УДК 621.396

Лесовой И. П., д.т.н.; **Одинцов Н. Н.,** к.т.н.; **Степанов Д. Н.,** к.т.н.
(Одесская национальная академия связи им. А.С. Попова)

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Лісовий І. П., Одінцов М. М., Степанов Д. М. Варіаційні методи аналізу напрямних систем з поперечним перерізом складної форми. Розглянуто окремий випадок застосування методу Рітца для визначеня власних функцій і власних значень мод у хвилегоні з поперечным перерізом хрестоподібної секторної форми.

Ключові слова: система напрямної передачі, варіаційний метод, хвилегін, метод Рітца

Лесовой И. П., Одинцов Н. Н., Степанов Д. Н. Вариационные методы анализа направляющих систем поперечного сечения сложной формы. Рассмотрен частный случай применения метода Ритца для определения собственных функций и собственных значений мод в волноводе с поперечным сечением крестообразной секторной формы.

Ключевые слова: направляющая система передачи, вариационный метод, волновод, метод Ритца

Lesovoy I. P., Odintsov N. N., Stepanov D. N. Variational methods for the analysis of waveguide with cross-section complex shape. A special case of the Ritz method application to determine the eigenfunctions and eigenvalues of the modes in the waveguide with a toothed quadrant cross section.

Keywords: waveguide, variational methods, Ritz method

Направляющие системы передачи (НСП), применяемые в настоящее время в многочисленных областях науки и техники, отличаются друг от друга как диапазоном передаваемых частот, так и конструкцией. При этом, в зависимости от диапазона частот, используемых в НСП, они условно делятся на НСП первого и второго рода.

К НСП *первого рода* относятся линии передачи (ЛП), по которым передаются электромагнитные волны с длиной, намного превышающей поперечные размеры самих ЛП. Примерами ЛП первого рода являются воздушные линии передачи (ВЛП) и кабельные линии передачи (КЛП): симметричные и коаксиальные. Для анализа условий распространения электромагнитных волн в ЛП первого рода пользуются уравнениями однородных линий (так называемые, телеграфные уравнения) [1]. Процессы, происходящие в них, характеризуют параметры передачи.

К ЛП *второго рода* принадлежат линии, по которым распространяются электромагнитные волны, соизмеримые либо меньше поперечных размеров таких ЛП. Типичными представителями ЛП второго рода являются, например, волноводные линии (ВЛ) и волоконно-оптические линии передачи (ВОЛП).

Электромагнитные процессы в ЛП второго рода оцениваются с помощью параметров, характеризующих электромагнитное поле, а именно: вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ и вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}$, которые определяются на основе решения дифференциального волнового уравнения [2]. При этом в случае НСП, имеющих форму поперечного сечения, границы которого совпадают с координатными поверхностями, волновое уравнение в декартовой системе координат сравнительно просто решается методом разделения переменных. Постоянные интегрирования дифференциального уравнения определяется путем наложения граничных условий на граничные поверхности ЛП [2]. В случае сложной формы сечения (Г-образной, Н-образной и др.) для решения волнового уравнения может использоваться, например, метод частичных областей [3].

Для анализа сложных волноводных систем применяют, также приближенные методы, такие как: метод БВК (Бриллюэна – Вентцеля – Крамерса) [3], метод присоединенных уравнений [3, 4] и др.

При исследовании ЛП, имеющих круглую цилиндрическую форму поперечного сечения (например, ВЛ и ВОЛП) решение волнового уравнения выражается через функции Бесселя [1, 2]. При этом в случае НСП, имеющих форму поперечного сечения в виде круга, существует строгое решение дифференциального волнового уравнения. Если границы поперечного сечения ЛП не в полной мере совпадают с координатными поверхностями цилиндрической круговой системы координат, строгого решения волнового уравнения не существует, т.к. возникает проблема при наложении граничных условий при определении постоянных интегрирования. При этом возникает необходимость использования приближенных методов решения волнового уравнения.

Одними из наиболее применяемых методов приближенного решения волнового дифференциального уравнения в данном случае представляются вариационные методы и, в частности, метод Ритца [5, 6]. Его достоинство перед другими методами заключается в сравнительной простоте, достаточной точности при малом числе приближений в общем решении, а также небольшом числе вычислительных операций. Пример применения вариационного метода Ритца для анализа распространения электромагнитных волн в волноводе, поперечное сечение которого представляет составную секторную форму (Рис. 1) рассмотрен в [7].

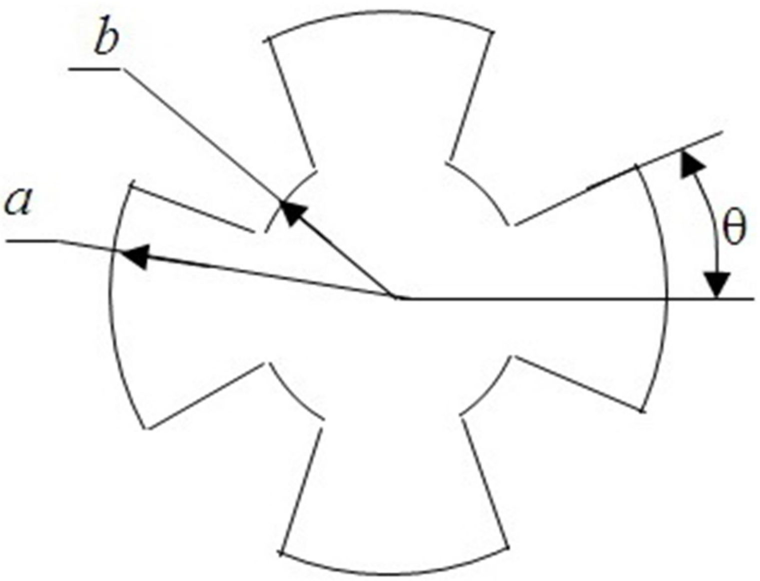

Рис. 1. К определению собственных значений мод

При этом точность определения собственных функций и собственных значений даже в случае первого приближения составляет не менее 90% и 94% соответственно.

Определение полей и нахождение собственных функций и собственных значений мод в волноводе с идеально проводящими стенками сводится к решению скалярного уравнения:

$$\Delta_{\perp} \cdot \psi + \varkappa^2 \cdot \psi = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

с краевыми условиями для волн квази – H_{mn}

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial n}\right|_L = 0, \qquad \textbf{(2)}$$

и для волн квази – E_{mn}

$$\psi\big|_L = 0, \qquad \textbf{(3)}$$

где $\Delta_{\perp}$ – двухмерный (поперечный) оператор Лапласа;

ψ – собственная функций соответствующей моды, представляющая продольную компонента вектора Герца, связанная с продольными полями соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} H_z &= \varkappa_1^2 \cdot \psi \\ E_z &= \varkappa_2^2 \cdot \psi \end{aligned}\right\}, \qquad \textbf{(4)}$$

где $\varkappa_1$ – собственное значение мод квази – H_{mn};

$\varkappa_2$ – собственное значение мод квази – E_{mn}.

Собственные значения мод определяются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_1^2 &= k^2 - \beta_1^2 \\ \varkappa_2^2 &= k^2 - \beta_2^2 \end{aligned}\right\}, \qquad \textbf{(5)}$$

где k – волновое число в свободном пространстве;

β_1 и β_2 – фазовые постоянные мод квази – H_{mn} и квази – E_{mn}, соответственно.

Согласно методу Ритца [5] приближенное решение уравнения (1) при соответствующих граничных условиях (2), (3) находится в виде:

$$\psi_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot u_i\,. \qquad \textbf{(6)}$$

Последовательность достаточно гладких координатных функций u_i должна быть полной линейно-независимой системой.

Коэффициенты a_i в решении (6) выбираются исходя из минимума функционала:

$$\varkappa^2 = \iint_S \left(grad_{\perp}\psi\right)^2 ds = \iint_S \left(\nabla_{\perp}\psi\right)^2 ds\,. \qquad \textbf{(7)}$$

Таким образом, при условии $\iint_S \psi_{mn}^2 = 1$ задача сводится к нахождению минимума функции n переменных:

$$\left(\nabla_{\perp}\psi_{n}\cdot\nabla_{\perp}\psi_{n}\right)=\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n}\left(\nabla_{\perp}u_{i}\cdot\nabla_{\perp}u_{j}\right)a_{i}\,a_{j}\ ,$$

связанных уравнением:

$$\left(\psi_{n}\cdot\psi_{n}\right)=\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n}\left(u_{i}\cdot u_{j}\right)a_{i}\,a_{j}=1,$$

где круглые скобки означают скалярное произведение функций.

В случае если волновод не ограничен идеально проводящей поверхностью, а, например, диэлектрической оболочкой, в качестве граничного условия будет служить условие непрерывности тангенциальных составляющих напряженностей полей на границе раздела двух сред. При этом необходимо решать уравнение (1) как для волновода, так и для оболочки. В случае, когда сам волновод является диэлектрическим, как в оптическом волокне (ОВ), то под волновым числом k в соотношении (5) следует понимать волновое число диэлектрика – сердцевины ОВ.

Функции u_i в соответствии с методом Ритца не обязаны удовлетворять естественному краевому условию (2), (3). Однако для улучшения сходимости метода желательно выбирать их хотя бы частично удовлетворяющим условиям (2), (3) на части контура L поперечного сечения НСП.

Для решения задачи определения собственных функций ψ и собственных значений $\varkappa$ мод, первое приближение к собственной функции любой моды в цилиндрической круговой системе координат можно представить в виде:

$$\psi_{mn}=a_{mn}J_{m}\left(v_{mn}\ r/a\right)\left(\cos m\varphi-\sin m\varphi\right),$$

где $J_m\left(x\right)$ – функция Бесселя первого рода, порядка m;

v_{mn} – n-корень уравнения $J_m\left(x\right)=0$;

a – радиус ЛП; r, φ – текущие координаты.

Обобщенное выражение собственного значения $\varkappa$ любой моды можно представить в виде:

$$\varkappa_{mn}=\frac{\sqrt{\left(\nabla\psi_{mn}\cdot\nabla\psi_{mn}\right)}}{\left(\psi_{mn}\cdot\psi_{mn}\right)},$$

где круглые скобки означают скалярное произведение.

При этом в цилиндрической системе координат выражение для собственного значения моды ЛП сложной формы поперечного сечения определится соотношением:

$$\varkappa_{mn}=\frac{v_{mn}}{a}\left[\frac{\mu^{2}\left(2\pi-8\Theta\right)\cdot\frac{1}{2}Q_{mn}\left(v_{mn}\mu\right)+4\Theta Q_{mn}\left(v_{mn}\right)}{\mu^{2}\left(2\pi-8\Theta\right)\cdot P_{mn}\left(v_{mn}\mu\right)+8\Theta P_{mn}\left(v_{mn}\right)}\right]^{\frac{1}{2}},$$

Нормированные в соответствии с условием (7) коэффициенты a_{mn} определяются выражением:

$$a = \frac{\sqrt{2}}{a\left[\mu^2\left(2\pi - 8\Theta\right)P_{mn}\left(v_{mn}\mu\right) + 8\Theta P_{mn}\left(v_{mn}\right)\right]^{\frac{1}{2}}},$$

где введенные функции $Q_{mn}\left(v_{mn}\mu\right)$ и $P_{mn}\left(v_{mn}\mu\right)$ связаны с бесселевыми функциями соотношениями:

$$Q_{mn}\left(v_{mn}\mu\right) = \left[J^2_{(m-1)}\left(v_{mn}\mu\right) - J_{m-2}\left(v_{mn}\mu\right)J_m\left(v_{mn}\mu\right) + J^2_{(m+1)}\left(v_{mn}\mu\right) - J_m\left(v_{mn}\mu\right)\cdot J_{m+1}\left(v_{mn}\mu\right)\right],$$

$$P_{mn}\left(v_{mn}\mu\right) = \left[J^2_m\left(v_{mn}\mu\right) - J_{m-1}\left(v_{mn}\mu\right)J_{m+1}\left(v_{mn}\mu\right)\right],$$

где μ – параметр, характеризующий форму поперечного сечения ЛП. Для крестообразной секторной формы, например, $\mu = \frac{b}{a}$ (Рис. 1).

На Рис. 2, приведены графики зависимости функций P_{0n} и $\frac{1}{2}Q_{0n}$ от аргумента μ.

Таким образом, приведенная в работе методика применения вариационного метода Ритца для определения собственных функций и собственных значений мод применима к анализу НСП, имеющих поперечное сечение сложной формы.

Развитый здесь метод применим также к составным секторным волноводам, с другим числом секторов и может применяться для анализа НСП, имеющих иную форму.

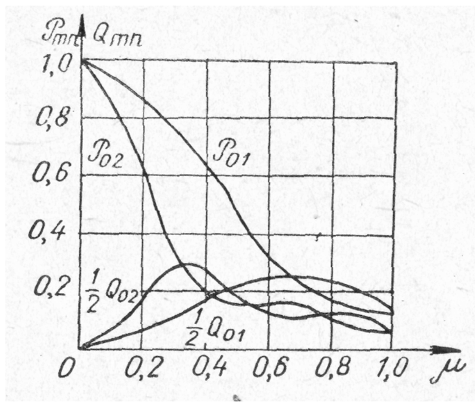

Рис. 2. Функции $Q_{mn}\left(v_{mn}\mu\right)$, $P_{mn}\left(v_{mn}\mu\right)$

Литература

1. Гроднев И. И. Линии связи / И. И. Гроднев, С. М. Верник. – М.: Радио и связь, 1988. – 544 с.

2. Машковцев Б. М. Теория волноводов / Б. М. Машковцев, К. Н. Цибизов, Б. Ф. Емемен. – М. – Л.: Наука, 1966. – 256 с.

3. Коган Л. Н. Сложные волноводные системы / Л. Н. Коган, Б. М. Машковцев, К. Н. Цибизов. – Л.: Судпромгиз, 1963. – 355 с.

4. Демидович Б. П. Численные методы анализа / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова . – М.: Наука, 1967. – 368 с.

5. Михлин С. Г. Прямые методы в математической физике / С. Г. Михлин. – М. – Л.: Гиттл, 1950. – 428 с.

6. Краснов М. Л. Вариационное исчисление / М. Л. Краснов, Г. И. Макаренко, А. И. Киселев. – М.: Наука, 1973. – 192 с.

7. Макаров Т. В. Волны квази-H_{0r} и квази-H_{12} в крестообразном волноводе / Т. В. Макаров, Н. Н. Одинцов // Антенны. – М.: Связь, 1973. – С. 129-136.