УДК 621.391

Лещенко О. О., к.т.н. *(Державний університет телекомунікацій)*
Майсак Т. В., к.т.н. *(Київський національний економічний університет ім. В. Гетьмана)*

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ОПТИМІЗАЦІЇ В СИСТЕМАХ УПРАВЛІННЯ СУЧАСНИМИ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИМИ МЕРЕЖАМИ

Лещенко О. О., Майсак Т. В. Застосування методів оптимізації в системах управління сучасними телекомунікаційними мережами. Розглянуто основні методи оптимізації системи управління сучасними телекомунікаційними мережами. Показано, що сучасний стан розвитку мереж визначаэться такими характеристиками: неоднорідністю, необхідністю в управлінні, підвищеними вимогами до надійності, створенням глобальної інформаційної інфраструктури. Обґрунтовано удосконалення методів оптимізації основних показників і чинників телекомунікаційної мережі. Дані методи являються засобами прийняття ефективних управляючих рішень. Велике число розроблених методів говорить про складність вирішення оптимізаційних задач, чим вони відрізняються від інших порівняно простих алгоритмів, наприклад, статистичних методів аналізу даних. Представлено мінімізацію критерію якості системи управління методами другого порядку. Наведено основні переваги та недоліки еталонного метода мінімізації – метода Ньютона. Приведені основні розрахункові співвідношення оптимізації системи управління за двома керуючими параметрами.

Ключові слова: система управління, телекомунікаційна мережа, критерій якості, керуючий параметр, еталонний метод мінімізації, метод Ньютона, методи оптимізації

Лещенко О. А., Майсак Т. В. Применение методов оптимизации в системах управления современными телекоммуникационными сетями. Рассмотрены основные методы оптимизации системы управления современными телекоммуникационными сетями. Показано, что современное состояние развития сетей определяется такими характеристиками: неоднородностью, необходимостью в управлении, повышенными требованиями к надежности, созданием глобальной информационной инфраструктуры. Обоснованно усовершенствование методов оптимизации основных показателей и факторов телекоммуникационной сети. Данные методы являются средствами принятия эффективных управляющих решений. Большое число разработанных методов говорит о сложности решения оптимизационных задач, чем они отличаются от других сравнительно простых алгоритмов, например, статистических методов анализа данных. Представлена минимизация критерия качества системы управления методами второго порядка. Приведены основные преимущества и недостатки эталонного метода минимизации – метода Ньютона. Приведены основные расчетные соотношения оптимизации системы управления за двумя управляющими параметрами.

Ключевые слова: система управления, телекоммуникационная сеть, критерий качества, управляющий параметр, эталонный метод минимизации, метод Ньютона, методы оптимизации

Leshchenko O. O., Maisak T. V. Use methods of optimization methods in control systems of modern telecommunication networks. The basic methods for optimizing management of modern telecommunication networks are considered. There is determined, that the current state of development of networks defined by the following characteristics: heterogeneity, the need to manage, high demands on reliability, the creation of a global information infrastructure. The improved methods of optimization of key parameters and factors telecommunication network is grounded. These methods are effective means of decision making control. A large number of developed methods indicates the complexity of solving optimization problems, how they differ from other relatively simple algorithms, such as statistical data analysis techniques. Minimizing of the quality criterium management methods of the second order is submitted. The basic advantages and disadvantages of standard minimization method – Newton's method. Shown The main settlement value optimization control system with two control parameters are shown.

Keywords: system administration, telecommunications network, quality criterium, control parameter, standard minimization method, Newton's method, optimization techniques

Вступ. Телекомунікаційна галузь є динамічною галуззю не тільки в Україні, але і в усьому світі. В останні роки в нашій країні має місце не тільки кількісний, але і якісний розвиток телекомунікацій.

Сучасний стан розвитку мереж та послуг телекомунікацій визначається низкою характеристик, а саме:

- неоднорідністю інфокомунікаційних мереж як за структурою, так і за технічними засобами, що використовуються на цих мережах;
- зміною пріоритетів в управлінні телекомунікаційними мережами;
- потребою в управлінні взаємодією інфокомунікаційних мереж різних операторів;
- підвищенням вимог до надійності телекомунікацій. Одним із напрямків забезпечення підвищення надійності є ефективне управління ресурсами інфокомунікаційних мереж;
- створенням глобальної інформаційної інфраструктури, основою якої є телекомунікаційні мережі;
- збільшенням попиту на різноманітні високоякісні послуги телекомунікацій;
- потребою у координації діяльності споживачів та постачальників послуг телекомунікацій;
- необхідністю усунення суперечності між соціальною та індивідуальною потребою в інформації, яка полягає у тому, що з ростом рівня інформатизації зростає соціальна потреба в ній, але при цьому, починаючи з деякого рівня, потреба у зростанні спілкування знижується [1].

У сфері телекомунікацій усіх розвинених країн зараз активно йде процес створення мультисервісної мережі наступного покоління. Звичайний телефонний зв'язок, стільниковий зв'язок, величезні ресурси мережі Інтернет, IP-телефонія, кабельне телебачення (домашнє відео за замовленням) – усе це повинно бути об'єднане у єдину мережну архітектуру. Проблема оптимального управління в даний час займає центральне місце в теоретичних дослідженнях зі створення системи управління інфокомунікаційною мережею [2…4].

Мета статті та постановка задач дослідження. Для реалізації процесів управління в сучасних системах зв’язку існує розподілена система моніторингу, що забезпечує збір інформації про стан мережних елементів, стан трафіку, рівень надання послуг і стан мережних ресурсів. Ця інформація надходить в центр управління або безпосередньо на пристрої управління для вирішення наступних завдань: перерозподілу ресурсів, реструктуризації мережі, зміни режимів мережних елементів. Відмічається постійна тенденція до залучення оптимальних методів для вирішення тих або інших завдань управління. Тому завдання пошуку нових методів оптимального управління, здатних ефективно функціонувати в складних нестаціонарних ситуаціях, впровадження їх в практику телекомунікаційних технологій є актуальною науковою задачею.

Метою роботи є розробка ефективних методів для вирішення проблем ефективного управління інфокомунікаційною мережею.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні задачі:

1) Розглянути математичний апарат та специфіку основних методів оптимізації;

2) Провести порівняльний аналіз запропонованого методу з іншими, щодо обчислювальної складності та швидкодії.

Обґрунтування способів дослідження телекомунікаційних мереж. Кількість інформації в сучасних телекомунікаційних мережах різко зростає, разом із зростанням об’ємів надання послуг, внаслідок чого система управління майже поглинає основну мережу. Для стійкого функціонування інфокомунікаційних мереж, оперативного і якісного надання послуг, забезпечення надійності елементів мереж і відповідних функцій, інфокомунікаційні системи потребують удосконалення методів оптимізації основних показників і чинників мережі в умовах її еволюції.

Задачі управління реалізуються двома підсистемами:

– спостереження станів мережних елементів і всієї мережі н цілому, одержання статистичних даних, їх обробка і подання;
– власне управління як реакція системи на результати отриманого спостереження [5].

Схематично математична модель СУ найчастіше подають у вигляді "чорного ящика" (Рис.1), під яким розуміється об'єкт, який має входи і виходи. Назва "чорний ящик" підкреслює повну або часткову відсутність інформації про внутрішню структуру об'єкта дослідження, про суть явищ, які відбуваються в ньому і приховані від дослідника.

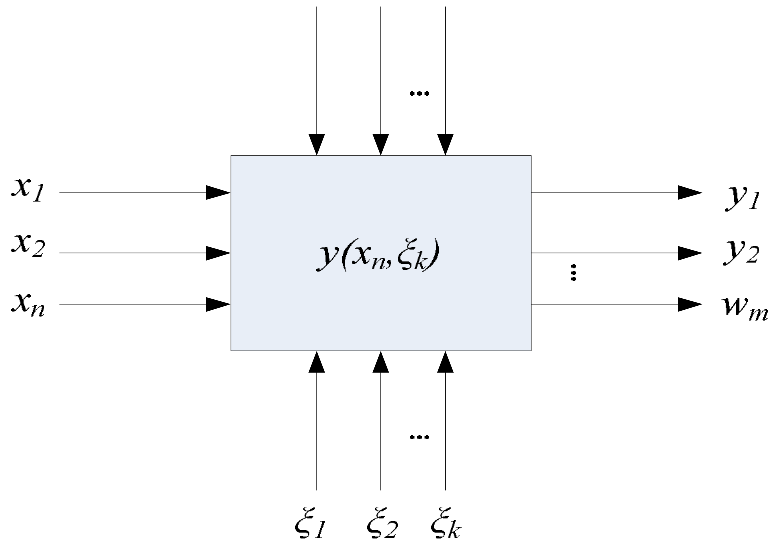

Рис. 1. Принципова схема "чорного ящика"

Об'єкт управління характеризується вектором стану $\overline{x} = (x_1,\ x_2,...,x_n)$, складові якого можуть мати різну природу та сутність. До об'єкту управління прикладені керуючі впливи, які зображуються вектором $\overline{u} = (u_1,u_2,...,u_m)$ і збурення $\overline{\xi} = (\xi_1,\xi_2,...,\xi_k)$. Керуючі впливи - це впливи що змінюються для досягнення мети управління.

Дослідник може тільки спостерігати вхідні параметри $(x_1,\ x_2,...,x_n)$, частина яких є керованими, а частина – некерованими, і вихідні $(y_1,y_2,...,y_m)$, які показують реакцію об'єкта на дію.

Загальний вигляд математичної моделі "чорного ящика" або математичної форми функції відгуку:

$$y = f(x,u). \qquad \textbf{(1)}$$

Оптимальна система управління визначається як система управління, яка мінімізує заданий критерій якості для даного динамічного процесу при заданих обмеженнях. Обмеження можуть полягати в тому, що система управління повинна бути лінійною або повинна мати яку-небудь певну структуру елементів і т.д. Типові зміни в математичній моделі виникають при настроюванні вагових коефіцієнтів у критерії якості, яка може знадобитися за умовами задачі. Вибір параметрів, які мінімізують критерій якості є оптимізацією параметрів та полягає у виборі структури й характеристик елементів системи, що забезпечують мінімізацію критерію якості цільової функції.

Одним з визначальних критеріїв побудови оптимальної системи управління є розв'язання задачі мінімізації. Необхідно визначити таку мінімальну кількість інформації, яка необхідна для виконання функцій управління із заданою точністю параметрів [6].

Для розв'язку задач оптимізації необхідно вирішити наступні задачі:

1. Сформулювати критерії ефективності роботи мережі. Найчастіше такими критеріями служать продуктивність і надійність, для яких у свою чергу потрібно вибрати конкретні показники оцінки, наприклад, час реакції й коефіцієнт готовності, відповідно.

2. Визначити множину варійованих параметрів мережі, прямо або, що побічно впливають на критерії ефективності. Усі варійовані параметри можуть бути згруповані різним образом. Наприклад, параметри окремих конкретних протоколів (максимальний розмір кадра протоколу Ethernet або розмір вікна непідтверджених пакетів протоколу TCP) або параметри обладнань (розмір адресної таблиці або швидкість фільтрації моста, пропускна здатність внутрішньої шини маршрутизатора). Параметрами настроювання можуть бути й обладнання, і протоколи в цілому. Так, наприклад, поліпшити роботу мережі з повільними й зашумленими глобальними каналами зв'язку можна, перейшовши зі стеку протоколів IPX/SPX на протоколи TCP/IP.

3. Визначити поріг чутливості для значень критерію ефективності. Так, продуктивність мережі можна оцінювати логічними значеннями "Працює / Не працює", і тоді оптимізація зводиться до діагностики несправностей і приведенню мережі в будь-який працездатний стан.

Як правило, під оптимізацією мережі розуміють деякий проміжний варіант, при якому потрібно вибрати такі значення параметрів мережі, щоб показники її ефективності суттєво покращилися, наприклад, користувачі одержували відповіді на свої запити до сервера баз даних не за 10 секунд, а за 3 секунди, а передача файлу на вилучений комп'ютер виконувалася не за 2 хвилини, а за 30 секунд.

Розглянемо задачі деяких вказаних типів телекомунікаційних проблем, які можна сформулювати у вигляді вказаних типів задач оптимізації:

1. В модемах важливими параметрами є відхилення $x_i\left(i=1,2,3\right)$ амплітудних, фазових і частотних характеристик (АФЧХ) від їх норм. Тому для задач типів 1–3 в якості цільових функцій $f(x)$ доцільно розглядати ймовірності $P=f\left(x_i\right)$ або $P=f\left(\overline{x}\right)$, або $P=f\left(\left\|\overline{x}\right\|\right)$ з відповідними обмеженнями на змінні.

2. При дослідженні залежності величини затримки інформації в мережі з комутацією пакетів від кількості вузлів комутації x_1, продуктивності вузлів x_2, їх вартості x_3 цільовою функцією може бути

$$f\left(\overline{x}\right)=\alpha_1 x_1+\frac{\alpha_2}{x_2}+\frac{\alpha_3}{x_3}\ . \qquad \textbf{(2)}$$

3. Імовірність похибки передачі інформації в мережі є квадратичною функцією відносно відношення енергії сигналу до спектральної потужності шуму (тип 4, Табл. 1).

4. Цільовою функцією задачі залежності від вартості обладнання вузла комутації, продуктивності цього вузла є кусково-гладка нелінійна функція, тобто типу 6, Табл. 1.

Крім вказаних у таблиці ознак класифікації оптимізаційних задач слід враховувати ще розмірність. Від розмірності залежить, скільки пам'яті і обчислень потрібно для пошуку розв'язку тим або іншим методом.

Класифікація оптимізаційних задач **Табл. 1**

N	Типи $f(x)$	Типи $c_i(x)$
1.	Функція однієї змінної	Обмеження відсутні
2.	Лінійна функція	Обмеження на змінні
3.	Сума квадратів лінійних функцій	Обмеження на змінні
4.	Квадратична форма	Лінійні функції
5.	Сума квадратів нелінійних функцій	Лінійні функції з особливою (розрідженою) матрицею коефіцієнтів
6.	Гладка нелінійна функція	Гладкі нелінійні функції
7.	Нелінійна функція з розрідженою матрицею Гессе (другої похідної)	Гладкі нелінійні функції з розрідженою матрицею Якобі
8.	Негладка нелінійна функція	Негладкі нелінійні функції

При виборі алгоритмів розв'язування задач оптимізації важливу роль відіграє доступність похідних. Коли говорять про доступність похідних першого і другого порядків цільової функції, то мають на увазі не тільки можливість побудови процедури розрахунку їх точних значень, але й трудомісткість цієї процедури.

Найважливішою властивістю градієнта є те, що він вказує напрямок найбільшого зростання функції. Отже, напрямок зворотний градієнту вказує на найбільше убування функції. Цим і пояснюється його широке використання в алгоритмах оптимізації.

Існує багато оптимізаційних алгоритмів чисельного пошуку оптимуму, які використовують стандартні форми представлення задач. Зокрема, універсальною придатною для більшості практичних задач є така форма: NCP знайти $\min\limits_{x \in R^n} f(x)$ при обмеженнях $c_i(x) = 0,\ i = \overline{1,l};\ c_i(x) \ge 0,\ i = \overline{l+1,l+k}.$ Цільова функція $f(x)$ і функції обмежень $c_i(x)$ – дійснозначні, скалярні [6].

Алгоритм цього методу історично є першим методом із методів, заснованих на квадратичній апроксимації мінімізуємої функції f. Ця апроксимація, залишаючись достатньо простою, точнішою у порівнянні з лінійною, що використовується в класичному методі найшвидшого спуску. На основі цієї апроксимації будуються ефективні алгоритми.

Висока швидкість локальної збіжності методу Ньютона робить його дуже корисним алгоритмом безумовної мінімізації. Використання похідних другого порядку дозволяє контролювати достатні умови оптимальності.

Отже, метод Ньютона вважається еталоном, з яким потрібно порівнювати інші алгоритми.

Метод Ньютона має і недоліки: він може відмовити або погано працювати, якщо квадратичні наближення функції f будуть невірно описувати зміну f поза малими околами опорних точок x_k. Також серед спеціалістів немає згоди відносно використання локальної квадратичної апроксимації f у випадку знаконевизначеності матриці Гессе G_k. Є багато схем організації спуску. Усі схеми, що відхиляються певним чином від ньютонівського напряму, прийнято називати модифікованими методами Ньютона.

Метод Ньютона полягає в необхідності знайти такий вектор x^* з безлічі допустимих рішень, якому відповідає мінімальне значення цільової функції на безлічі припустимих рішень $X \subseteq R^n$, серед елементів якого здійснюється пошук $f\left(x^*\right) = \min_{x \in X} f\left(x\right)$.

Оскільки методи використовують значення похідних, передбачається, що $f(x)$, $\nabla f(x)$, $\nabla^2 f(x)$ – існують і неперервні. Якщо неможливо знайти похідні або цей процес надто трудомісткий, то використання методу Ньютона є неефективним або й неможливим – це один з показників, що завжди враховується при виборі алгоритму мінімізації [7].

Нехай дана функція $f\left(x\right)$, обмежена знизу на множині R^n і має неперервні частинні похідні у всіх його точках (Рис. 2). Потрібно знайти локальний мінімум функції $f\left(x\right)$ на безлічі припустимих рішень $X = R^n$, тобто знайти таку точку $x^* \in R^n$, що

$$f\left(x^*\right) = \min_{x \in R^n} f\left(x\right), \quad f\left(x\right) \in C^2 \ . \tag{3}$$

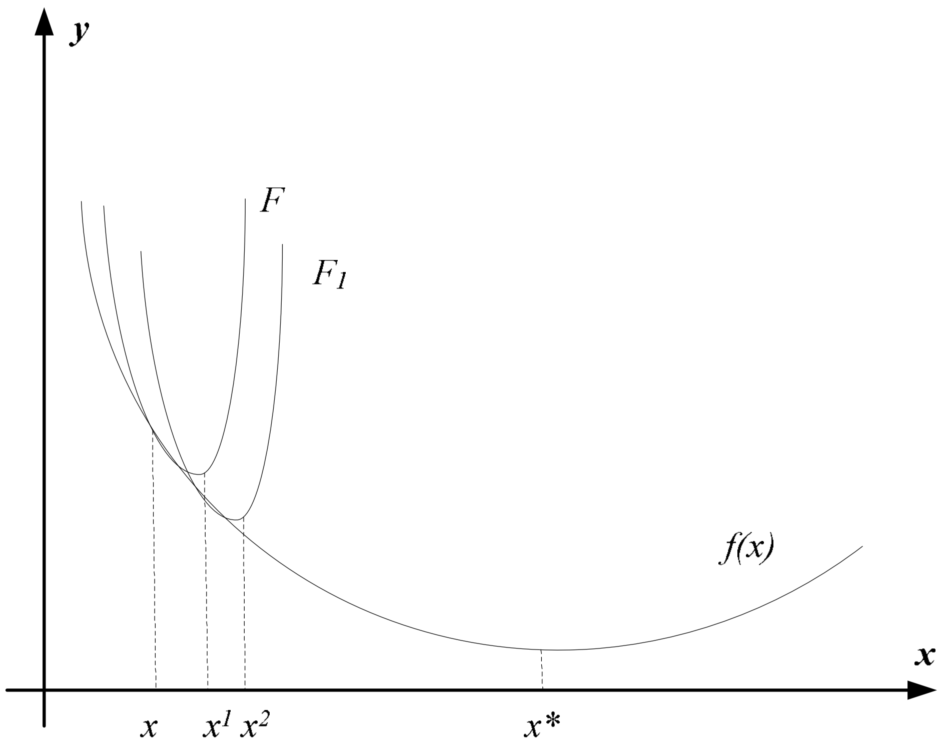

Рис. 2. Знаходження мінімуму методом Ньютона

Стратегія методу Ньютона полягає в побудові послідовності точок $\left\{x^k\right\}$, $k = 0,1,\ldots$, таких, що $f\left(x^{k+1}\right) < f\left(x^k\right)$, $k = 0,1,\ldots$. Точки послідовності обчислюються за правилом:

$$x^{k+1} = x^k + d^k, \ k = 0,1,\ldots, \tag{4}$$

де x^0 – задається дослідником, а напрямок спуску d^k визначається для кожного значення k за формулою:

$$d^k = -G^{-1}\left(x^k\right)\nabla f\left(x^k\right). \quad \textbf{(5)}$$

Вибір d^k за формулою (5) гарантує виконання вимоги $f\left(x^{k+1}\right) < f\left(x^k\right)$ за умови, що $G\left(x^k\right) > 0$ [8].

Побудова послідовності $\left\{x^k\right\}$ закінчується в точці x^k, для якої $\left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\| < \varepsilon_1$, де ε_1 - задане мале додатне число, або при $k \geq M$ (M - граничне число ітерацій), або при двократному одночасному виконанні двох нерівностей $\left\|x^{k+1} - x^k\right\| < \varepsilon_2$, $\left|f\left(x^{k+1}\right) - f\left(x^k\right)\right| < \varepsilon_2$, де ε_2 - мале додатне число. Питання про те, чи може точка x^k розглядатися як знайдене наближення шуканої точки мінімуму, вирішується шляхом проведення додаткового дослідження, яке описано нижче.

Основні результати досліджень. Нехай цільова функція, що описує роботу інфокомунікаційної мережі та залежить від ймовірності помилки x_1 та затримки управляючого сигналу x_2 має вигляд:

$$f\left(x\right) = 2x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2. \quad \textbf{(6)}$$

Щоб знайти локальний мінімум функції потрібно:

I. *Визначення точки* x^k, в якій виконується принаймні один критерій закінчення розрахунків.

1. Поставимо x^0, ε_1, ε_2, M: $x^0 = \left(0{,}5;1\right)^T$; $\varepsilon_1 = 0{,}1$; $\varepsilon_2 = 0{,}15$; $M = 10$. Знайдемо градієнт функції $\nabla f\left(x^k\right) = \left(4x_1 + x_2; x_1 + 2x_2\right)^T$ і матрицю Гессе $G\left(x\right) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Покладемо $k = 0$.

3^0. Обчислимо $\nabla f\left(x^0\right)$: $\nabla f\left(x^0\right) = \left(3; 2{,}5\right)^T$.

4^0. Перевіримо виконання умови $\left\|\nabla f\left(x^0\right)\right\| \leq \varepsilon_1$: $\left\|\nabla f\left(x^0\right)\right\| = 3{,}9 > 0{,}1$. Переходимо до кроку 5.

5^0. Перевіримо виконання умови $k \geq M$: $k = 0 < 10$. Переходимо до кроку 6.

6^0. Обчислимо $G\left(x^0\right)$: $G\left(x^0\right) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7^0. Обчислимо $G^{-1}\left(x^0\right)$: $G^{-1}\left(x^0\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$.

8^0. Перевіримо виконання умови $G^{-1}\left(x^0\right) > 0$. Оскільки $\Delta_1 = \frac{2}{7} > 0$, $\Delta_2 = \frac{1}{7} > 0$, то згідно критерію Сільвестра $G^{-1}\left(x^0\right) > 0$.

9^0. Визначимо $d_0 = -G^{-1}\left(x^0\right)\nabla f\left(x^0\right) = -\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$.

10^0. Обчислимо $x^1 = \left(\frac{1}{2},1\right)^T + \left(-\frac{1}{2},-1\right)^T = \left(0,0\right)^T$.

11^0. Перевіримо виконання умов $\left\|x^1 - x^0\right\| < \varepsilon_2$, $\left|f\left(x^1\right) - f\left(x^0\right)\right| < \varepsilon_2$:

$\left\|x^1 - x^0\right\| = 1,12 > 0,15$; $\left|f\left(x^1\right) - f\left(x^0\right)\right| = 2 > 0,15$.

Вважаємо $k = 1$, переходимо до кроку 3.

3^1. Обчислимо $\nabla f\left(x^1\right)$: $\nabla f\left(x^1\right) = \left(0,0\right)^T$.

4^1. Перевіримо виконання умови $\left\|\nabla f\left(x^1\right)\right\| < \varepsilon_1$; $\left\|\nabla f\left(x^1\right)\right\| = 0 < 0,1$. Розрахунок закінчено.

Зауважимо, що в точці x^1 виконується необхідна умова першого порядку, тому вона є стаціонарною точкою.

II. *Аналіз точки* x^1. Функція $f\left(x\right) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ є строго випуклою, оскільки її матриця других похідних $H = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} > 0$ в силу того, що $\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = 7 > 0$. Знайдена точка $x^1 = \left(0,0\right)^T$ – точка локального та одночасно глобального мінімуму $f\left(x\right)$ (Рис. 3).

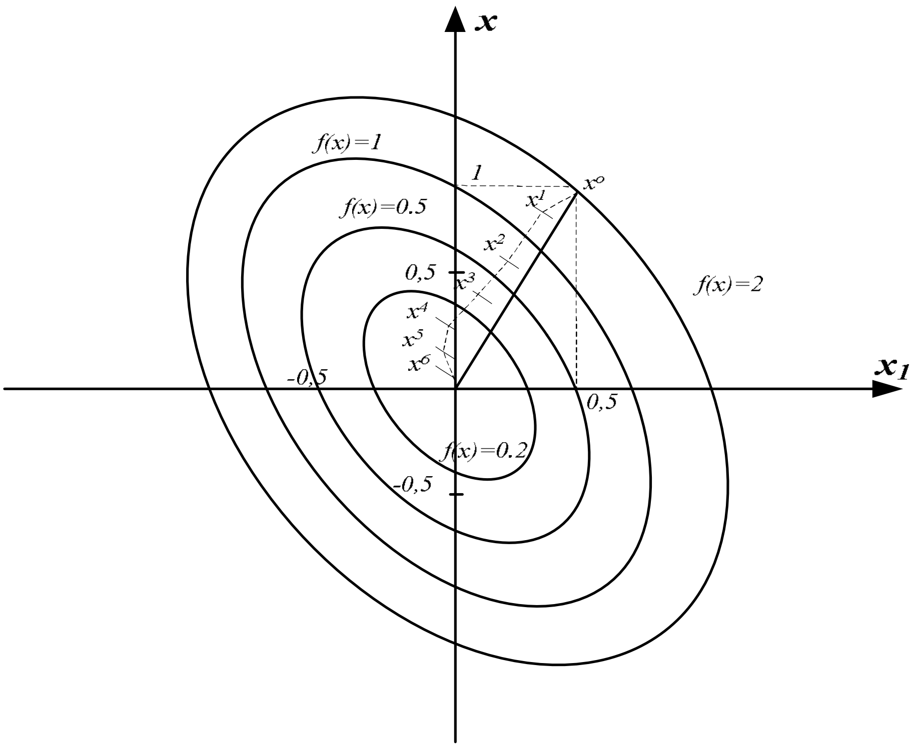

Рис. 3. Траєкторія спуску функції $f\left(x\right) = 2x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$

Коли матриця Гессе $\nabla^2 f(x^{(k)})$ додатно визначена в точці, ця умова виконується, отже, напрям пошуку по методу Ньютона виявляється напрямом спуску. Якщо в деякій точці $\nabla^2 f(x^{(k)})$ від'ємно визначена, то даний напрям є напрямом підйому. В разі невизначеності матриці Гессе не можна зробити однозначний висновок, тобто пара власних значень має протилежні знаки, квадратична апроксимація є сідлом, що не має локального мінімуму. В цьому випадку рух напряму пошуку по методу Ньютона приведе до сідлової точки.

Висновок. За результатами порівняльного аналізу основних методів оптимізації можна зробити висновок, що метод Ньютона, який вважається еталонним, дозволяє оптимальні значення керуючих параметрів в процесі управління сучасними телекомунікаційними мережами. Для розв'язку потрібно врахувати структуру градієнта функції та матриці Гессе. Висока швидкість локальної збіжності методу Ньютона робить його широко застосовуваним алгоритмом мінімізації. Дані результати можуть бути застосовані при розробці автоматизованих систем управління телекомунікаційними мережами.

Література

1. Global information infrastructure, internet protocol aspects and Next Generation Networks – future networks. Future Networks: Objectives and Design Goals // Recommendation ITU-T Y.3001 (2011).

2. Математичні основи теорії телекомунікаційних систем / [В. В. Поповський, С. О. Сабурова, В. Ф. Олійник та ін.] ; за заг. ред. В. В. Поповського. – Харків: ТОВ «Компанія СМІТ», 2006. – 564 с.

3. Телекомуникационные системы и сети: учебное пособие. В 3 томах. Том 3. – Мультисервисные сети / [В. В. Величко, Е. А. Субботин, В. П. Шувалов, А. Ф. Ярославцев] ; под ред. В. П. Шувалова. – М.: Горячая линия – Телеком, 2005. – 592 с.

4. Стелов В. К. Сучасні системи управління в телекомунікаціях / В. К. Стеклов, Б. Я. Костік, Л. Н. Беркман ; за заг. ред. В.К. Стеклова. – К.: Техніка, 2005. – 400 с.

5. Лещенко О. О. Оптимальні методи управління інфокомунікаційними мережами / О. О. Лещенко // Матеріали IX науково-методичної конференції ДУІКТ «Сучасні тенденції розвитку технологій в інфокомунікаціях та освіті». Київ, 22-23 листопада 2012. – С.150.

6. Лещенко О. О., Майсак Т. В. Особливості розвитку інфокомунікаційних мереж / О. О. Лещенко, Т. В. Майсак // Збірник тез VII Міжнародної науково-технічної конференції "Сучасні інформаційно-комунікаційні технології COMSNFO'2011 - Livadia". АР КРИМ, Ялта – Лівадія. 3-7 жовтня 2011. – С. 116-117.

7. Гилл Ф. Практическая оптимизация / Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт ; пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 509с.

8. Hoffman K.L. A method for globally minimizing concave functions over convex sets. - Math. Prog., 1981, 20, № 4, 22-32.