

УДК 621.391.083.92

Рогоза В. С., докт. техн. наук, професор

Сергеев-Горчинский А. А., аспирант (Тел.: +380 68 810 04 28. E-mail : alexey.horchynskiy@yahoo.com)

(Інститут прикладного системного аналізу НТУУ «КПІ», з. Київ)

РАСШИРЕННЫЙ АНАЛИЗ ФИЛЬТРАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ОПТИМИЗИРОВАННОГО НА БАЗЕ АППРОКСИМАЦИИ РАСЧЕТА ПОРЯДКА ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА

Рогоза В. С., Сергеев-Горчинський О. О. Розширений аналіз фільтрації періодичних сигналів за допомогою оптимізованого на базі апроксимації розрахунку порядку цифрового фільтру. Описано результати серії експериментів з фільтрації зашумлених дискретних періодичних сигналів, які мають різну форму, амплітуду, власну частоту і частоту дискретизації. Фільтрацію здійснено за допомогою методу оптимізованого на базі апроксимації розрахунку порядку фільтра просте ковзне середнє (ПКС). Показано, що середнє значення квадратів різниць (СКР) для відфільтрованого і незашумленого сигналів зменшується при збільшенні частоти дискретизації, при збільшенні тривалості реєстрації можна підвищити точність обчислення СКР, при зменшенні співвідношення сигнал-шум (ССШ) можна більш точно наблизити значення відфільтрованого сигналу до значень вихідного незашумленого сигналу. Оптимізований розрахунок порядку фільтра дозволив для кожного періодичного сигналу із заданою формою і характеристиками розрахувати близький до оптимального порядок фільтра ПКС.

Ключові слова: фільтрація, періодичний сигнал, незашумлений сигнал, фільтр нижчих частот, просте ковзне середнє

Рогоза В. С., Сергеев-Горчинський А. А. Расширенный анализ фильтрации периодических сигналов с помощью оптимизированного на базе аппроксимации расчета порядка цифрового фильтра. Описаны результаты серии экспериментов по фильтрации зашумленных дискретных периодических сигналов, имеющих различную форму, амплитуду, собственную частоту и частоту дискретизации. Фильтрация проведена с помощью метода оптимизированного на базе аппроксимации расчета порядка фильтра простое скользящее среднее (ПСС). Показано, что среднее значение квадратов разностей (СКР) для отфильтрованного и незашумленного сигналов уменьшается при увеличении частоты дискретизации, при увеличении продолжительности регистрации можно повысить точность вычисления СКР, при уменьшении соотношения сигнал-шум (ССШ) можно более точно приблизить значения отфильтрованного сигнала к значениям исходного незашумленного сигнала. Оптимизированный расчет порядка фильтра позволил для каждого периодического сигнала с заданной формой и характеристиками рассчитать близкий к оптимальному порядок фильтра ПСС.

Ключевые слова: фильтрация, периодический сигнал, незашумленный сигнал, фильтр нижних частот, простое скользящее среднее

Rogoza V. S., Sergeyev-Gorchynskyy O. O. The expanded analysis of the filtration of the periodic signals with the help of the procedure of calculation of the digital filter optimized on the basis of the approximation. The results of the series of experiments on filtration of the noisy discrete periodic signals, having the different form, amplitude, own frequency and digitalization frequency were described. The filtration was conducted with the help of the method of procedure of calculation of the filter optimized on the basis of approximation of the simple moving average (SMA). It was shown that the mean-square value of differences (MSD) for the filtered and noise-free signals was decreased at increase of the frequency of digitalization, and at the increase of the duration of registration it was possible to enhance the accuracy of the MSD calculation, while at the decrease of the correlation of the signal-noise (SNC) it was possible to approach the meanings of the filtered signal to the meanings of the source noise-free signal. The optimized calculation of the procedure of filter allowed calculating the close procedure of the filter of SMA for each periodic signal with the given form and characteristics.

Key words: filtration, periodic signal, noise-free signal, filter of the lowest frequencies, simple moving average

Введение. В различных технических задачах требуется фильтрация зашумленных сигналов. Одним из возможных вариантов фильтрации сигналов является отфильтровывание низкочастотных сигналов при помощи фильтра нижних частот (ФНЧ), который предназначен для выделения низкочастотной составляющей сигнала, представленного временным рядом дискретных зашумленных значений. Для наилучшего выделения низкочастотного сигнала важным является правильный выбор значения порядка цифрового фильтра. Существует класс задач, в которых отсутствует информация об исходном (незашумленном) сигнале. При таком условии подстройка фильтра осуществляется «вслепую» (обучение без учителя, unsupervised learning) [1].

Постановка задачі. Одним из методов “слепой” фильтрации является метод оптимизированного на базе аппроксимации расчета порядка цифрового фильтра. В статье [2] для слепой фильтрации снятых с датчика акселерометра периодических зашумленных сигналов был применен метод оптимизированного расчета порядка фильтра простое скользящее среднее (ПСС). После применения рассчитанных порядков фильтра ПСС из зашумленного сигнала были выделены периодические колебания, соответствующие тестовым шагам человека.

Для оценки возможности применения оптимизированного расчета порядка цифрового фильтра была проведена серия экспериментов по генерированию и фильтрации зашумленных периодических сигналов различной формы и с различным соотношением ССШ. Для всех зашумленных сигналов рассчитаны оптимальные (относительно исходных незашумленных сигналов) и оптимизированные (относительно аппроксимированных сигналов) порядки ФНЧ по критерию минимальности среднего значения квадратов разностей (СКР).

Вычисление отфильтрованного и аппроксимированного значений. Расчет отфильтрованного значения с помощью ПСС можно выразить следующим соотношением [3]:

$$y_{\phi_m}[k] = \frac{1}{2 \cdot m + 1} \cdot \sum_{i=-m}^m y[k + i], \quad (1)$$

где k – номер текущей временной точки дискретизации ($k = \{m, m + 1, m + 2, \dots, N - m\}$);
 $y[k + i]$ – значение зашумленного сигнала в точке дискретизации $k + i$;
 m – порядок фильтра ПСС ($m \in \mathbb{Z}$);
 $y_{\phi_m}[k]$ – значение отфильтрованного сигнала в точке дискретизации k .

Для аппроксимирования было использовано эмпирическое уравнение линейной регрессии, коэффициенты которого были рассчитаны по методу наименьших квадратов (МНК, *Least squares method*). Расчет аппроксимированного значения (условного математического ожидания) с помощью МНК можно выразить соотношениями [4]:

$$y_{a_n}[i] = b_0 + b_1 \cdot i, \quad (2)$$

$$b_1 = \frac{n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i \cdot y[i] - \sum_{i=0}^{n-1} i \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y[i]}{n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^2 - (\sum_{i=0}^{n-1} i)^2}, \quad (3)$$

$$b_0 = \frac{1}{n} \cdot (\sum_{i=0}^{n-1} y[i] - b_1 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i), \quad (4)$$

где $i = \{0, 1, 2, 3, \dots, n - 1\}$, n – интервал аппроксимации (количество точек для которых определено эмпирическое уравнение регрессии, $n = \{2, 3, 4, \dots\}$);
 $y[i]$ – значение зашумленного сигнала в точке дискретизации i ;
 $y_{a_n}[i]$ – оценка условного математического ожидания (аппроксимированное значение зашумленного сигнала) в точке дискретизации i .

Расчет оптимального порядка фильтра. Если значения исходного (незашумленного) сигнала известны, можно рассчитать оптимальное значение порядка фильтра ПСС для максимального приближения отфильтрованного зашумленного сигнала к исходному незашумленному. Оптимальный порядок m фильтра ПСС может быть рассчитан в результате минимизации значения СКР при сравнении исходного $y_{\text{незашум}}$ и отфильтрованного $y_{\phi_оптималь}$ сигналов, т.е. используя следующее соотношение [5]:

$$M_{\text{СКР}}(Y_{\text{незашум}}, Y_{\phi_m_оптималь}) = \frac{1}{N - 2 \cdot m} \cdot \sum_{k=m}^{N-m} (y_{\text{незашум}}[k] - y_{\phi_m}[k])^2,$$

где k – номер временной точки дискретизации;

$u_{\text{незашум}}$ – значение исходного незашумленного сигнала в точке дискретизации k ;

$u_{\text{ф}_m, \text{оптимал}}[k]$ – значение отфильтрованного сигнала в точке дискретизации k ;

m – порядок фильтра ПСС ($m \in \mathbb{Z}$);

N – общее количество временных точек дискретизации.

Расчет оптимизированного порядка фильтра. Расчет оптимизированного на базе аппроксимации порядка фильтра ПСС предполагает выполнение следующих шагов:

1) выбор порядка m ($m \in \mathbb{Z}$) для фильтра ПСС и расчет отфильтрованных значений для временных точек дискретизации $\{m, m + 1, m + 2, \dots\}$, в соответствии с (1);

2) выбор интервала аппроксимации n и расчет аппроксимированных значений для интервалов временных точек $\{\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}, \{n, n + 1, n + 2, \dots, 2 \cdot n - 1\}, \dots\}$, в соответствии с (2...4);

3) расчет СКР для значений аппроксимированного u_{a_n} и отфильтрованного $u_{\text{ф}_m}$ сигналов, определяется следующим соотношением:

$$M_{\text{СКР}}(Y_a, Y_{\text{ф}_m, \text{оптимиз}_m}) = \frac{1}{N-2 \cdot m} \cdot \sum_{k=m}^{N-m} (u_{a_n}[k] - u_{\text{ф}_m}[k])^2,$$

где k – временная точка дискретизации;

$u_{a_n}[k]$ – значение аппроксимированного сигнала в точке дискретизации k ;

$u_{\text{ф}_m}[k]$ – значение отфильтрованного сигнала в точке дискретизации k ;

Y_a – аппроксимированный сигнал; $Y_{\text{ф}_m, \text{оптимиз}_m}$ – отфильтрованный сигнал;

N – общее количество временных точек дискретизации исходного зашумленного сигнала.

Постановка эксперимента. Для оценки уровня устойчивости метода оптимизированного на базе аппроксимации расчета порядка фильтра ПСС была проведена серия экспериментов. Каждый эксперимент был приближен к реальным условиям обработки дискретных сигналов, при которых могут варьироваться характеристики сигналов и условия их регистрации. В экспериментальных целях были сгенерированы сигналы четырех форм: синусоидальной, треугольной, прямоугольной, пилообразной.

Были проведены четыре группы экспериментов по фильтрации сигналов:

- 1) с различной частотой дискретизации сигнала;
- 2) с различной частотой сигнала;
- 3) с различной продолжительностью регистрации сигнала;
- 4) с различным соотношением сигнал-шум.

Характеристики генерируемых сигналов (см. Табл. 1) были приближены к характеристикам сигналов, снятых с датчика акселерометра (Kionix, KXTF9-1026) в процессе ходьбы человека [6], т. е. распределение шумовой составляющей для генерируемых сигналов было выбрано нормальным (Гауссово распределение), а значение соотношения сигнал-шум равным -1.5 дБ.

Детальные характеристики экспериментов приведены в Табл. 1.

Указанные эксперименты были проведены с целью анализа различий в значениях оптимального и оптимизированного порядков фильтра ПСС при различных возможных условиях фильтрации дискретных сигналов.

Характеристики експериментів по оцінці устойчивості фільтрації

Табл. 1

Група	Характеристики сигналів
1	Частота дискретизації сигналу, Гц $f_{\text{дискретизації}} = \{100, 200, 300, \dots, 1000, 1100, 1200\}$ Гц $(f_{\text{сигнала}} = 1\text{Гц}, \Delta t = 4\text{с}, \text{ССШ} = -1.5\text{дБ})$
2	Продовжителіть реєстрації сигналу, с $\Delta t = \{1.9, 2.2, 2.5, \dots, 4.3, 4.9, 5.2\}$ с $(f_{\text{сигнала}} = 1\text{Гц}, f_{\text{дискретизації}} = 1000\text{Гц}, \text{ССШ} = -1.5\text{дБ})$
3	Соотношение сигнал-шум, дБ $\text{ССШ} = \{-2.39, -2.12, -1.85, \dots, -0.33, -0.19, -0.1\}$ дБ $(f_{\text{сигнала}} = 1\text{Гц}, f_{\text{дискретизації}} = 1000\text{Гц}, \Delta t = 4\text{с})$

Для оцінки результатів експериментів були вибрані наступні інформативні ознаки схожості результатів фільтрації при використанні оптимального і оптимізованого порядків фільтра ПСС:

1) модуль різниці значень оптимального і оптимізованого порядків фільтра:

$$|\Delta m| = |m_{\text{оптимиз}} - m_{\text{оптимал}}|,$$

де $m_{\text{оптимиз}}$ – значення оптимізованого порядку фільтра ПСС;

$m_{\text{оптимал}}$ – значення оптимального порядку фільтра ПСС;

2) формули для розрахунку модуля різниці значень СКР $|\Delta M_{\text{СКР}}|$, мають вигляд:

$$|\Delta M_{\text{СКР}}| = |M_{\text{СКР}}(Z, Y_{\text{ф,оптимиз}m}) - M_{\text{СКР}}(Z, Y_{\text{ф,оптимал}m})|,$$

$$M_{\text{СКР}}(Z, Y_{\text{ф,оптимиз}m}) = \frac{1}{N-2 \cdot m} \cdot \sum_{k=m}^{N-m} (z[k] - y_{\text{ф,оптимиз}m}[k])^2,$$

$$M_{\text{СКР}}(Z, Y_{\text{ф,оптимал}m}) = \frac{1}{N-2 \cdot m} \cdot \sum_{k=m}^{N-m} (z[k] - y_{\text{ф,оптимал}m}[k])^2,$$

де k – часовий момент дискретизації;

$z[k]$ – значення вихідного незашумленого сигналу в момент дискретизації k ;

$y_{\text{ф,оптимиз}m}$ – значення відфільтрованого сигналу (з оптимізованим порядком фільтра ПСС) в момент дискретизації k ;

$y_{\text{ф,оптимал}m}$ – значення відфільтрованого сигналу (з оптимальним порядком фільтра ПСС) в момент дискретизації k ;

N – загальне число часових моментів дискретизації вихідного зашумленого сигналу.

Обсуждение результатов экспериментов. Далі наведені малюнки (Рис. 1, 2, 3) і коментарії до результатів отриманих в ході експериментів.

При збільшенні значення частоти дискретизації, зростає кількість доступних для фільтрації значень сигналів і як наслідок різниця порядків фільтра ПСС, теж збільшується.

Значення СКР при збільшенні частоти дискретизації зменшується, що показує більше зближення результатів фільтрації з допомогою оптимального і оптимізованого порядків фільтра ПСС.

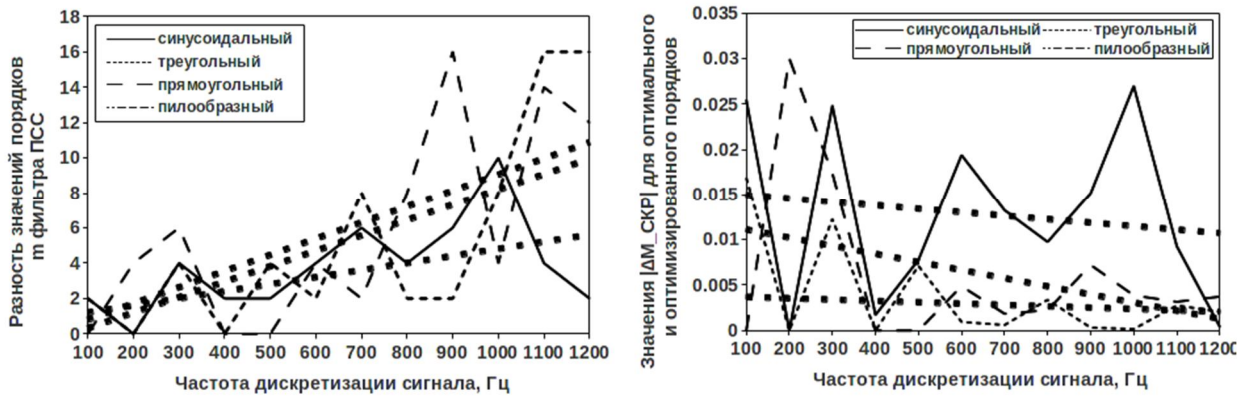


Рис. 1. Частота дискретизации сигнала, Гц

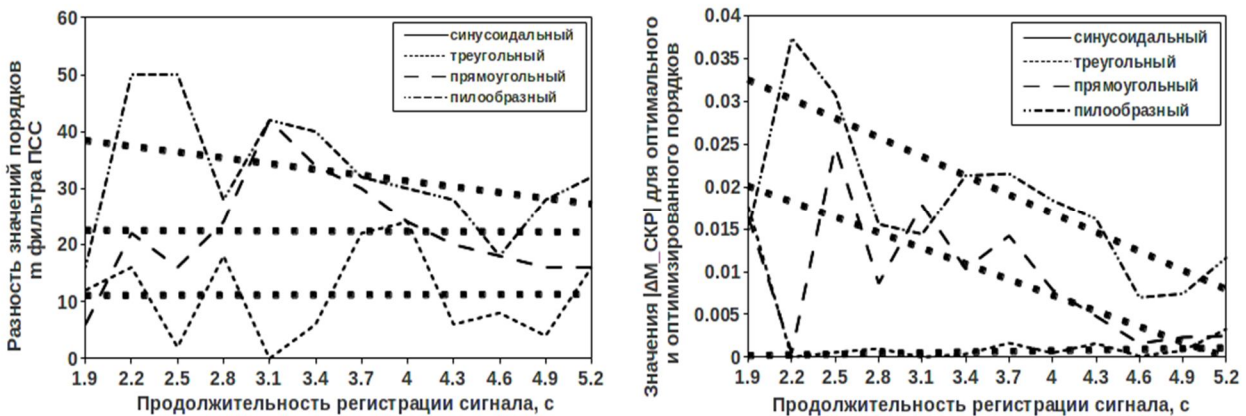


Рис. 2. Продолжительность регистрации сигнала, с

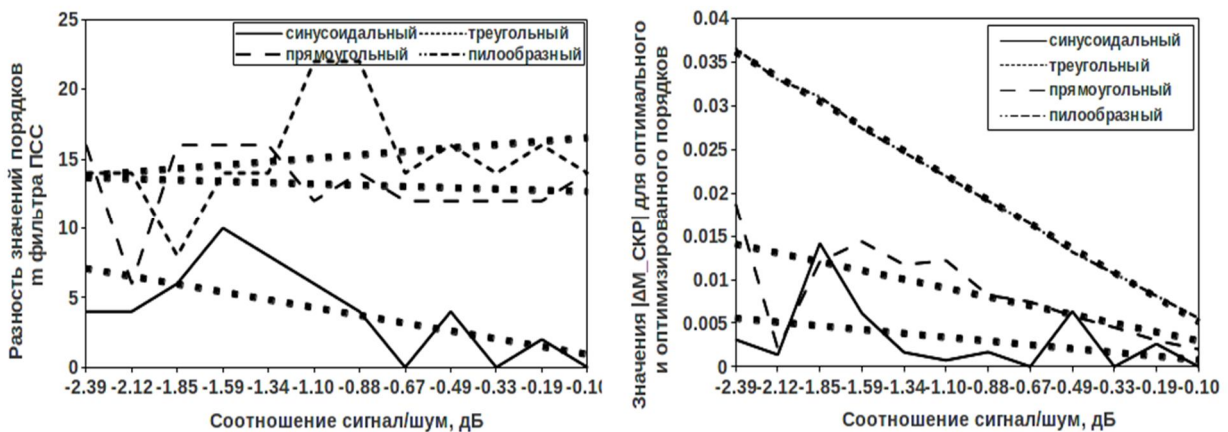


Рис. 3. Соотношение сигнал-шум, дБ

При увеличении продолжительности регистрации сигнала значения порядков фильтра ПСС остаются практически постоянными и в пределе стремятся к математическому ожиданию генеральной совокупности. Поскольку частота дискретизации фиксированная, как следствие при малых отрезках регистрации будут присутствовать отклонение в значениях исходного незашумлённого и аппроксимированного сигналов. Увеличение продолжительности регистрации сигнала позволяет повысить точность вычислений.

При уменьшении значения соотношения сигнал-шум (в зашумленном сигнале) можно более точно приблизить значения отфильтрованного сигнала к значениям исходного незашумленного сигнала.

Выводы. Фильтрация зашумленных сигналов требуется при решении различных технических задач, в том числе при обработке сигналов снимаемых с инерциальных датчиков (например, таких, как датчик акселерометр, использованный в представленных выше экспериментах). Основные трудности выбора оптимального порядка фильтра, отделяющего полезный сигнал от шумов, обусловлены тем, что чувствительность датчиков, с которых снимаются обрабатываемые сигналы, а также характеристики этих сигналов (в том числе уровень шумов) могут изменяться в довольно широких пределах и заранее неизвестны.

При построении фильтра для зашумленных сигналов может быть использован метод оптимизированного на базе аппроксимации расчета порядка фильтра ФНЧ. Для того, чтобы оценить возможность применения выбранного метода для расчета порядков фильтра ПСС и последующей фильтрации периодических сигналов с соотношением сигнал-шум -4.0, -1.0 (дБ), была разработана математическая библиотека составленная из программных модулей.

При оценке разности в значениях оптимального и оптимизированного порядков фильтра ПСС было показано, что при увеличении значения частоты дискретизации, возрастает количество доступных для фильтрации значений сигналов и как следствие разность порядков фильтра ПСС, тоже увеличивается, при этом значение СКР для значений отфильтрованного и исходного незашумленного сигналов уменьшается.

При уменьшении значения соотношения сигнал-шум (в зашумленном сигнале) можно более точно приблизить значения отфильтрованного сигнала к значениям исходного незашумленного сигнала.

Литература

1. Сергиенко А. Цифровая обработка сигналов / А. Сергиенко. – [3-е изд.] / – Санкт-Петербург : BHV-Петербург, 2011. – С. 593-595.
2. Rogoza V. The Comparison of the Stochastic Algorithms for the Filter Parameters Calculation / V. Rogoza, A. Sergeev // *Advances in Systems Science*. – Vol. 240. – Switzerland : Springer, 2014. – P. 241-250.
3. Oppenheim A. Discrete-Time Signal Processing / A. Oppenheim, R. Schaffer. – USA : Prentice-Hall, 1999. – P. 17-18.
4. Draper N. Applied regression analysis / N. Draper, H. Smith. – 3rd ed. – USA : Wiley, 1998. – P. 24-25.
5. Anderson T. Test of Goodness of Fit / T. Anderson, D. Darling // *Journal of the American Statistical Association*. – Vol. 49. – USA : JSTOR, 1954. – P. 765-766.
6. Kuhn M. Applied Predictive Modeling / M. Kuhn, K. Johnson. – USA : Springer, 2013. – P. 97-98.