УДК 621.391

Корпань Я.В., канд. техн. наук, доц. (Тел.: +380 63 329 93 67. E-mail: populusdocti@gmail.com)
(Черкаський державний технологічний університет)

ВИКОРИСТАННЯ ДВІЙКОВИХ КОДІВ НА ОСНОВІ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ УОЛША ДЛЯ ПІДВИЩЕННЯ ЗАВАДОСТІЙКОСТІ СИСТЕМ ЦИФРОВОГО ЗВ'ЯЗКУ

Корпань Я. В. Використання двійкових кодів на основі послідовностей Уолша для підвищення завадостійкості систем цифрового зв'язку. В роботі розглядаються питання оцінки завадостійкості систем цифрового зв'язку при використанні двійкових кодів на основі послідовностей Уолша. Підтверджено, що двійкові коди на основі послідовностей Уолша дозволяють реалізувати цифрові алгоритми їх когерентної демодуляції та м'якого декодування з ефективним виправленням помилок. Тобто отримується оптимальна обробка широкосмугового сигналу з малою базою та забезпечується висока завадостійкість передачі дискретних повідомлень.

Ключові слова: цифровий зв'язок, оцінка завадостійкості, послідовність Уолша, широкосмуговий сигнал, когерентна демодуляція, м'яке декодування

Корпань Я. В. Использование двоичных кодов на основе последовательностей Уолша для повышения помехоустойчивости систем цифровой связи. В работе рассматриваются вопросы оценки помехоустойчивости систем цифровой связи при использовании двоичных кодов на основе последовательностей Уолша. Подтверждено, что двоичные коды на основе последовательностей Уолша позволяют реализовать цифровые алгоритмы их когерентной демодуляции и мягкого декодирования с эффективным исправлением ошибок. То есть получается оптимальная обработка широкополосного сигнала с малой базой и обеспечивается высокая помехоустойчивость передачи дискретных сообщений.

Ключевые слова: цифровая связь, оценка помехоустойчивости, последовательность Уолша, широкополосный сигнал, когерентная демодуляция, мягкое декодирование

На сьогоднішній день в системах цифрового зв'язку для підвищення завадостійкості використовують перетворення прийнятої/переданої інформації – кодування [1, 2]. Відомо, що у багатьох випадках процесу кодування, якщо не використовується зворотний зв'язок, на приймальні стороні в демодуляторі виділяються елементи переданих кодованих повідомлень (логічні "0" або "1"), а вже потім у декодері здійснюється виправлення виникаючих помилок. Потрібно відмітити, що частина виявлених помилок при цьому виправляється правильно, але якщо їх кратність велика, то часто відбувається помилкове виправлення, що призводить до збільшення помилок у порівнянні з їх початковим числом.

Враховуючи те, що корегуюча здатність коротких двійкових кодів порівняно невелика, то для підвищення їх завадостійкості необхідно значно збільшувати довжину послідовності (до десятків тисяч елементів), а також використовувати ітеративні процедури декодування з рішеннями, як, наприклад, в турбо-кодах [3]. Тому аналіз можливостей кодових послідовностей, а також оцінка систем цифрового зв'язку, які їх використовують, з метою подальшого підвищення завадостійкості системи є актуальної задачею.

Відомо, що в ряді випадків для оцінки ймовірності виникнення помилкового декодування зручно використовувати теорему Фінка [2]. Сутність теореми Фінка полягає в тому, що ймовірність помилкового декодування зачумленого сигналу при прийомі в цілому менше, ніж при посимвольному методі прийому з виправленням максимально можливої кількості помилок, але вона виявляється більше, ніж сумарна ймовірність трансформації однієї кодової послідовності в будь яку іншу. Тобто теорема Фінка стверджує, що при любому коді має місце нерівність

$$P_1 \geq P_2 \geq P_3 \geq P_4,$$

де P_1 – ймовірність того, що при посимвольному методі прийому кодова комбінація прийнята з помилкою (незалежно від того, чи можна цю помилку виявити чи виправити);

P_2 – ймовірність того, що при посимвольному методі прийому та виправленні максимально можливої кількості помилок сталася невиправна помилка;

P_3 – ймовірність того, що комбінація прийнята помилково при ідеальному прийомі в цілому.

P_4 – ймовірність того, що при посимвольному методі прийому прийнята комбінація виявиться співпадаючою з однією з комбінацій коду, але не з тією, що передавалась.

Відомо, що при здійсненні процесу декодування всієї прийнятої кодової послідовності можна використовувати корегуючу здатність декодера на рівні, який дозволяє забезпечити істотне зростання завадостійкості при порівняно коротких кодах.

В ряді задач практичного застосування перетворень кодових послідовностей краще використовувати не тільки функції, які впорядковані по Уолшу, але й по Адамару та по Пелі.

Не залежно від впорядкування функції Уолша, які утворюють систему з $N=2^n$ функцій, завжди можна представити у вигляді добутку степеней перших n функцій Радемахера. Принцип знаходження показників цих степеней індивідуальний для кожного впорядковування.

Для дослідження систем Уолша з точки зору їх кореляційних властивостей доцільно використовувати матриці Адамара [1], що визначаються рекурентним співвідношенням

$$H_{2N} = \begin{vmatrix} H_N & H_N \\ H_N & -H_N \end{vmatrix},$$

де H_N – матриця Адамара порядку N (кількість рядків дорівнює кількості стовпчиків)

H_{2N} – матриця Адамара порядку $2N$.

Припускаючи H_1=1, отримаємо, наприклад, матриці порядку 2, 8:

$$H_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix},$$

$$H_8 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Послідовності Уолша $w_{i,j}$ є рядками матриці Адамара виду (1), де i – рядки матриці (номер функції), j - стовпці матриці (номер елемента), $i, j = \overline{0, (N-1)}$. Кількість кодових послідовностей дорівнює порядку матриці N. Тобто, об'єм системи Уолша дорівнює $N/2$.

Матриця Адамара H_N порядка $N=2^n$ являється квадратною матрицею розміру $N \times N$ з елементами ±1 та задовольняє рівності

$$H_N H^T{}_N = NI,$$

де I – одинична матриця;

$H^T{}_N$ – транспонована матриця Адамара.

Загальний вираз для дискретної функції Уолша має вигляд

$$wal(i,x) = (-1)^{\sum_{k=1}^{N}(w_{n-k+1} \oplus w_{n-k})x_k},$$

де $x_k=0$ або 1 є k-й розряд в представлені номера відліку x у двійковій системі числення:

$$x=\sum_{k=1}^{n} x_k 2^{n-k}=(x_1,x_2,...,x_n)_2 .$$

Так, наприклад, якщо взяти систему функцій Уолша розміром N=16, $n=log_2N$=4, тоді
$x=\sum_{k=1}^{4} x_k 2^{4-k}=x_1\cdot 2^3+x_2\cdot 2^2+x_3\cdot 2^1+x_4\cdot 2^0$.

Тобто послідовності Уолша ортогональні. Ортогональність послідовності означає [3], що для двох довільних послідовностей Уолша W_i та W_j, $i\neq j$ скалярний добуток має вигляд

$$(W_i,W_j)=\sum_{x=1}^{N-1} wal(i,x)wal(l,x)=\begin{cases} N & при \quad i=j, \\ 0 & при \quad i\neq j. \end{cases}$$

Дискретні функції Уолша не нормовані (норма дорівнює N не залежно від номера функції).

Також послідовність Уоша має властивість мультиплікативності, тобто

$$wal(i,x)wal(l,x)=wal\ (i\oplus l,x).$$

Нехай сигнал $s(t)$ (дійсна функція) є послідовністю з N двійкових елементів та представлений сукупністю еквідістантних відліків $S(n)=s_0,s_1,...,s_{N-1}$, які записані у вигляді матриці-рядка, з елементами ±1. Їх можна представити у вигляді зваженої суми послідовностей Уолша

$$S(n)=\frac{1}{N}R(n)W_N , \tag{2}$$

де $R(n) = R_0, R_1, ..., R_{N-1}$ – матриця-рядок коефіцієнтів розкладення, рівних

$$R(n)=S(n)H_N.$$

Тоді [2] перетворення

$$R_i=\sum_{j=0}^{N-1} s_j wal(i,j) , \tag{3}$$

$$s_j=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} R_i wal(i,j) ,$$

утворюють пару перетворень Уолша (пряме та зворотне). Ці вирази аналогічні парі дискретного перетворення Фур'є. Як і дискретні перетворення Фур'є вони мають властивість періодичності

$$R_i = R\ (i + mN), \qquad s_j = s\ (j +mN),$$

де m - ціле число.

Але маються і суттєві особливості (це відноситься до теореми запізнення).

Сукупність коефіцієнтів Уолша можна розглядати як спектр сигналу $S(n)$ подібний спектру в гармонійному базисі.

Величини R_i, $i=\overline{0,(N-1)}$ є цілими числами. З формули (3) отримуємо

$$\sum_{i=0}^{N-1} R_i = \sum_{j=0}^{N-1} s_j \sum_{i=0}^{N-1} wal(i,j) = Ns_o = \pm N . \tag{4}$$

Перемножуючи матрицю-рядок *S(n)* та транспоновану матрицю-стовпчик $S(n)^T$,
Отримаємо

$$S(n)S(n)^T = N, \tag{5}$$

з урахуванням (2)

$$S(n)S(n)^T = \frac{1}{N} R(n) W_N \cdot \frac{1}{N} W_N R(n)^T = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} R_i^2 . \tag{6}$$

Тоді з (5) та (6)

$$\sum_{i=0}^{N-1} R_i^2 = N^2 . \tag{7}$$

Вираз (6) визначає нормовану потужність сигналу, виражену через спектр Уолша. З (7) слідує нерівність

$$|R_i| \le N.$$

Розглянемо скалярний добуток двох сигналів $S(n)_1$ та $S(n)_2$ в матричній формі

$$S(n)_1 S(n)_2^T = \frac{1}{N} R(n)_1 W_N \cdot \frac{1}{N} W_N R(n)_2^T = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} R_{1,i} R_{2,i} . \tag{8}$$

З іншого боку,

$$S(n)_1 S(n)_2^T = N - 2d , \tag{9}$$

де *d* – відстань Хемінга між кодовими словами $S(n)_1$ та $S(n)_2$, тоді з урахуванням (8)

$$R(n)_1 R(n)_2 = \sum_{i=0}^{N-1} R_{1,i} R_{2,i} = N(N-2d) .$$

Як видно, спектри Уолша характеризують міру різниці відповідних кодових послідовностей. Якщо *d=N*, то з (9) слідує протилежність кодових слів $S(n)_1$ та $S(n)_2$, $S(n)_1=-S(n)_2$. При *d=N/2* отримаємо

$$S(n)S(n)^T_2 = 0,$$

тобто комбінації $S(n)_1$ та $S(n)_2$ ортогональні.

З (3) при *i=0* з урахуванням того, що в послідовності Уолша *wal(i,j)* усі елементи дорівнюють 1, отримуємо

$$R_0 = \sum_{j=0}^{N-1} s_j ,$$

тобто коефіцієнт R_0 дорівнює різності кількості символів 1 та -1 в кодовій послідовності *S(n)*. При *i=N/2* у послідовності Уолша перші *N/2* елементи дорівнюють 1, а останні -1. Тоді

$$R_{N/2} = \sum_{j=0}^{(N/2)-1} s_j - \sum_{j=N/2}^{N-1} s_j . \tag{9}$$

Подібні співвідношення можна отримати і для інших коефіцієнтів Уолша.

Якщо самі кодові комбінації являються послідовностями Уолша, то отримаємо ортогональний код довжиною N елементів, у якого $m=log_2N$ інформаційних символів і кодова відстань $d=N/2$. Якщо до них додати протилежні комбінації, то отримаємо код Ріда-Мюллера [4], у якого $m=log_2N+1$ інформаційних символів та $d=N/2=2^{m-1}$ для усіх кодових слів, крім одного, для якого $d=N$. Це блокові коди (N,m,d) зі швидкістю передачі

$$V = \frac{m}{N} = \frac{\log_2 N + 1}{N},$$

яка швидко падає з ростом довжини кодового слова.

Піднесення спектральних коефіцієнтів Уолша в квадрат та зворотне перетворення Уолша дає діадну кореляційну функцію вихідного сигналу. За своєю формою ця функція сильно відрізняється від арифметичної кореляційної функції. Крім того, діадна кореляційна функція не інваріантна відносно положення сигналу, який обробляється, до часу.

Спектри Уолша $R(n)$ двійкових послідовностей містять тільки парні числа. Для повного коду від 00..0 до 11..1 з номерами і від 0 до (2^N-1), усього 2^N комбінацій, коефіцієнти Уолша $R_{i,j}$ (j - номер послідовності) утворюють матрицю розміром $N\times 2^N$. Наприклад, якщо з матриці при N=4 вибрати послідовності Уолша (номера i дорівнюють 0, 3, 5, 6, 9, 10, 12 та 15), то отримаємо код Ріда-Мюллера (4,3,2). При N=8 спектр Уолша для коду Ріда-Мюллера (8,4,4)

Крім того, маються спектри Уолша, які містять числа 4, 4, 4 та -4 і чотири нулі в різних комбінаціях. Якщо до них додати коди Ріда-Мюллера, то отримаємо 128 комбінацій, в яких один з коефіцієнтів Уолша дорівнює 6 або -6, а інші дорівнюють ±2. Вони також утворюють блочний код (8, 7, 2). Спектри Уолша повинні задовольняти умові (4).

Слід відмітити, що велика перевага послідовностей Уолша полягає у відсутності операцій множення при обробці сигналів в системах цифрового зв'язку (передача зображення розпізнавання образів, стиску даних), що дозволяє підвищити завадостійкість системи.

Висновок

Отже аналіз спектрів Уолша двійкових кодових послідовностей дозволяє вибрати підходящі комбінації, з яких особливий інтерес представляють ортогональні та біортогональні коди. Двійкові коди на основі послідовностей Уолша дозволяють реалізувати цифрові алгоритми їх когерентної демодуляції та м'якого декодування з ефективним виправленням помилок. При такій реалізації отримується оптимальна обробка широкосмугового сигналу з малою базою та забезпечується висока завадостійкість передачі дискретних повідомлень.

Література

1. Варакин Л. Е. Системы связи с шумоподобными сигналами / Л. Е. Варакин. – Москва : Радио и связь, 1985. – 384 с.

2. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы : учебник для вузов / И. С. Гоноровский. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Радио и связь, 1986. – 512 с.

3. Бородин Л. Ф. Введение в теорию помехоустойчивого кодирования / Л. Ф. Бородин. – Москва : Сов. радио, 1968. – 408 с.

4. Васильев К. К. Теория электрической связи: учебное пособие / К. К. Васильев, В. А. Глушков, А. В. Дормидонтов, А. Г. Нестеренко; под общ. ред. К. К. Васильева. – Ульяновск : УлГТУ, 2008. – 452 с.

Дата надходження в редакцію: 14.03.2015 р. Рецензент: д.т.н., проф. О. О. Скопа