УДК 621.391+519.24

Попов А. А., канд. техн. наук, доц. (Тел.: +380 (66) 299 29 80. E-mail: andoff@rambler.ru)
(*Центральный НИИ вооружения и военной техники ВС Украины*)

АЛГОРИТМ И УСТРОЙСТВО ФОРМИРОВАНИЯ *M*-ОЦЕНОК НА ОСНОВЕ ОПЕРАЦИЙ *L*-ГРУППЫ

Попов А. О. Алгоритм та пристрій формування *M*-оцінок на основі операцій *L*-групи. Запропоновано підхід до опису *M*-оцінок на основі операцій *L*-групи. В результаті застосування такого підходу отримані алгоритм та пристрій формування *M*-оцінок. Методом статистичного моделювання проаналізовано сходимість результатів вимірювання до параметру, що оцінюється. Наведено значення абсолютної асимптотичної ефективності оцінювання параметру зсуву, якою характеризується запропонований пристрій формування *M*-оцінки на широкому класі симетричних розподілень помилок вимірювань.

Ключові слова: вибірковий простір, функція Хьюбера, метод Ньютона, статистичне моделювання, модель Тьюки, *L*-група, *M*-оцінка, помилка вимірювання, ітеративний алгоритм

Попов А. А. Алгоритм и устройство формирования *M*-оценок на основе операций *L*-группы. Предлагается подход к описанию *M*-оценок на основе операций *L*-группы. В результате применения такого подхода получены алгоритм и устройство формирования *M*-оценок. Методом статистического моделирования проанализирована сходимость результатов измерения к оцениваемому параметру. Приведены значения абсолютной асимптотической эффективности оценивания параметра сдвига, которой характеризуется приведенное устройство формирования *M*-оценки на широком классе симметричных распределений ошибок измерений.

Ключевые слова: выборочное пространство, функция Хьюбера, метод Ньютона, статистическое моделирование, модель Тьюки, *L*-группа, *M*-оценка, ошибка измерения, итеративный алгоритм

Введение. Одной из наиболее общих задач обработки сигналов на фоне помех (шумов) является оценивание сигналов и их параметров. К данной задаче могут быть сведены также и другие, например, задачи обнаружения, различения и разрешения сигналов.

В большей части работ по точечному оцениванию – от учебной до узкоспециальной – наиболее употребительной моделью косвенного измерения неизвестного неслучайного скалярного параметра λ является случай его аддитивного взаимодействия со статистически независимыми ошибками измерений в линейном выборочном пространстве $\mathcal{LS}(\mathcal{X},\mathcal{B}_\mathcal{X};+)$ [1...4]:

$$X_i = f(\lambda) + N_i,$$

где $f(\lambda)$ – некоторая известная взаимнооднозначная функция от измеряемого параметра;

$\{N_i\}$ – независимые ошибки измерения с распределением из класса распределений с симметричной плотностью распределения вероятностей $p_N(z) = p_N(-z)$, представленные выборкой $N=(N_1,\ldots,N_n)$, $N_i \in N$, причем $N \in \mathcal{LS}(\mathcal{X},\mathcal{B}_\mathcal{X};+)$;

$\{X_i\}$ – результаты измерений, представленные выборками $X=(X_1,\ldots,X_n)$, $X_i \in X$: $X \in \mathcal{LS}(\mathcal{X},\mathcal{B}_\mathcal{X};+)$;

«+» – операция суммы линейного выборочного пространства $\mathcal{LS}(\mathcal{X},\mathcal{B}_\mathcal{X};+)$; $i=1,\ldots,n$ – индекс элементов статистических совокупностей $\{N_i\}$, $\{X_i\}$;

n – объем выборок $N=(N_1,\ldots,N_n)$, $X=(X_1,\ldots,X_n)$.

Исторически первыми и, одновременно, наиболее простыми являются оценки $\hat{\lambda}_{\text{МНК}}$, $\hat{\lambda}_{\text{МНМ}}$, получаемые на основе метода наименьших квадратов (МНК) и метода наименьших модулей (МНМ) в соответствии с критериями минимума сумм квадратов и модулей ошибок измерения соответственно [2, 5]:

$$\hat{\lambda}_{\text{МНК}} = \arg\min_{\lambda}\left\{\sum_i (X_i - f(\lambda))^2\right\} = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right); \tag{1a}$$

$$\hat{\lambda}_{\text{МНМ}} = \arg\min_{\lambda}\left\{\sum_i |X_i - f(\lambda)|\right\} = f^{-1}[\underset{i\in 1,\dots,n}{\text{med}}\{X_i\}], \tag{1б}$$

где $f^{-1}[*]$ – функция, обратная функции $f(\lambda)$ от параметра λ;

$\text{med}\{X_i\}$ – выборочная медиана наблюдений $\{X_i\}$.

Оценки $\hat{\lambda}_{\text{МНК}}$, $\hat{\lambda}_{\text{МНМ}}$ являются асимптотически эффективными в случае нормального и лапласовского распределения ошибок измерения $\{N_i\}$ соответственно.

Как было замечено Дж. Тьюки (J.W. Tukey) [6], даже в простом случае, когда элементы выборки $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ независимы и имеют распределение модели Тьюки $T(\varepsilon, \tau)$:

$$F(x) = (1-\varepsilon)\Phi(x) + \varepsilon\Phi(x/\tau), \quad \Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x} \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right)dx, \tag{2}$$

при значениях параметра ε на интервале $\varepsilon \in [0.002, 0.5]$, а τ=3, оценка $\hat{\lambda}_{\text{МНМ}}$ параметра сдвига характеризуется большей асимптотической относительной эффективностью по сравнению с оценкой $\hat{\lambda}_{\text{МНК}}$.

Вместо того, чтобы предполагать распределение генеральной совокупности F известным, Р. Хьюбер (P.J. Huber) предложил использовать класс "ε-загрязненных" распределений [7]:

$$F(x) = (1-\varepsilon)G(x) + \varepsilon H(x), \tag{3}$$

где G – известное распределение, а H – произвольное неизвестное распределение, причем оба распределения G и H симметричны относительно нуля; $\varepsilon = \text{const}$.

В практических приложениях достаточно обоснованные допущения об известности распределения генеральной совокупности встречаются крайне редко, в связи с этим ряд специалистов в области математической статистики формулируют следующие вопросы [4, 8]. *Во-первых*, каково поведение оптимальных (по некоторому критерию) оценок, построенных для одних распределений, в случае их применения к выборкам с другими распределениями, а, *во-вторых*, каким образом возможно получение оценок, устойчивых к различным распределениям из заданного класса, в том числе и к классу «ε-загрязненных» распределений.

Целью последующего рассмотрения будет получение алгоритма и устройства формирования *M*-оценок неизвестного неслучайного параметра сдвига в выборочном пространстве со свойствами *L*-группы, устойчивых по отношению к широкому классу симметричных распределений.

Основная часть. В существующей алгебраической литературе *L*-группы известны достаточно давно и хорошо исследованы [9, 10]. Выборочное пространство $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{B}_{\mathcal{X}};+,\vee,\wedge)$ со свойствами *L*-группы определяется как вероятностное пространство $(\mathcal{X},\mathcal{B}_{\mathcal{X}})$, в котором одновременно выполняются аксиомы дистрибутивной решетки $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{B}_{\mathcal{X}};\vee,\wedge)$ с операциями верхней и нижней граней соответственно: $a\vee b=\sup_{\mathcal{L}}\{a,b\}$, $a\wedge b=\inf_{\mathcal{L}}\{a,b\}$; $a,b\in\mathcal{L}(\mathcal{X},\vee,\wedge)$, а также аксиомы аддитивной коммутативной группы $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{B}_{\mathcal{X}};+)$.

Последнее обстоятельство позволяет, с одной стороны, существенным образом расширить алгебраические свойства рассматриваемого выборочного пространства, а, с другой стороны, описывать алгоритмы и устройства обработки сигналов в терминологии не только аддитивной коммутативной группы линейного пространства, но и с привлечением операций решетки.

Некоторый компромисс между оценками в виде выборочного среднего $\bar{X}$ и медианы $\tilde{X}$ был предложен Р. Хьюбером [11]. Этот подход основывается на том, что выборочное среднее $\bar{X}$ и медиана $\tilde{X}$ есть оценки (1а), (1б), которые минимизируют функции $\sum_i (X_i - m)^2$ и $\sum_i |X_i - m|$ соответственно, где m – параметр сдвига распределения генеральной совокупности. Р. Хьюбер предложил минимизировать вместо этого функцию [7]:

$$\sum_i \rho(X_i - m), \tag{4}$$

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & |x| \le k; \\ k\,|x| - \frac{1}{2}k^2, & |x| \ge k. \end{cases} \tag{4a}$$

Определение 1. Оценками Хьюбера называются оценки, минимизирующие (4), при ρ, заданном соотношением (4а).

Оценки Хьюбера образуют подмножество класса *М*-оценок, которые определяются следующим образом.

Определение 2. *М*-оценками называются оценки, минимизирующие (4), при произвольном виде ρ.

Если ρ имеет производную $\rho' = \psi$, то *М*-оценки можно определить как решения уравнения:

$$\sum_i \psi(X_i - m) = 0. \tag{5}$$

В частном случае, когда *G* в распределении *F* (3) тождественно равно стандартному нормальному распределению, решением задачи минимизации верхней грани дисперсии распределения *F* является *М*-оценка Хьюбера, соответствующая (4а), так что минимаксная функция ψ определяется соотношением:

$$\psi(x) = \begin{cases} -k, & x \le -k; \\ x, & |x| < k; \\ k, & x \ge k, \end{cases} \tag{6}$$

или, более компактно:

$$\psi(x) = k \wedge (x \vee -k), \tag{7}$$

где ε и *k* связаны тождеством [4; §5.6(14)]:

$$\frac{1}{1-\varepsilon} = \int_{-k}^{k} \varphi(x)dx + \frac{2}{k}\varphi(k),\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp[-x^2/2].$$

С учетом (7) и (5), *М*-оценки Хьюбера можно определить как решения уравнения:

$$\sum_i k \wedge [(X_i - m) \vee -k] = 0. \tag{8}$$

Здесь заметим, что уравнение (8) представляет собой соотношение (5), записанное в терминологии выборочного пространства $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{B}_\mathcal{X};+,\vee,\wedge)$ со свойствами *L*-группы.

Для решения уравнения (8) можно воспользоваться каким-либо численным методом, например, методом Ньютона. В результате вся процедура нахождения параметра *m* сводится к итеративному вычислению выражения:

$$\hat{m}_j = \hat{m}_{j-1} + \hat{\sigma} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} k \wedge [(X_i - \hat{m}_{j-1}) \vee -k]}{\sum_{i=1}^{n} [1(X_i + k - \hat{m}_{j-1}) - 1(X_i - k - \hat{m}_{j-1})]}, \tag{9}$$

где $\hat{m}_j$, $\hat{m}_{j-1}$ – оценка параметра сдвига *m* на текущем *j*-ом и предыдущем (*j*–1)-ом шагах итерации;

$\hat{\sigma}$ – некоторая оценка параметра масштаба распределения;

1(*t*) – единичная ступенчатая функция Хевисайда.

В качестве начального значения $\hat{m}_{j=0}$ параметра сдвига m можно принять *медианное* значение $\text{med}(X)$ выборки $X=(X_1,X_2,...,X_n)$: $\hat{m}_{j=0}=\text{med}(X)$, *среднее* значение выборки $\overline{X}=(X_1+...+X_n)/n$: $\hat{m}_{j=0}=\overline{X}$, или з*начение*, равное нулю: .

Заметим, что знаменатель дроби в формуле (9) представляет собой производную от функции (8), которая фигурирует в числителе. Для практических приложений этот знаменатель можно заменить на объем выборки *n*. С учетом замены формула (9) примет более простой вид:

$$\hat{m}_j=\hat{m}_{j-1}+\frac{\hat{\sigma}}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}k\wedge[(X_i-\hat{m}_{j-1})\vee -k]. \qquad (10)$$

Структурная схема устройства, обеспечивающего реккурентное вычисление оцениваемого параметра сдвига *m* показана на Рис. 1. На Рис. 2 показаны результаты вычисления *M*-оценки Хьюбера данным устройством по формуле (10).

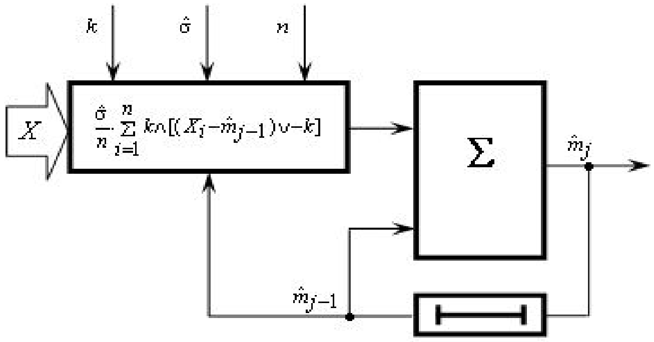

Рис. 1. Структурная схема устройства

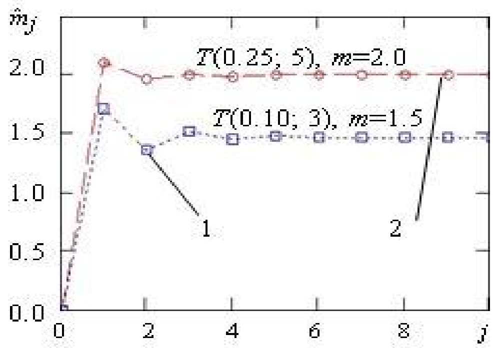

Рис. 2. Результаты вычисления

Итерационные кривые 1, 2 соответствуют условиям оценивания параметров сдвига *m*=2.0, 1.5 в моделях Тьюки *T*(0.25;5), *T*(0.10;3) (2) соответственно. Объем выборки *n* в обоих случаях равнялся 10. Как следует из кривых 1, 2, применяемый метод Ньютона обеспечивает быструю сходимость результатов $\hat{m}_j$ к оцениваемому параметру *m* и в случае сильного "загрязнения" (*T*(0.25;5)) и в случае относительно слабого "загрязнения" (*T*(0.10;3)) нормально распределенных результатов измерения.

К недостаткам метода следует отнести необходимость априорной информации о распределении элементов выборки для формирования значений коэффициента *k* и оценки $\hat{\sigma}$ параметра масштаба, а также возможность расхождения итерационной процедуры в случае недостаточно точно сформированной оценки $\hat{\sigma}$.

Что же касается эффективности *M*-оценки Хьюбера, то на основании тождества (16), приведенного в [4, §5.6], она эквивалентна эффективности *L*-оценки в виде усеченного среднего $L_n(X,\alpha)$, причем в соответствии с выражением (19), приведенным в [4, §5.6] $\alpha=F(-k)$ на распределении *F*.

Значения абсолютной асимптотической эффективности оценок усеченного среднего $L_n(X,\alpha)$, вычисленные на основе формулы (7) из [4, §5.4] для некоторых симметричных распределений приведены в Табл. 1.

В таблице приняты следующие обозначения для распределений: $N(a,b)$ – нормальное распределение; $T(\varepsilon,\tau)$ – модель Тьюки; $St(\nu)$ – распределение Стьюдента с ν степенями свободы; $L(a,b)$ – логистическое распределение; $C(a,b)$ – распределение Коши; $DE(a,b)$ – двухстороннее показательное распределение (распределение Лапласа).

Как следует из таблицы, абсолютная асимптотическая эффективность *M*-оценок может быть достаточно высокой на различных классах симметричных распределений, при выборе коэффициента k, соответствующего значениям $\alpha = F(-k)$ оценок $L_n(X,\alpha)$, взятым на интервале [0.125, 0.25].

Абсолютная асимптотическая эффективность оценок Табл. 1

Распределение \ α	0	1/20	1/8	1/4	3/8	1/2
$N(a,b)$	1.00	0.99	0.94	0.84	0.74	0.637
$T(0.01,3)$	0.95	0.99	0.94	0.85	0.75	0.63
$T(0.05,3)$	0.81	0.975	0.96	0.88	0.78	0.60
$L(a,b)$	0.91	0.983	0.99	0.947	0.86	0.75
$DE(a,b)$	0.50	0.601	0.693	0.818	0.917	1.00
$St(5)$	0.80	0.961	0.99	0.96	0.88	0.77
$St(3)$	0.50	0.85	0.96	0.98	0.92	0.81
$C(a,b)$	0	0.23	0.503	0.79	0.88	0.81

Выводы

1. Предложенный подход к описанию *M*-оценок на основе операций *L*-группы позволяет существенно расширить алгебраические свойства выборочного пространства, что обеспечивает возможность получения новых алгоритмов и устройств оценивания параметров сигнала, которые более просты в технической реализации.

2. Применение метода Ньютона в предложенном алгоритме оценивания обеспечивает быструю сходимость результатов к оцениваемому параметру как в случае слабого "загрязнения" (*T*(0.10;3)), так и в случае относительно сильного «загрязнения» (*T*(0.25;5)) нормально распределенных результатов измерения.

3. *M*-оценка, формируемая устройством, показанным на Рис. 1 на основе алгоритма (10), характеризуются достаточно высокой абсолютной асимптотической эффективностью на широком классе симметричных распределений ошибок измерений.

Литература

1. Закс Ш. Теория статистических выводов / Ш. Закс. – Москва : Мир, 1975. – 776 с.

2. Кендалл М. Статистические выводы и связи / М. Кендалл, А. М. Стюарт. – Москва : Наука, 1973. – 900 с.

3. Крамер Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. – Москва : Мир, 1975. – 632 с.

4. Леман Э. Теория точечного оценивания / Э. Леман. – Москва : Наука, 1991. – 448 с.

5. Мудров В. И. Метод наименьших модулей / В. И. Мудров, В. Л. Кушко. – Москва : Знание, 1971. – 64 с.

6. Tukey J. W. A survey of sampling from contaminated distributions / J. W. Tukey // Contributions to Probability and Statistics. – Stanford University Press, 1960. – PP. 448-485.

7. Huber P. J. Robust Statistics / P. J. Huber. – N.Y., John Wiley & Sons, 1981. – 308 p.

8. Дэйвид Г. Порядковые статистики / Г. Дэйвид. – Москва : Наука, 1979. – 336 с.

9. Биркгоф Г. Теория решеток / Г. Биркгоф. – Москва : Наука, 1984. – 568 с.

10. Артамонов В. А. Общая алгебра. Т. 1 / В. А. Артамонов, В. Н. Салий, Л. А. Скорняков и др.; под общ. ред. Л. А. Скорнякова. – Москва : Наука, 1991. – 592 с.

11. Huber P. J. Robust estimation of a location parameter / P. J. Huber // Ann. Math. Statist. – 1964. – № 35. – PP. 73-101.

Дата надходження в редакцію: 14.01.2015 р. Рецензент: д.т.н., проф. Г. М. Розорінов