УДК 621.391

**Онищенко В. В.,** канд. фіз.-мат. наук, доц. (Тел. +380 (44) 249 25 96. Email: oviva@ukr.net)
**Шевченко С. М.,** канд. пед. наук, доц. (Тел. +380 (44) 249 25 96. Email: sn-shevchenko65@yandex.ua)
*(Державний університет телекомунікацій, м. Київ)*

# ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРА В СИСТЕМАХ УПРАВЛІННЯ

**Онищенко В. В., Шевченко С. М. Застосування лінійних дискретних рівнянь Вольтерра в системах управління.** В статті розглянуто модель, що описує процеси в інформаційно-телекомунікаційних системах за допомогою лінійного дискретного рівняння Вольтерра, у якому стан в кожен момент часу залежить від всієї передісторії процесу. Дослідження моделі проводиться за допомогою теорії диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей та теорії ігор, апарату опорних функцій для опису опуклих множин та властивостей операцій над множинами, зокрема досліджені властивості операцій геометричної різниці Мінковського, суми, перетину, об'єднання. Отримано дієвий опис, що зводить питання про те, чи може система керування забезпечити закінчення гри із даної точки за певне число кроків, до перевірки системи лінійних нерівностей.
***Ключові слова***: інформаційно-телекомунікаційна система, система управління, інформаційний потік, мажорантна гра, опукла множина, диференціальне рівняння, рівняння Вольтерра

**Онищенко В. В., Шевченко С. Н. Применение линейных дискретных уравнений Вольтерра в системах управления.** В статье рассмотрена модель, описывающая процессы в информационно-телекоммуникационных системах с помощью линейного дискретного уравнения Вольтерра, в котором состояние в каждый момент времени зависит от всей предыстории процесса. Исследование модели проводится с помощью теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и теории игр, аппарата опорных функций для описания выпуклых множеств и свойств операций над множествами, в частности свойств операций геометрической разности Минковского, суммы, пересечения и объединения. Получено действенное описание, которое сводит вопрос о том, может ли система управления обеспечить окончание игры из данной точки за определенное число шагов к проверке системы линейных неравенств.
***Ключевые слова*:** информационно-телекомуникационная система, система управления, информационный поток, мажорантная игра, выпуклое множество, дифференциальные уравнения, уравнения Вольтерра

**Вступ. Постановка задачі.** В даний час відбувається інтегрування інформаційно-телекомунікаційних технологій у всі сфери діяльності людини. Це вимагає значного підвищення ефективності процесів інформаційного обміну, що забезпечується як за рахунок удосконалення апаратної інфраструктури, каналів зв'язку, протоколів підтримки їх функціонування, які мають певні фізичні обмеження за своєю природою, так і за рахунок впровадження нових програмних рішень, таких як програмовані апаратні засоби, нові архітектурні рішення щодо інтеграції різноманітних ресурсів, нові інформаційні технології, інтерфейси та протоколи.

Для забезпечення високої якості обслуговування при впровадженні сучасних технологічних рішень у галузі телекомунікацій і надання високотехнологічних телекомунікаційних послуг потрібна наявність системи управління, яка дозволяє проводити моніторинг і швидку модернізацію мережі, своєчасно знаходити і усувати несправності і забезпечувати оперативне підключення споживачів до нових послуг.

Можливості сучасних інформаційно-телекомунікаційних систем залежать від рівня науково-технічних розробок в області програмно-технічних засобів та систем збору, передавання, доступу та аналізу інформації, поєднуючи таким чином програмно-апаратні засоби та технології зв'язку, засоби обчислювальної техніки, програмні технології та системи, тощо. Для вирішення цих нагальних питань застосовується математичне моделювання, яке є найвищою формою моделювання. Воно сприяло розвитку науки й техніки індустріального суспільства, а з появою електронно-обчислювальних засобів обробки інформації привело до бурхливого розвитку сучасного – постіндустріального – суспільства.

В статті ставиться задача розробити модель та дослідити процеси в інформаційно-телекомунікаційних систем за допомогою диференціальних рівнянь та теорії ігор.

**Математичне моделювання.** Під математичним моделюванням розуміють вивчення властивостей об'єкта на його математичній моделі. Метою математичного моделювання є виявлення оптимальних умов протікання процесу, керування ним на основі математичної моделі та перенесення результатів на об'єкт.

Математичні моделі на основі диференціальних рівнянь [1] займають особливе місце в математичному моделюванні технічних об'єктів.

Прикладом таких моделей є звичайне диференціальне рівняння *n*-го порядку:

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = F\left(t, x, \frac{dx(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}(t)}{dt}\right),$$

де $x$ – змінна, яка може бути вектором; $t$ – параметр, який асоціюється з часом; $F$ – деяка функція, взагалі кажучи нелінійна.

Основна перевага диференціальних моделей полягає в тому, що вони дають змогу адекватно описувати динамічні системи, що розвиваються в просторі та часі.

**Моделі різницевих рівнянь.** Сучасні технології побудови систем та мереж зв'язку, їх стандарти та протоколи засновані як на телекомунікаційних технологіях, так і на програмних технологіях, які все більше використовують IP-протоколи та Інтернет/Інтранет – технології.

Розподілені (або Інтернет-базовані) інформаційні системи за рівнями складаються з *апаратної* інфраструктури (апаратура і обчислювальна техніка), *рівня* мережевої інфраструктури, *рівня* мережних операційних систем, *служб* мережних операційних систем, *рівня* служб програмного забезпечення проміжного рівня та *рівня* розподілених прикладних програм. На їх базі утворюються сучасні інформаційно-телекомунікаційні середовища колективного користування, різноманітні прикладні інформаційні системи, які працюють в глобальному середовищі, пошукові системи типу Google, засоби та технології доступу до віддалених інформаційних та обчислювальних ресурсів, системи публікації-підписки, тощо.

Системи розподіленої обробки даних в Intranet-мережі належать до найбільш прогресивних форм організації програмно-технічних засобів у вигляді продуктивного інформаційно-телекомунікаційного середовища, вони базуються на технологіях паралельних і «хмарних» обчислень. Їх проектування і реалізація вимагають умов роботи, за яких користувачі повинні мати доступ до всіх файлів, що зберігаються у вузлах інформаційно-телекомунікаційної мережі. Ефективність доступу користувачів значною мірою залежить від організації інформаційно-обчислювального середовища, в тому числі з використанням мережі Internet.

Основними завданнями розподіленої системи є організація ефективного доступу користувачів до інформаційних і програмних ресурсів, а також ефективна взаємодія як користувачів з ресурсами, так і різних видів ресурсів між собою.

Для моделювання таких систем можна застосовувати моделі різницевих рівнянь, у яких стани системи визначаються послідовністю $x_i$. Час у таких системах визначається дискретною послідовністю і ці стани пов'язані між собою рекурентними співвідношеннями

$$x_i = F\left(i, x_{i-1}, x_{i-2}, \ldots, x_{i-k}\right).$$

Такі різницеві рівняння є не тільки наближеною формою диференціальних рівнянь, але вони можуть відображати ряд специфічних особливостей реальних систем, що моделюються.

Такі різницеві рівняння задають динаміку розподіленої в просторі і часі системи.

**Модель на основі рівняння Вольтерра.** Спробуємо описати процеси в інформаційно-телекомунікаційних системах за допомогою лінійного дискретного рівняння Вольтерра, у якому стан в кожен момент часу залежить від всієї передісторії процесу.

Завдання прийняття рішення про найефективнішу управляючу дію в теорії інформації формулюється таким чином: знаючи цільовий стан об'єкту управління, на основі його інформаційної моделі, визначити такі вхідні параметри, які з урахуванням передісторії і поточного стану об'єкту управління, а також впливу середовища, з найбільшою ефективністю переведуть його в цільовий стан, що характеризується вихідними параметрами.

Розглянемо спрощену ситуацію: інформація про функціонування телекомунікаційної мережі та двох її компонентів надходить до системи управління. В результаті обробки інформації, що надійшла до системи управління від об'єктів (елементів) управління, формується узагальнена інформаційна модель стану мережі телекомунікацій, на підставі якої визначаються рішення різного рівня і виконуються необхідні процедури управління.

Для опису цієї ситуації застосуємо лінійного дискретного рівняння Вольтерра вигляду:

$$x(t+1)=\sum_{i=0}^{t}[A(i)x(t-i)-B(i)u(t-i)+C(i)v(t-i)], \tag{1}$$

де $A(i), B(i), C(i), i=\overline{0,t}$ – сталі квадратні матриці розмірності $n\times n$.

Розв'язок рівняння (1) визначається формулою:

$$x(t)=K(t-1)x(0)-\sum_{j=0}^{t-1}L(k-1-j)u(j)+\sum_{g=0}^{t-1}N(k-1-g)v(g),$$

де родини лінійних операторів $K(t), L(t), N(t)$ $(t=1\ldots n)$ визначаються рекурентними співвідношеннями:

$$K(t)=A(t)+\sum_{i=0}^{t-1}A(i)K(t-1-i),\quad K(0)=A(0),\quad t=\overline{1,\ n},$$

$$L(t)=B(t)+\sum_{i=0}^{t-1}A(i)L(t-1-i),\quad L(0)=B(0),\quad t=\overline{1,\ n},$$

$$N(t)=C(t)+\sum_{i=0}^{t-1}A(i)N(t-1-i),\quad N(0)=C(0),\quad t=\overline{1,\ n}.$$

**Конфліктно-керований процес.** Процес функціонування мережі в кожний момент часу $t$ характеризується вектором змінних станів $\{x_1(t), x_2(t),\ldots, x_n(t)\}$. Вказані змінні станів є випадковими величинами зі своїми законами розподілу $P(x_i)$. Управління мережею – процес приведення змінних стану мережі за заданий час з початкового стану до встановленого. Наприклад, $x_i$ – термін часу доставки інформації між двома вузлами мережі. Якість функціонування мережі характеризується середньою затримкою повідомлень, яка обчислюється середньою величиною затримки на всіх вузлах.

Кожну сукупність значень параметрів інформаційної мережі можна розглядати як певний стан мережі. Спробуємо описати систему управління мережею за допомогою моделі мажорантної гри [2]. Будемо говорити, що в процесі управління дискримінується перший інформаційний потік, якщо на кожному кроці при виборі керування для другого інформаційного потоку, відоме керування першого потоку. Дискретну гру з дискримінацією першого потоку назвемо мажорантою, а з дискримінацією другого – мінорантною. Слід зазначити, що вимога про інформованість є природньою для системи керування.

Розглянемо мажорантну гру, описану лінійним дискретним рівнянням Вольтерра [3]. Нехай рух об'єкту описується системою різницевих рівнянь (1), де $t=0, 1, \ldots; x$ – $n$-вимірний вектор стану об'єкта, $u(t), v(t)$ – керуючи параметри інформаційних потоків із областей керування $U(t), V(t)$ в $t$ момент часу, $A(t), B(t), C(t)$ – невироджені сталі матриці вимірності $n\times n$, що складаються з ймовірностей переходу системи з одного стану в інший. Крім того задано термінальну множену $M$ (тобто вузол, куди необхідно скерувати інформаційний потік). Мета системи управління – скерувати перший інформаційний потік до відповідного вузла мережі, незважаючи на перешкоди другого потоку.

Нехай $X$ – довільна множина в $R^n$. Множиною досяжності першого інформаційного потоку за один крок з множини $X$ назвемо сукупність всіх таких точок, в кожну з яких інформаційний потік може надійти з точок множини $X$ за один крок в силу системи (1).

Позначимо через $P_1$ оператор, який ставить у відповідність множині $X$ множину досяжності першого інформаційного потоку в мажорантній грі (1)при довільному керуванні другим потоком:

$$P_1(X)=[[[(K(t-1)X\underline{*}(-V^*(t-1)-U^*(t-1)))\underline{*}$$

$$\underline{*}(-V^*(t-2))-U^*(t-2)]\underline{*}\ldots]\underline{*}(-V^*(0))-U^*(0)].$$

В подальшому важливу роль будуть відігравати оператори, в певному розумінні обернені до $P_1$. Позначимо через $P_1^{-1}(X)$ сукупність усіх точок, з кожної з яких система керування може забезпечити надходження потоку в силу системи (1) за один крок на довільну множину $X$ для довільного керування $v(x,u)\in V$.

$$P_1^{-1}(X)=K^{-1}(t-1)[[\ldots[[X\underline{*}V^*(t-1)+U^*(t-1)]\underline{*}$$

$$\underline{*}V^*(t-2)+U^*(t-2)]\ldots]\underline{*}V^*(0)+U(0)].$$

**Теорема 1.** Для того, щоб мажорантну гру (1) можна було закінчити із початкового положення $z(0)$ не більше, ніж за $t$ кроків достатньо, щоб

$$Z(0)\subset\bigcup_{i=0}^{t}M_1^i.$$

***Доведення:*** Використаємо метод математичної індукції. Нехай

$$Z^0\subset M_1^1\cup M.$$

Це означає, що або $Z^0\subset M$, або $Z^0\subset M_1^1$,. Із другого включення в силу означення оператора $P_1^{-1}$ витікає, що існує таке $u^0=u(z^0)\in U$, що для довільного $v^0=v(z^0,u^0)\in V$

$$[[[(K(t-1)z^0\underline{*}(-V^*(t-1)-U^*(t-1)))\underline{*}$$

$$\underline{*}(-V^*(t-2))-U^*(t-2)]\underline{*}\ldots]\underline{*}(-V^*(0))-U^*(0)]\in M.$$

Припустимо, що із того, що $Z^0\subset\bigcup_{j=0}^{i-1}M_1^j$ витікає, що із точки $z^0$ (1) можна закінчити не більше, ніж за $i-1$ кроків.

Нехай $Z^0\subset\bigcup_{j=0}^{i}M_1^j$. Тоді або $Z^0\subset\bigcup_{j=0}^{i-1}M_1^j$, або $Z^0\subset M_1^i$.

В першому випадку із припущення індукції витікає потрібний результат.

В іншому випадку витікає, що існує таке $u(z^0) \in U$, що для довільного $v^0 = v(z^0, u^0) \in V$

$$[[[(K(t-1)z^0 \underline{*}(-V^*(t-1) - U^*(t-1)))\underline{*}$$

$$\underline{*}(-V^*(t-2)) - U^*(t-2)]\underline{*} \ldots ]\underline{*}(-V^*(0)) - U^*(0)] \in M_1^{i-1},$$

і оскільки $M_1^{i-1} \subset \bigcup_{j=0}^{i-1} M_1^j$, то за припущенням індукції отримаємо, що із початкового положення $z^0$ гру (1) можна закінчити не більше, ніж за $i$ кроків.

**Теорема 2.** Для того, щоб мажорантну ігрову задачу, описану лінійним дискретним рівнянням Вольтера (1) можна було закінчити не більше, ніж за $t$ кроків із початкового положення $z(0)$ необхідно і достатньо, щоб

$$Z(0) \subset \tilde{M}_1^t \cup M,$$

***Доведення:*** ***Необхідність:*** Доведемо від супротивного. Нехай

$$Z(0) \not\subset \tilde{M}_1^t \cup M,$$

але мажорантну ігрову задачу (1) із точки $z(0)$ можна закінчити не більше, ніж за $t$ кроків. Для $z(0)$ і для довільного $u(z(0)) \in U(0)$, існує таке керування $v(z(0), u(0)) \in V(0)$, що

$$K(t-1)z(0) - \sum_{j=0}^{t-1} U^*(j) + \sum_{g=0}^{t-1} V^*(g) \notin M,$$

тому що інакше

$$Z(0) \subset \tilde{M}_1^1 \subset \tilde{M}_1^t,$$

в силу $\tilde{M}_1^1 \subset \tilde{M}_1^2 \subset \ldots \subset \tilde{M}_1^t \subset \ldots$, , а це суперечить припущенню.

Припустимо, що із точки $z(0)$ можна влучити на множину $(\tilde{M}_1^t \cup M)$ за один крок в силу (1). Тоді для довільного $u(z(0)) \in U(0)$, , існує таке $v(z(0), u(0)) \in V(0)$, що

$$z(1) = K(0)z(0) - U^*(0) + V^*(0) \in \tilde{M}_1^t \bigcup M,$$

де

$$K(0) = A(0),$$

$$U^*(0) = B(0)u(0),$$

$$V^*(0) = C(0)v(0).$$

Отже $z(1) = A(0)z(0) - B(0)u(z(0)) + C(0)v(z(0), u(0)) \in \tilde{M}_1^t \bigcup M,$
але $Z(1) \not\subset \tilde{M}_1^{t-1} \cup M$.

Далі, на кожному кроці $i$ $(0 \le i \le t)$ в силу структури послідовності множин $\{\tilde{M}_1^i\}_i$ має місце наступне. Якщо $Z \subset \tilde{M}_1^{i+1}$, але $Z \not\subset \tilde{M}_1^i \cup M$, то для довільного $u(z(t)) \in U(t)$ існує $v(z(t), u(t)) \in V(t)$, що

$$z(1) = A(0)z(0) - B(0)u(z(0)) + C(0)v(z(0), u(0)) \notin \tilde{M}_1^{i-1} \bigcup M,$$

Отже, є такі керування, що перший інформаційний потік не може потрапити із початкового положення $z(0)$ на множину $M$ в силу (1) раніше, ніж за $t+1$ крок. Отримане протиріччя доводить необхідність теореми.

***Достатність*** витікає із структури послідовності множин $\{\tilde{M}_1^t\}_t$ та леми [4] і приводиться аналогічно доведенню теореми 1.

**Теорема 3.** Нехай *M, U, V* – опуклі замкнені обмежені множини

$$M \subset K^{-1}(t-1)[[\ldots[[M \underline{*} V^*(t-1) + U^*(t-1)] \underline{*}$$

$$\underline{*} V^*(t-2) + U^*(t-2)]\ldots] \underline{*} V^*(0) + U^*(0)],$$

де $V^*(t) = N(t-1-g)v(g),\ g = \overline{0,t-1}$, $U^*(t) = L(t-1-j)u(j),\ j = \overline{0,t-1}$,

$K(t-1), t = \overline{1,n},\ N(t-1-g), g = \overline{0,t-1},\ L(t-1-j), j = \overline{0,t-1}$ – визначаються рекурентними співвідношеннями (2).

Тоді для того, щоб мажорантну ігрову задачу (1) із вихідного положення *z(0)*, можна було закінчити не більше, ніж за *t* кроків необхідно і достатньо, щоб *z(0)* було розв'язком системи лінійних нерівностей

$$(z, \psi) \le W_{M_1^k}(\psi) \quad \forall \psi \in R^n,$$

де $W_{M_1^t}(\psi)$ [5,6] має вигляд [4]:

$$W_{M_1^s}(\psi) = W_M(K^{*s}(t-1)\psi) + \sum_{j=0}^{t-1}\sum_{i=1}^{s} W_{U^*(j)}(K^{*i}(t-1)\psi) - \sum_{j=0}^{t-1}\sum_{i=1}^{s} W_{V^*(j)}(K^{*i}(t-1)\psi).$$

**Висновок.** Отож, можемо зробити висновок, що для мажорантної ігрової задачі, описаної лінійним дискретним рівнянням Вольтера, ми дали дійовий опис, що зводить питання про те, чи може система керування забезпечити закінчення гри із даної точки за певне число кроків, до перевірки системи лінійних нерівностей.

Впровадження нових технологій, зростання обсягу послуг – все це приводить до відповідного збільшення обсягу інформації управління, яка циркулює в мережі і може бути джерелом її значного завантаження. Таким чином, рішення задачі мінімізації обсягів інформації управління набуває великого значення. Випадок двох інформаційних потоків в подальшому планується розширити на *n* та змоделювати відповідні процеси.

**Література**

1. Матичин І. І. Використання фрактальної модуляції на основі дробового броунівського руху в комунікаційних системах / І. І. Матичин, В. В. Онищенко // Наукові записки Українського науково-дослідного інституту зв'язку. – 2013. – №4(28). – С. 11-16.

2. Чикрий А. А. О линейных дискретных играх качества / А. А. Чикрий / Кибернетика. – 1971. – №5.

3. Гайшун И. В. Управляемость систем, описываемых линейными дискретными уравнениями Вольтерра / И. В. Гайшун, М. П. Дымков // Автоматика и телемеханика. – 2000. – №7. – С. 88-100.

4. Онищенко В. В. Линейная дискретная игра с нечеткими по Заде параметрами / В. В. Онищенко // Кибернетика и вычислительная техника. – 1999. – 125. – С. 35-64.

5. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б. Н. Пшеничный. – Москва : Наука, 1980. – 330 с.

6. Пшеничный Б. Н. Линейные дифференциальные игры / Б. Н. Пшеничный // Автоматика и телемеханика. – 1968. – №1.

Дата надходження в редакцію: 19.01.2015 р. Рецензент: д.т.н., проф. І. І. Матичин