УДК 519.8

**Гебура Ю. М.,** провідний спеціаліст (Тел.: +380 50 233 53 18. E-mail : dins@ua.fm)
*(Ужгородський національний університет)*

# ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕДЕЙ ДЕРЕВОПОДІБНИХ СИСТЕМ

**Гебура Ю. М. Дослідження математичних моделей деревоподібних систем.** В статті розглядаються питання дослідження математичних моделей для дискретних ієрархічних систем. Особливістю таких систем є наявність множини кількісних та якісних критеріїв, а також невизначеність вихідних даних. Розглянуті особливості застосування апарату гіперграфів та елементів теорії мультимножин для аналізу складних систем. Запропонована модель складної системи у вигляді стратифікованого подання сімейства моделей, кожна з яких відображає поведінку досліджуваної системи на різних рівнях деталізації. Показано, що перспективним напрямком є поєднання методів аналітичного та імітаційного моделювання для дослідження складних систем.

***Ключові слова***: дискретна ієрархічна система, математичне моделювання, імітаційне моделювання, гіперграф, стратифікація моделей, мультимножина

**Гебура Ю. М. Исследование математических моделей древовидных систем.** В статье рассматриваются вопросы исследования математических моделей для дискретных иерархических систем. Особенностью таких систем является наличие множества количественных и качественных критериев, а также неопределенность исходных данных. Рассмотрены особенности применения аппарата гиперграфов и элементов теории мультимножеств для анализа сложных систем. Предложена модель сложной системы в виде стратифицированного представления семейства моделей, каждая из которых отображает поведение исследуемой системы на разных уровнях детализации. Показано, что перспективным направлением является сочетание методов аналитического и имитационного моделирования для исследования сложных систем.

***Ключевые* слова:** дискретная иерархическая система, математическое моделирование, имитационное моделирование, гиперграф, стратификация моделей, мультимножество

**Hebura Yu. M. Research of mathematical models of the treelike systems.** This work is devoted to the **research** of mathematical models for discrete hierarchical systems. A feature of such systems is the presence of a plurality of quantitative and qualitative criteria, as well as the uncertainty of initial data. The features of the application system and hypergraph theory of multisets of elements for the analysis of complex systems are concidered. The model of the complex system is offered as the stratified presentation of the models family, each of which represents the conduct of the reseached system on the different levels of working out in detail. It is shown that the promising direction is to combine analytical methods and simulation to study complex systems.

***Keywords***: discrete hierarchical system, mathematical modelling, analytical modelling, simulation, hypergraph, models stratification, multiset

**Вступ.** Швидкий розвиток і ускладнення техніки, збільшення масштабів і вартості робіт при створенні нових систем, широке впровадження автоматизації – все це привело до необхідності дослідження складних систем на основі моделей. Основні особливості складних систем:

– багатовимірність, пов'язана з наявністю великої кількості елементів і зв'язків між ними;
– ієрархічний багаторівневий характер подання самої системи та структури управління;
– множина структурно-компонувальних рішень;
– багатоаспектність подання;
– розподіленість у просторі та часі;
– багатоцільове функціонування;
– імовірнісне функціонування і поведінка системи, обумовлені складною взаємодією з мінливим зовнішнім середовищем.

Одним з найважливіших інструментів системного аналізу, який дозволяє отримати опис ієрархії зв'язків, механізмів і структур складних багатокомпонентних систем, є моделювання, що дає можливість:

– візуалізувати систему в її поточному або бажаному для дослідника стані;

– визначити структуру або поведінку системи;

– отримати шаблони, що дозволяють формувати і моделювати системи даного класу.

Модельний метод аналізу застосовують для формалізованого опису складної системи, що містить описи елементарних об'єктів системи, а також їх властивостей і зв'язків. У даний час поряд з широко використовуваними традиційними методами аналітичного моделювання велика роль відведена методам імітаційного моделювання, які дають можливість отримати найбільш якісні результати при аналізі динаміки поведінки складної системи, дозволяючи найбільш гнучко, повно і наочно відображати процеси, що протікають у них.

**Аналіз публікацій за темою роботи.** Теорія математичного моделювання складних систем розвинена в роботах багатьох авторів, зокрема Ю. Г. Євтушенко, В. Ф. Крапивіна, П. С. Краснощекова, С. П. Курдюмова, Н. Н. Моісеєєва, А. П. Михайлова, Г. І. Савіна, А.А. Самарського та багатьох інших авторів [1...8].

При вирішенні задач багатокритеріального прийняття рішень, розпізнавання образів, класифікації, обробки різнорідної інформації, теорії кодування інших предметних областях часто виникає необхідність згрупувати або впорядкувати аналізовані об'єкти, ґрунтуючись на їх властивостях, виражених ознаками (атрибутами) об'єктів [2, 6].

Для математичного моделювання значної кількості дискретних систем виявляється цілком достатнім використання апарату теорії графів [4]. Разом з тим є досить широке коло завдань, де досліджувані об'єкти характеризуються багатьма різнорідними ознаками, які можуть бути і кількісними, і якісними, і, крім того, одні й ті ж об'єкти можуть існувати в декількох екземплярах з відмінними значеннями ознак, згортка яких або неможлива, або математично некоректна. Множинність і повторюваність факторів, що описують об'єкти, ускладнює і ускладнює вирішення таких завдань.

Класичні підходи моделювання дискретних систем виявляються недостатніми з тієї причини, що подання параметрів і структури цих задач за допомогою інструментарію класичної теорії графів [4, 6] виявляється в принципі неадекватним в силу неможливості відобразити в системній єдності складну організацію їх внутрішніх взаємозв'язків, обмежуючись тільки поняттями і позначеннями цієї теорії.

До теперішнього часу математичне моделювання дискретних слабо структурованих процесів і систем, для яких характерні множинність критеріїв, стохастичність, інтервальність або нечіткість значень вихідних даних, знаходиться ще в зародковому стані.

**Використання теорії гіперграфів.** Достатньо перспективним математичним апаратом для структурування об'єктів моделювання є інструментарій теорії гіперграфів [5, 8]. Відзначимо, що на відміну від графів, в науковій літературі практично відсутні доступні публікації, які представляли б основи теорії гіперграфів. Дотримуватимемося термінології і позначень, прийнятих в [5]. Нехай $V$ – кінцева непорожня множина, $E$ – деяке сімейство непорожніх підмножин множини $V$. Пара ($V$, $E$) називається гіперграфом $G$=($V$, $E$) з множиною вершин $V = \{v\}$ і множиною ребер $E = \{e\}$.

Графічно будь-який гіперграф можна зобразити у вигляді $P$-уявлення. Для цього на двох різних рівнях зображуються вершини і поля взаємодій, а між ними проводяться лінії, що визначають присутність відповідного елемента на заданому полі (Рис. 1).

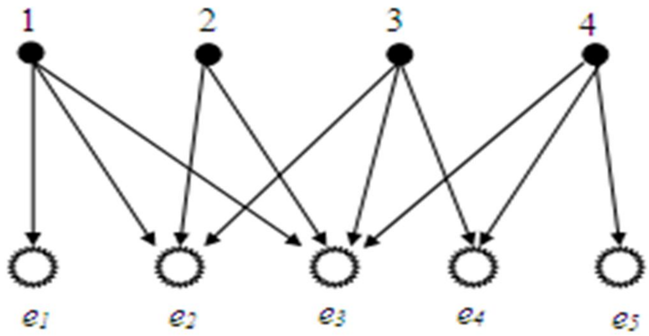


Рис. 1. Гіперграф $G = (V, E)$

На приведеному рисунку

$$E = \{\{e_1 = \{1\}, e_2 = \{1,2,3\}, e_3 = \{1,2,3,4\}, e_4 = \{3,4\}, e_5 = \{4\}\}.$$

Формально дослідити структуру, яка представлена дискретною графоподібною системою, можна шляхом дослідження її динаміки. Динаміка системи – це послідовність станів, які визначаються зазвичай перерозподілами ресурсу після оцінки елементами свого поточного стану. Ресурсну систему $S = (V, E, Q)$ можна розглядати як зважений гіперграф $HG = (V, E)$, кожній вершині $i \in V$ якого призначений ресурс $q_i$, де $Q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ – ресурсний вектор системи, $n = |V|$. Елемент $i$ має можливість активно "діяти" своїм ресурсом на підмножині полів $e_j \in E_i$, зберігаючи балансове співвідношення $q_i = \sum_{j \in E_i} x_{ij}$ .

Формально, на кожнім кроці $k$-й елемент $i$ вирішує наступну задачу:

$$T_k \; : \; \begin{cases} c_{ij}\left(x_{ij}^{(k+1)}, \{x_{sj}^{(k)}\}\right) = \underset{e_j \in E_i, s \in V_{ij}}{\text{const}}; \\ \\ \sum_{j \in E_i} x_{ij}^{(k+1)} = q_i. \end{cases}$$

Оскільки елементи діють незалежно один від одного, то система потрапляє в стан, відмінний від очікуваного результату для кожного елемента. Тому на черговому кроці відбувається новий перерозподіл. Тим самим, визначається динамічна модель "життя" системи в режимі дискретного часу. Представляється важливим дослідження поведінки розвитку системи і знаходження граничних і рівноважних станів. Це можна робити як аналітичними, так і чисельними методами. За допомогою аналітичних методів можна отримати теоретичні результати у формі теорем і тверджень. Чисельні методи дають можливість перевірити теоретичні твердження, а також зробити розрахунки для побудованих ітераційних процесів, в яких складно провести теоретичні дослідження.

Ресурсні елементи, структура яких визначається за допомогою гіперграфу, дозволяють моделювати не тільки парні, але й групові взаємодії.

Зручною математичною моделлю для подання об'єктів, які характеризуються багатьма признаками, є мультимножина або множина з елементами, що повторюються. Кратність елементів – суттєва особливість мультимножини, що дозволяє відрізняти її від множини і розглядати мультимножину як якісно нове математичне поняття [7].

**Імітаційне моделювання складних систем.** Коли явища в системі настільки складні, що їх спрощення стає занадто грубим наближенням до дійсності, слід відмовитися від аналітичного моделювання і використовувати для дослідження подібних систем імітаційне моделювання. Імітаційне моделювання не передбачає тих спрощень явищ у реальній системі, які необхідні для реалізації аналітичного моделювання. В імітаційній моделі функціонування складної системи подається набором алгоритмів. Ці алгоритми на основі фактичних значень параметрів і відомостей про початковий стан системи дозволяють відтворити функціонування системи в кожній конкретній ситуації.

Можна виділити чотири структури моделювання, визнані спільнотою імітаційного моделювання. До них належать метод процесної взаємодії, метод планування подій, метод сканування дій і трифазний метод.

Одним із структурних подань імітаційної моделі (ІМ) є кортеж, що включає множину активностей

$$\left\{ AK_{ij_i}, \quad i \in \overline{1,n}, \quad j \in \overline{1,m} \right\}$$

і керуючу програму моделювання (КПМ), забезпечує взаємодію активностей між собою в ході імітації та виконання організуючих функцій, тобто

$$\text{ІМ} = \left\langle \left\{ AK_{ij_i}, \quad i \in \overline{1,n}, \quad j \in \overline{1,m} \right\}, \quad \text{КПМ} \right\rangle.$$

Цілі моделювання визначаються цілями дослідження, які найчастіше полягають у створенні нової системи або в модернізації функціонуючої системи з урахуванням ефективності. Показником ефективності є перевищення корисності пропонованого варіанта системи над вартістю створення й експлуатації цього варіанта.

Модель складної системи у вигляді зазначеного на Рис. 2 стратифікованого подання є сімейством моделей, кожна з яких відображає поведінку досліджуваної системи на різних рівнях деталізації. При цьому на кожному рівні можуть використовуватися відповідні принципи, змінні і залежності.

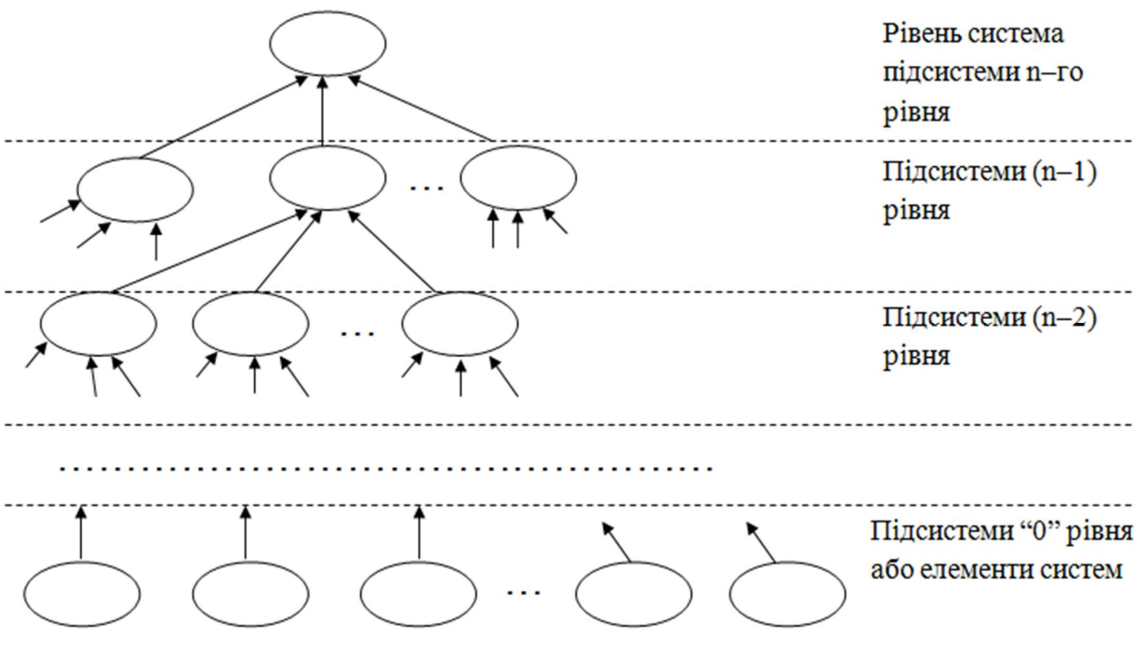


Рис. 2. Стратифіковане уявлення складної системи

Обов'язковою умовою успішного імітаційного дослідження є документування і складання звітів. Якщо імітаційна модель буде повторно використовуватися тим же або іншим аналітиком, можливо знадобиться повернутися до розуміння того, як вона побудована і функціонує.

Документовані звіти підвищать впевненість при прийнятті рішень. Також документація вкрай корисна в разі, якщо модель потребує змін. Звіти про результати імітаційного дослідження необхідні для прийняття рішень, що стосуються модельованої системи.

У кінцевому підсумку результати моделювання використовуються для прийняття рішення про працездатність системи у випадку, коли визначаються параметри, що задовольняють системі обмеження, або про вибір оптимального варіанта з множини допустимих з урахуванням критерію, який виражає ефективність.

**Висновки.** Проблеми класифікації та упорядкування об'єктів, які описуються багатьма кількісними та якісними ознаками, причому кожен з об'єктів може існувати в декількох різних, але рівноправних "примірниках", є досить важкими.

Розглянуті особливості застосування апарату гіперграфів та елементів теорії мультимножин для аналізу складних систем. Запропонована модель складної системи у вигляді стратифікованого подання сімейства моделей, кожна з яких відображає поведінку досліджуваної системи на різних рівнях деталізації.

Для моделювання таких систем доцільно використовувати апарат гіперграфів, мультимножин, а також метод імітаційного моделювання. Комбінація аналітичних та імітаційних моделей визначається вимогами прикладної задачі та предметної області.

**Література**

1. Боев В. Д. Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World / В. Д. Боев. – Санкт-Петербург : ВНУ-Санкт-Петербург, 2004. – 368 с.

2. Кобелев Н. Б. Основы имитационного моделирования сложных экономических систем : учеб. пособие / Н. Б. Кобелев. – Москва: Дело, 2003. – 336 с.

3. Томашевский В. Н. Имитационное моделирование в среде GPSS / В. Н. Томашевский, Е. Г. Жданова. – Москва : Бестселлер, 2003. – 416 с.

4. Шевцов Г. С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты : учеб. пособие / Г. С Шевцов. – Москва : Финансы и статистика, 2003. – 576 с.

5. Зыков А. А. Гиперграфы / А. А. Зыков // УМН. – 1974. Т.29. – №6. – С 89-154.

6. Агаев Р. П. Сходимость и устойчивость в задачах согласования характеристик (обзор базовых результатов) / Р. П. Агаев, П. Ю. Чеботарев // Управление большими системами. Спец. вып. 30.1 «Сетевые модели в управлении». – Москва : ИПУ РАН, 2010. – С. 470-505.

7. Петровский А. Б. Основные понятия теории мультимножеств / А. Б. Петровський. – Москва : Едиториал УРСС, 2002.

8. Берштейн Л. С. Нечеткие графы и гиперграфы / Л. С. Берштейн, А. В. Боженюк. – Москва : Научный мир, 2005. – 256 с.