Phi_1$.

Друге наближення виразимо через перше наближення та поправочний коефіцієнт

$$\Delta x_2 \approx \Delta x_1 K_{\Delta}, \quad (5)$$

де

$$K_{\Delta} \approx \frac{S_n'(x_1)}{(\Delta x_1)^2 S_n'''(x_1)} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{2(\Delta x_1)^2 S_n'''(x_1)}{S_n'(x_1)}} \right\}. \quad (6)$$

Для ВФ Дольфа-Чебишева розв’язки (4), (5) та поправочний коефіцієнт (6) представлені відповідними виразами [2]:

$$\Delta x_{1q} \approx \frac{-[\cos \Phi_{\Sigma} + S_n(Q, x_1)] S_n'(Q, x_1)}{S_1''(Q, 0) + S_2''(Q, x_1) S_n(Q, x_1) + \cos \Phi_{\Sigma} [S_1''(Q, 0) S_n(Q, x_1) + S_n''(Q, x_1)]}, \quad (7)$$

$$K_{\Delta q} \approx \frac{S_n'(Q, x_1)}{(\Delta x_{1q})^2 S_n'''(Q, x_1)} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{2(\Delta x_{1q})^2 S_n'''(Q, x_1)}{S_n'(Q, x_1)}} \right\}, \quad (8)$$

де

$$S_n(Q, x_1) = \frac{A}{Q} chY; Y = \sqrt{L^2 - (x_n - x_1)^2 \pi^2};$$

$$L = \ln(Q + \sqrt{Q^2 - 1}); S'_n(Q, x_1) = \frac{-A\pi^2 shY}{Q Y};$$

$$S''_n(Q, x_1) = \frac{A\pi^2 \pi^2 (x_n - x_1)^2 Y chY - L^2 shY}{Q Y^3};$$

$$S'''_n(Q, x_1) = \frac{A\pi^4 (x_n - x_1) P shY + 3YL^2 chY}{Q Y^5};$$

$$S'_1(Q, 0) = \frac{-\pi^2 shL}{Q L};$$

$$P = \pi^2 (x_n - x_1)^4 - \pi^2 (x_n - x_1)^2 L^2 - 3L^2.$$

Формула, що визначає частоти, які оцінюються без похибки, приймає вигляд:

$$(x_n - x_1)_{TЧ} = \sqrt{N^2 + L^2 / \pi^2}, \quad (9)$$

де $N = 1, 2, 3, \dots$ – номер бічної пелюстки від'ємної області частот, екстремум якого співпадає з максимумом головної пелюстки додатної області частот або номер точки з нульовою похибкою оцінювання.

Максимальне значення похибки при $\cos(\Phi_n - \Phi_1) = \pm 1$ для ВФ Дольфа-Чебишева записується у наступному вигляді:

$$\Delta x_{1Ч \max} \approx \frac{(-1)^n S'_n(Q, x_1)}{S''_1(Q, 0) + (-1)^{n+1} S''_n(Q, x_1)}, \quad n = 1, 2, \quad (10)$$

$$\Delta x_{2Ч \max} \approx \Delta x_{1Ч \max} K_{\Delta Ч}. \quad (11)$$

На Рис.1 суцільною лінією та пунктиром показані залежності від відносної частоти нормованої помилки оцінювання, відповідно для (10), (11) та $n = 1, 2$ для $Q = 10$.

В зоні взаємодії головної пелюстки, що утворюють спектр від від'ємної області частот похибка оцінювання частот носить осцилюючий характер біля нульового значення із слабко затухаючою амплітудою коливань, на відміну від похибки, яку забезпечує ВФ Кайзера-Бесселя. Незначне затухання амплітуди осциляцій із зростанням частоти обумовлено лише монотонним зростанням ширини бічних пелюсток до 1.

Для оцінок похибок розв'язків (10), (11) в області нероздільних частот наведемо результати аналізу. Кількісні оцінки наведемо для рівня бічних пелюсток рівних, відповідно, 0,1; 0,01; 0,001 та 0,0001.

Величини інтервалів нероздільних частот $\Delta x_{роз}$ для вказаних рівнів бічних пелюсток ВФ Дольфа-Чебишева складають, відповідно, [0; 0,628], [0; 0,778], [0; 0,912], [0; 1,0304].

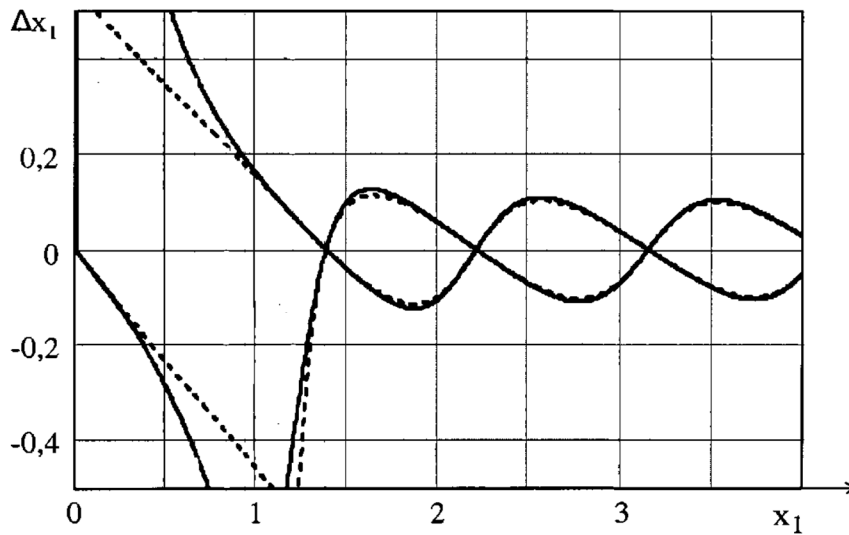


Рис. 1. Залежність максимальної похибки від різниці частот сигналу та завад при використанні ВФ Дольфа-Чебишева

Залежності помилок $\Delta x_{\text{пом}} / \Delta x_{\text{роз}}$, нормованих до величин інтервалів нероздільних частот $\Delta x_{\text{роз}}$, наведені на Рис. 2.

При різниці частот, що відповідають взаємодії основних пелюсток складових спектральної щільності, збільшення Q призводить до збільшення величини похибки лише на границі роздільної здатності частот складових спектральної щільності додатної та від'ємної областей згідно з (11) збільшуються незначно, що ілюструється Рис. 2.

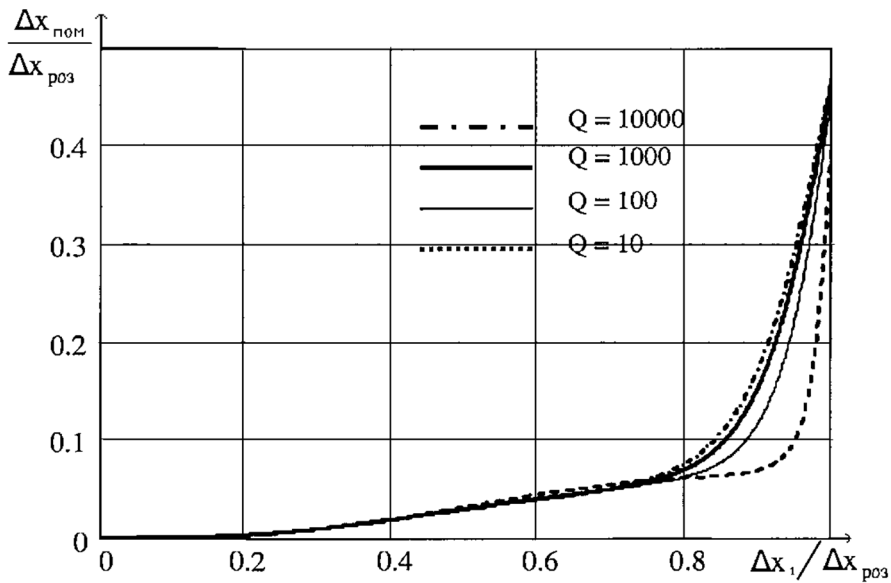


Рис. 2. Нормована залежність помилок похибки вимірювання від частоти, нормованої до інтервалу роздільної здатності, при використанні ВФ Дольфа-Чебишева

Збільшення помилок визначення похибок спостерігається лише поблизу границь інтервалів спостереження. Величини помилок складають, відповідно, 38%, 45%, 46,5%, 47%. При зменшенні різниці частот $(x_n - x_1)$ до $0,8\Delta x_{\text{роз}}$ помилка визначення похибки знижується до 8-9% і далі монотонно прямує до нуля.

Незначні помилки у визначенні похибки оцінювання частоти з використанням витонченого розв'язку дозволяють зробити висновок про достатню точність прийнятої апроксимації функцій $S(x_p)$ та $S(x_\Sigma)$.

Незначні розбіжності розв'язків (10) та (11) в інтервалі взаємодії головного пелюстка $S(x_p)$ з боковими пелюстками $S(x_\Sigma)$ дозволяють зробити висновок про можливість використання в даному інтервалі більш простого розв'язку (4) для визначення похибки оцінки частоти за положенням максимуму спектра сигналу.

Отже, були отримані співвідношення для похибки оцінювання частоти з використанням ВФ Дольфа-Чебишева, цікавих тим, що їх форма може змінюватись за допомогою одного параметра. Аналіз отриманих виразів та чисельні розрахунки показують, що залежність методичної похибки оцінювання частоти радіосигналу і залежність похибки оцінювання частоти радіосигналу від різниці частот сигналу та завади мають складний коливний характер з періодом та амплітудою коливання, що залежать від періоду та рівня бокових пелюстків в спектрі ВФ.

Література

1. Komarov I.V., Smolskiy S.M. Fundamentals of Short-Range FM Radar. Artech House Publishers; Norwood, MA, 2003. – 289 p.
2. Vossiek M., Heide P., Nalezinski M., Magori V. Novel FMCW radar system concept with adaptive compensation of phase errors // 26th EuMC. Prague. Czech Republic. – 1996. – P.135.
3. Иванов Ю.Е. О наивысшей точности спектрального оценивания гармонических сигналов дискретным преобразованием Фурье / Ю.Е. Иванов // Проблемы управления и информатики. – 1998. – № 2. – С. 102.
4. Паршин Б.В. Методическая погрешность дискретного преобразования Фурье при спектральном анализе сигналов / Б.В. Паршин // Техника средств связи. Серия "Техника проводной связи" – 1987. – № 3. – С. 109-113.
5. Хэррис Ф. Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье / Ф. Дж. Хэррис // ТИЭР. – 1978. – Т. 66, №1. – С. 60-96.
6. Weib M., Knochel R. Novel methods of measuring impurity levels in liquid tanks // IEEE MTT-S International microwave symposium digest. Vol. 3. – 1997.– P. 1651-1654.
7. Чмых М.К. Оптимальное измерение частоты сигналов фазовым методом / М.К. Чмых // Известия Вузов СССР . Радиоэлектроника. – 1981. – Т. XXIV. – № 7. – С. 91.
8. Езерский В.В. Весовая обработка сигналов частотного дальномера повышенной точности / В.В. Езерский // Межвуз. сб. науч. труд. "Обработка сложных сигналов с применением цифровых устройств и функциональной электроники". РГРТА. – 1996. – С. 56.
9. Stolle R., Schiek B. Precision ranging by phase processing of scalar homodyne FMCW raw data // 26th EuMC. Prague. Czech Republic. – 1996. – P.143.