УДК 519.622

Матичин И. И., докт. физ.-мат. наук, с.н.с. (Тел. +380 44 526 04 58. Email: matychyn@ukr.net)
(Институт кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, г. Киев)

Онищенко В. В., канд. физ.-мат. нак., доц. (Тел. +380 44 249 25 96. Email: oviva@ukr.net)
(Государственный университет телекоммуникаций, г. Киев)

О ВЫЧИСЛЕНИИ МАТРИЧНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИИ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

Матичин І. І., Онищенко В. В. Про обчислення матричної узагальненої функції Миттаг-Леффлера. В статті розглянуто ряд методів обчислення матричної узагальненої функції Міттаг-Леффлера: методи, що базуються на застосуванні інтерполяційних поліномів, а також теоремі Гамільтона–Келі. Використання інтерполяційних поліномів Лагранжа–Сильвестра і Ньютона дозволяє представити матричну функцію Міттаг-Леффлера через значення скалярної функції Міттаг-Леффлера на спектрі відповідної матриці. Матрична узагальнена функція Міттаг-Леффлера має важливе значення при розв'язанні систем лінійних диференціальних рівнянь дробового порядку з постійними коефіцієнтами, оскільки дозволяє одержати явні представлення розв'язків задач типу Коші.

Ключові слова: ПІД-регулятор дробового порядку, дробова похідна, матрична функція Міттаг-Леффлера, інтерполяційний поліном.

Матичин И. И., Онищенко В. В. О вычислении матричной обобщенной функции Миттаг-Леффлера. В статье рассмотрен ряд методов вычисления матричной обобщенной функции Миттаг-Леффлера: методы базирующиеся на применении интерполяционных полиномов, а также теоремы Гамильтона-Кэли. Использование интерполяционных полиномов Лагранжа-Сильвестра и Ньютона позволяет представить матричную функцию Миттаг-Леффлера через значения скалярной функции Миттаг-Леффлера на спектре соответстующей матрицы. Матричная обобщенная функция Миттаг-Леффлера имеет важное значение при решении систем линейных дифференциальных уравнений дробного порядка с постоянными коэффициентами, поскольку позволяет получить явные представления решений задач типа Коши.

***Ключевые слова*:** ПИД-регулятор дробного порядка, дробная производная, матричная функция Миттаг-Леффлера, интерполяционный полином.

Matychyn I.I., Onyshchenko V.V. On computation of matrix generalized Mittag-Leffler function. The paper considers a number of methods for calculating the matrix generalized Mittag-Leffler function: methods based on the use of interpolation polynomials and of the Cayley-Hamilton theorem. The use of Lagrange–Sylvester and Newton interpolation polynomials allows expressing matrix Mittag-Leffler function in terms of scalar Mittag-Leffler function values on the spectrum of respective matrix. Matrix generalized Mittag-Leffler function is important in solving of systems of fractional order linear differential equations with constant coefficients, since it allows explicit representation of solutions to Cauchy-type problems.

***Key words*:** fractional order PID controllers, fractional derivative, matrix Mittag-Leffler function, interpolation polynomial

Введение. Постановка задачи. Применение операторов дробного интегро-дифференцирования хорошо себя зарекомендовало при проектировании систем автоматизированного управления, в частности системам автоматического регулирования мощности излучения радиопередатчиков (системы АРМП), которые используют принцип ПИД (пропорционально-интегрально-дифференциальное) – регулирование. В [1,2] был предложен ПИД-регулятор дробного порядка, который является более гибким и дает возможность лучше приспосабливаться к динамике систем дробного порядка, описываемых дифференциальными уравнениями с дробными производными.

Важную роль в теории дифференциальных уравнений дробного порядка играет обобщенная функция Миттаг-Леффлера. В частности, она фигурирует в явных формулах решений многих типов дифференциальных уравнений дробного порядка. Матричный аналог обобщенной функции Миттаг-Леффлера был впервые введен в работе [3]. В терминах матричных обобщенных функций Миттаг-Леффлера записываются решения систем линейных дифференциальных уравнений дробного порядка с постоянными коэффициентами [4], поэтому для приложений важно уметь вычислять матричный аналог обобщенной функции Миттаг-Леффлера. Как указывалось, в работе [5], использование техники интерполяционных полиномов Лагранжа-Сильвестра позволяет во многих случаях находить матричные обобщенные функции Миттаг-Леффлера, выражая их через значения соответствующих скалярных функций Миттаг-Леффлера на спектре данной матрицы. Настоящая статья посвящена развитию этого подхода. Предложенные здесь методы базируются на идеях, изложенных в работе [6].

Целью раборы является разработка методов вычисления матричной обобщенной функции Миттаг-Леффлера.

Системы дробного порядка. В работе [3] была введена матричная обобщенная функция Миттаг-Леффлера

$$E_{\rho,\mu}(B)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B^k}{\Gamma(k\rho+\mu)}, \tag{1}$$

где $\rho>0$, $\mu\in\mathbb{C}$, а B – это произвольная квадратная матрицп порядка n. Следует отметить, что функция $E_{\rho,\mu}(B)$ обобщает матричную экспоненту, поскольку

$$E_{1,1}(B)=e^B=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B^k}{k!}.$$

Матричная обобщенная функция Миттаг-Леффлера играет важную роль при изучении линейных систем дробного порядка.

Напомним определение левосторонних интеграла и производной дробного порядка в смысле Римана–Лиувилля:

$$J^{\nu}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t(t-\tau)^{\nu-1}f(\tau)d\tau,\quad 0<\nu<1,$$

$$D^{\alpha}f(t)=\frac{d^k}{dt^k}J^{k-\alpha}f(t),\quad k-1<\alpha<k,$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Дробная производная Римана–Лиувилля обладает рядом недостатков. В частности, она обращается в бесконечность, когда t стремится к нижнему пределу интегрирования. В связи с этим была введена т.н. регуляризованная дробная производная, которую в литературе часто называют производной Капуто. Регуляризованная дробная производная Капуто порядка α, $0<\alpha<1$, определяется следующим образом

$$D_{t_0}^{(\alpha)}f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^t\frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau.$$

Рассмотрим следующую систему дробного порядка в смысле Капуто:

$$D_{t_0}^{(\alpha)}z=Az+g,\quad 0<\alpha<1, \tag{2}$$

с начальными условиями

$$z(t_0)=z_0. \tag{3}$$

Здесь $z\in\mathbb{R}^n$, A – $n\times n$ матрица и $g:[t_0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ – измеримая, почти всюду ограниченная функция. Решение задачи Коши (2), (3), а также решения задач типа Коши для линейных систем с дробными производными других типов, записываются с помощью матричных обобщенных функций Миттаг-Леффлера. Об этом, в частности, свидетельствует следующая лемма [7].

Лемма 1. Решение задачи типа Коши (2), (3) имеет вид:

$$z(t)=E_{\alpha,1}(A(t-t_0)^{\alpha})z_0+\int_{t_0}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(A(t-\tau)^{\alpha})g(\tau)d\tau, \tag{4}$$

при условии, что интеграл в правой части сходится.

Как будет показано в дальнейшем, использование для моделей систем дробного порядка матричного представления и формулы (4) позволяет значительно облегчить вычисление их решений.

Полиномиальные методы. В работе [5] был предложен метод нахождения обобщенной функции Миттаг-Леффлера $E_{\alpha,\alpha}(At^{\alpha})$ от квадратной матрицы A с помощью интерполяционных полиномов Лагранжа–Сильвестра. Суть метода состоит в следующем. Если среди характеристических чисел λ_1, λ_2, …, λ_n , матрицы A нет кратных, то для вычисления $E_{\alpha,\alpha}(At^{\alpha})$ можно воспользоваться формулой

$$E_{\alpha,\alpha}(At^{\alpha}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(A-\lambda_1 E)\ldots(A-\lambda_{k-1}E)(A-\lambda_{k+1}E)\ldots(A-\lambda_n E)}{(\lambda_k-\lambda_1)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\ldots(\lambda_k-\lambda_n)} E_{\alpha,\alpha}(\lambda_k t^{\alpha}), \tag{5}$$

где E – единичная матрица; $E_{\alpha,\alpha}(\lambda_k t^{\alpha})$ – соответствующие значения скалярной обобщенной функции Миттаг-Леффлера на спектре матрицы A.

Один из способов вычисления матриц

$$A_k = \frac{(A-\lambda_1 E)\ldots(A-\lambda_{k-1}E)(A-\lambda_{k+1}E)\ldots(A-\lambda_n E)}{(\lambda_k-\lambda_1)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\ldots(\lambda_k-\lambda_n)},$$

фигурирующих в выражении (5), основан на использовании матрицы Вандермонда

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Обозначим v_{kj} элемент, стоящий в k-й строке, j-м столбце обратной матрицы V^{-1}. Тогда

$$A_k = \sum_{j=1}^{n} v_{kj} A^{j-1},$$

и

$$E_{\alpha,\alpha}(At^{\alpha}) = \sum_{k=1}^{n} A_k E_{\alpha,\alpha}(\lambda_k t^{\alpha}).$$

Следует отметить, что наряду с формулой (5) можно воспользоваться интерполяционными формулами Ньютона

$$E_{\alpha,\alpha}(At^{\alpha}) = E_{\alpha,\alpha}(\lambda_1 t^{\alpha})E + \sum_{j=2}^{n} [\lambda_1,\ldots,\lambda_j](A-\lambda_1 E)\ldots(A-\lambda_{j-1}E).$$

Разделенные разности $[\lambda_1,\ldots,\lambda_j]$ зависят от t и вычисляются по рекуррентным формулам

$$[\lambda_1,\lambda_2] = \frac{E_{\alpha,\alpha}(\lambda_1 t^{\alpha}) - E_{\alpha,\alpha}(\lambda_2 t^{\alpha})}{\lambda_1-\lambda_2},$$

$$[\lambda_1,\ldots,\lambda_{k+1}] = \frac{[\lambda_1,\ldots,\lambda_k]-[\lambda_2,\ldots,\lambda_{k+1}]}{\lambda_1-\lambda_{k+1}}, \; k \ge 2.$$

Приближенные методы. Пусть характеристический многочлен матрицы A имеет вид:

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \lambda^n - c_1\lambda^{n-1} - c_2\lambda^{n-2} - \ldots - c_n .$$

Согласно теореме Гамильтона–Кэли $\Delta(A) = 0$, следовательно,

$$A^n = c_1 A^{n-1} + c_2 A^{n-2} + \ldots + c_n E . \tag{6}$$

Таким образом, любая степень матрицы A может быть выражена через матрицы $E, A, \ldots, A^{n-1}$:

$$A^k = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{kj} A^j ,$$

откуда, с учетом (1), получаем

$$E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+\alpha)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma((k+1)\alpha)} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \beta_{kj} A^j \right] = \sum_{j=0}^{n-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \beta_{kj} \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma((k+1)\alpha)} \right] A^j . \tag{7}$$

Рассмотрим несколько рекуррентных формул, облегчающих вычисление коэффициентов β_{kj}.

Согласно методу Д. К. Фаддеева [8], коэффициенты характеристического многочлена могут быть вычислены в соответствии с рекуррентным соотношением

$$c_k = \frac{s_k - c_1 s_{k-1} - \ldots - c_{k-1} s_1}{k} ,$$

где $s_k = \operatorname{Sp} A^k$ обозначает сумму диагональных элементов (след) матрицы A^k.

Справедлива также следующая лемма:

Лемма 2. Для любого $m = 0, 1, 2, \ldots$ имеет место формула

$$A^{n+m} = q_{m,1}A^{n-1} + q_{m,2}A^{n-2} + \ldots + q_{m,n}E = \sum_{k=0}^{n-1} A^k q_{m,n-k} ,$$

где коэффициенты $q_{m,k}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$q_{0,k} = c_k ,\ q_{m,k} = c_k q_{m-1,1} + q_{m-1,k+1} ,\ q_{m-1,n+1} = 0 .$$

Доказательство. Будем использовать индукцию по m. Для $m = 0$, поскольку $q_{0,k} = c_k$, получаем равенство (6), верное в силу теоремы Гамильтона–Кэли.

Пусть для некоторого m справедливо утверждение леммы

$$A^{n+m} = q_{m,1}A^{n-1} + q_{m,2}A^{n-2} + \ldots + q_{m,n}E . \tag{8}$$

Домножим левую и правую часть равенства (8) на A. После перегруппирования членов получим

$$A^{n+m+1} = q_{m,1}(c_1A^{n-1} + c_2A^{n-2} + \ldots + c_nE) + q_{m,2}A^{n-1} + \ldots + q_{m,n}A =$$

$$= (q_{m,1}c_1 + q_{m,2})A^{n-1} + (q_{m,1}c_2 + q_{m,3})A^{n-2} + \ldots + q_{m,1}c_nE = q_{m+1,1}A^{n-1} + q_{m+1,2}A^{n-2} + \ldots + q_{m+1,n}E .$$

Таким образом, утверждение леммы справедливо для $m+1$, что завершает доказательство.

С учетом леммы 2, равенство (7) принимает вид

$$E_{\alpha,\alpha}(At^{\alpha}) = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{t^{\alpha k}}{\Gamma((k+1)\alpha)} + \sum_{m=0}^{\infty} q_{m,n-k}\frac{t^{(n+m)\alpha}}{\Gamma((n+m+1)\alpha)}\right]A^{k}.$$

Численный эксперимент. Большой интерес с практической точки зрения представляют собой уравнения вида

$$az'' + bD^{(\alpha)}z + cz = f, \quad 1 < \alpha < 2,$$

описывающие затухающие колебания с дробным (порядка α) демпфированием. Уравнения такого вида, в частности, возникают при описании колебаний крыла самолета в сверхзвуковом потоке газа, приводящих к явлениям типа флаттера, колебаний наноразмерных сенсоров, и др. При $\alpha = \frac{3}{2}$ данное уравнение называется уравнением Багли-Торвика и описывает колебания твердой пластины, погруженной в ньютоновскую жидкость.

При описании физических явлений и процессов, как правило используется производная Капуто, соответствующая типу $\mu = 1$, поскольку в таком случае начальные условия имеют ясную физическую интерпретацию. Рассмотрим уравнение Багли–Торвика с производной в смысле Капуто

$$ay''(t) + bD^{(3/2)}y(t) + cy(t) = f(t)$$

с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0'.$$

Аналитическое решение уравнения Бэгли–Торвика, полученное при помощи дробной функции Грина в терминах скалярных обобщенных фунций Миттаг-Леффлера имеет вид

$$y(t) = \int_0^t G_3(t-\tau) f(\tau)\, d\tau,$$

где

$$G_3(t) = \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{c}{a}\right)^k t^{2k+1} E^{(k)}_{\frac{1}{2},2+\frac{3k}{2}}\left(-\frac{b}{a}\sqrt{t}\right),$$

и

$$E^{(k)}_{\lambda,\mu}(x) = \frac{d^k}{dx^k}E_{\lambda,\mu}(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+k)!\,x^j}{j!\,\Gamma(\lambda j + \lambda k + \mu)}, \ k = 0,1,2,\ldots$$

Данное решение является громоздким и требует вычисления интеграла свертки, включающей функцию Грина, имеющей вид бесконечной суммы производных функции Миттаг-Леффлера. Очевидно, что для произвольной функции f такое выражение не может быть легко вычислено.

С другой стороны, в работе [9] показано, что данное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} D^{(1/2)}z_1 = z_2 \\ D^{(1/2)}z_2 = z_3 \\ D^{(1/2)}z_3 = z_4 \\ D^{(1/2)}z_4 = \frac{1}{a}(-cz_1 - bz_4 + f) \end{cases};$$

или в матричной форме:

$$D^{(1/2)}z = Az + Bf,$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c/a & 0 & 0 & -b/a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{a} \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$

с начальными условиями $z(0) = z^0 = (y_0, 0, y'_0, 0)^T$.

В силу (4), решение данной системы задается формулой

$$z(t) = E_2(A\sqrt{t};1)z^0 + \int_0^t E_2\left(A\sqrt{t-\tau};\frac{1}{2}\right)B\frac{f(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau.$$

Матричные функции Миттаг-Леффлера, фигурирующие в последнем выражении, могут быть вычислены с помощью описанных выше методов. Результаты вычислений для случая $a = b = c = 1$ и начальных условий $y_0 = 0$, $y'_0 = 1$, показаны на Рис. 1.

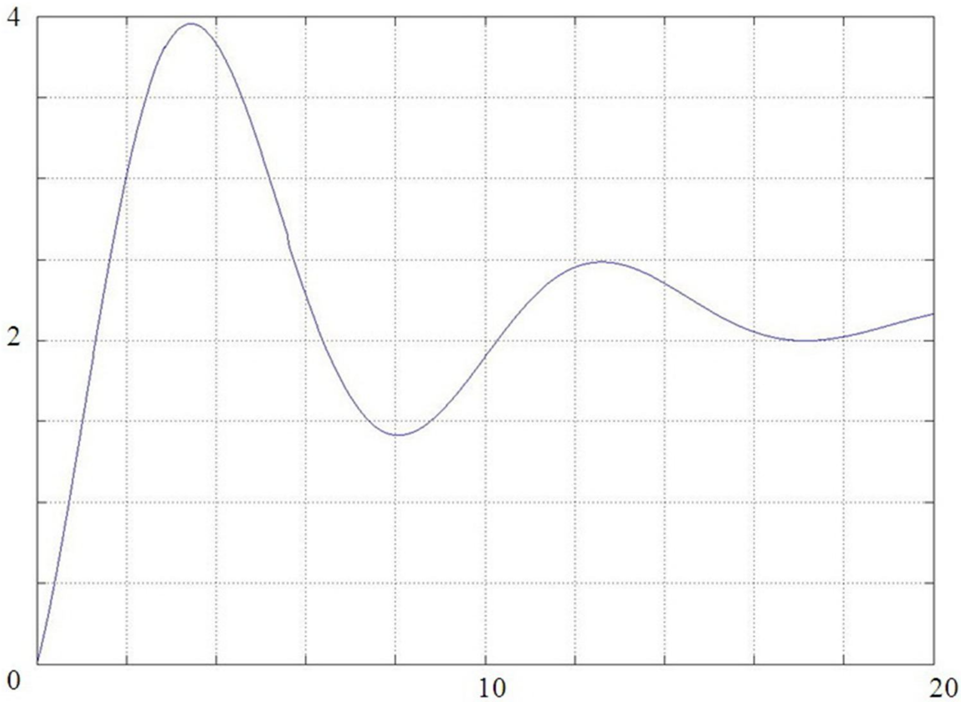

Рис. 1. Решение уравнения Бэгли–Торвика, полученное с использованием матричных функций Миттаг-Леффлера

Для сравнения, на Рис. 2, показано решение того же уравнения, полученное с помощью предложенного И. Подлубным численного метода, который базируется на применении треугольных матриц [10].

Вывод. Численные эксперименты показывают, что предложенные в статье методы позволяют эфективно вычислять матричную обобщенную функцию Миттаг-Леффлера. Представление решений дифференциальных уравнений дробного порядка в терминах матричных обобщенных функций Миттаг-Леффлера делает их запись более компактной и упрощает вычисления.

Дальнейшие исследования будут направлены на применение предложенных методов при моделировании телекомуникационных систем с учетом результатов работы [11].

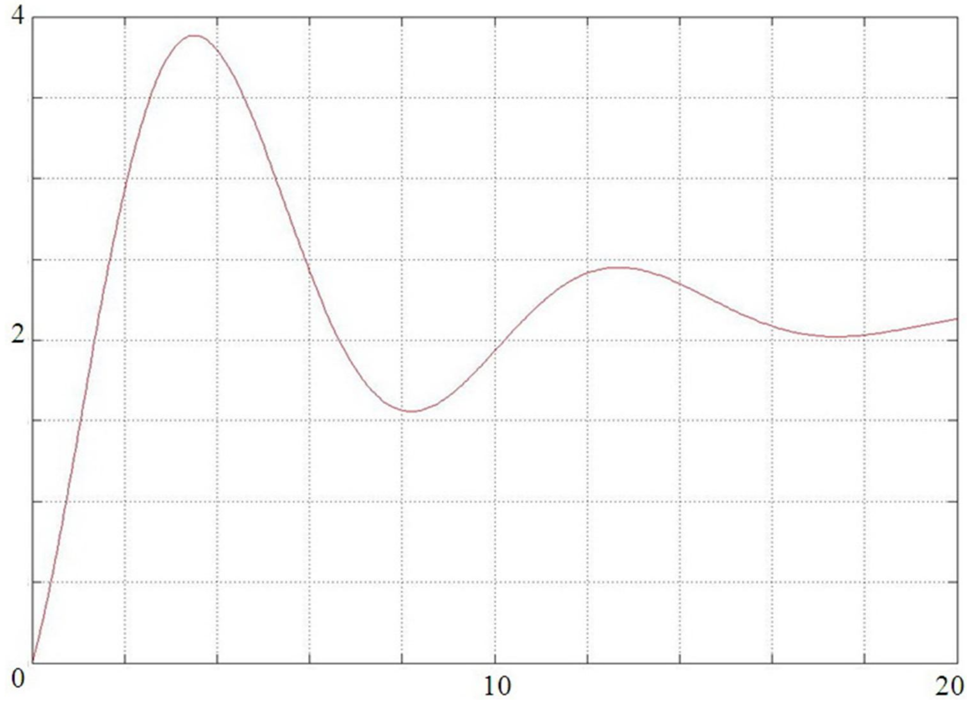

Рис. 2. Решение, полученное при помощи численного метода
с использованием треугольных матриц

Литература:

1. Podlubny I. Fractional-order svstems and $PI^{\lambda}D^{\delta}$-controllers / I. Podlubny // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1999. – Vol. 11, №1. – P. 208-214.

2. Podlubny I. Fractional Differential Equations / I. Podlubny. – San Diego: Academic Press, 1999. – 340 p.

3. Чикрий А. А. Обобщенные матричные функции Миттаг-Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка / А. А. Чикрий, С. Д. Эйдельман // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – №3. – С. 3-32.

4. Чикрий А. А. Представление решений линейных систем с дробными производными Римана-Лиувилля, Капуто и Миллера–Росса / А. А. Чикрий, И. И. Матичин // Проблемы управления и информатики. – 2008. – № 3. – С. 133-142.

5. Чикрий А. А. Игровые задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана–Лиувилля / А. А. Чикрий, С. Д. Эйдельман // Кибернетика и системный анализ. – 2001. – №6. – С. 66-99.

6. Moler C. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later / C. Moler, C. Van Loan // SIAM Review. – 2003. – Vol. 45, №1. – P. 3-49.

7. Matychyn I. Conflict-controlled processes involving fractional differential equations with impulses / I. Matychyn, A. Chikrii, V. Onyshchenko // Mathematica Balkanica. – 2012. – Vol. 26, № 1-2. – P. 159-168.

8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988. – 548 с.

9. Diethelm K. Numerical solution of the Bagley–Torvik equation / K. Diethelm, J. Ford // BIT Numerical Mathematics. – 2002. – Vol. 42, №3. – P. 490-–507.

10. Podlubny I. Matrix approach to discrete fractional calculus / I. Podlubny // Fractional calculus and applied analysis. – 2000. – Vol. 3, №4. – P. 359-386.

11. Матичин І. І. Використання фрактальної модуляції на основі дробового броунівського руху в комунікаційних системах / І. І. Матичин, В. В. Онищенко // Наукові записки Українського науково-дослідного інституту зв'язку. – 2013. – №4(28). – С. 11-16.