УДК 621.67,535.3

Козелков С. В., доктор техн. наук, проф. (Тел.: +380 (44) 249 29 26. E-mail: kozelkovae@mail.ru)
Коршун Н. В., канд. техн. наук (Тел.: +380 (93) 603 90 64. E-mail: natalie_korshun@ukr.net)
Заїка В. Ф., канд. військ. наук, доц. (Тел.: +380 (44) 249 25 83. E-mail: vfzaika@mail.ru)
Павловська О. Е., студентка (Тел.: +380 (63) 663 89 22. E-mail: korrespondentka@ukr.net)
(Державний університет телекомунікацій, м. Київ)

АНАЛІЗ РОЗРІЗНЯННЯ КОГЕРЕНТНИХ ТОЧКОВИХ ОБ`ЄКТІВ ЩІЛИННОЮ АПЕРТУРОЮ ПРИ МІНІМУМІ ЗВАЖЕНОЇ ЕНЕРГІЇ БОКОВИХ МАКСИМУМІВ

**Козелков С. В., Коршун Н. В., Заїка В. Ф., Павловська О. Е. Аналіз розрізняння когерентних точкових об`єктів щілинною апертурою при мінімумі зваженої енергії бокових максимумів.** В компактній аналітичній формі отримано рішення задачі мінімізації зваженої енергії світлового потоку дифракційної діаграми в області бокових максимумів при розрізнянні щілинною апертурою двох когерентних об`єктів за критерієм Спарроу. Виявлені енергетично ефективні оптимальні дифракційні діаграми з максимальним придушенням першого бокового максимуму. Запропоновано для оцінки енергетичної ефективності апертури використовувати такі коефіцієнти: концентрації енергії, використання площі апертури (коефіцієнт Штреля), освітленості в центрі дифракційної діаграми, відношення повних енергій апертури.

Ключові слова: бокові максимуми, дифракційна діаграма, щілинна апертура, перетворення Фур`є, критерій Спарроу, коефіцієнт Штреля, зважена енергія, світловий потік

Козелков С. В., Коршун Н. В., Заика В. Ф., Павловская О. Э. Анализ разрешения когерентных точечных объектов щелевой апертуры при минимуме взвешенной энергии боковых максимумов. В компактной аналитической форме получено решение задачи минимизации взвешенной энергии светового потока дифракционной диаграммы в области боковых максимумов при разрешении щелевой апертурой двух когерентных объектов по критерию Спарроу. Выявлены энергетически эффективные оптимальные дифракционные диаграммы с максимальным подавлением первого бокового максимума. Предложено для оценки энергетической эффективности апертуры использовать такие коэффициенты: концентрации энергии, использования площади апертуры (коэффициент Штреля), освещенности в центре дифракционной диаграммы, отношения полных энергий апертуры.

Ключевые слова: боковые максимумы, дифракционная диаграмма, щелевая апертура, преобразование Фурье, критерий Спарроу, коєффициент Штреля, взвешенная энергия, световой поток

1. Вступ. Відомо, що аподизаційне подавлення бокових максимумів (БМ) дифракційної діаграми (ДД) покращує розрізняння об`єктів, причому для оцінки якості розрізняння вибір будь-якого з об`єктивних критеріїв (Релея, Спарроу) мало істотний [1...4].

За критерієм Спарроу (КС) [5] два точкових об`єкта вважаються розрізненими, коли в результуючій картині обох об`єктів виникає локальне зниження освітленості в центральній точці. Для симетричної ДД КС набуває простої аналітичної форми: в заданій точці друга похідна на схилі головного пелюстка одиничної ДД повинна дорівнювати нулю.

Нижче описаний розрахунок ДД та апертурної функції (АФ), інакше функції зініці, щілинної апертури, що мінімізує зважену потужність БМ при розрізнянні двох когерентних точкових об'єктів за КС. Задачі з подібним обмеженням потужності часто вирішуються з використанням розкладів в ряди за сфероїдальним функціям. Математичний апарат, розроблений в [6], дозволив отримати рішення ДД та АФ у вигляді компактних аналітичних формул.

Серед оптимальних виявлені такі ДД, у яких істотно придушений перший БМ, при цьому відповідні їм АФ не мають аберацій, енергетично ефективні та прості за структурою.

Оскільки АФ визначає амплітудне пропускання системи, то для її реалізації відповідно потрібні аподизаційні фільтри, зокрема, типу транспаранту, простої структури [4].

Задачі аподизаційного придушення БМ мають давню історію, але актуальні й досі, в тому числі для сучасних акустооптичних пристроїв [7].

2. Постановка задачі та її розв'язання. Сформулюємо задачу, що вирішується: серед нормованих ДД $U(\alpha)$ – знайти оптимальну $U^{\circ}(\alpha)$, яка мінімізує зважену енергію E_{β} потоку електромагнітної (світлової) енергії в області БМ (β, ω) та відповідну АФ $A^{\circ}(\varepsilon)$ при заданій величині розрізняння $2\delta_1$ за КС двох точкових когерентних об'єктів,

де $E_{\beta} = \int^{\infty} |U(\alpha)|^2\, M(\alpha) d\alpha$;

$M(\alpha) = \alpha/\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ – вагова функція;

α – узагальнена лінійна координата в площині зображень;

ε – приведена координата вздовж апертури;

β – границя, що обирається між боковим та центральним максимумами ДД.

Вибір величини $\beta \geq \delta_1$ поблизу границі головного максимуму і в області першого БМ дозволяє в задачі мінімізації E_{β} та керувати рівнем першого БМ та при певному β добитися його мінімуму.

Знайдемо рішення поставленої задачі. Згідно [8] ДД та $U(\alpha)$, як симетрична ціла функція експоненціального типу кінцевої енергії, може бути записана не тільки у вигляді звичайного косинус-перетворення Фур'є від АФ $A(\varepsilon)$

$$U(\alpha) = \int_0^1 A(\varepsilon) \cos \alpha\varepsilon d\varepsilon,$$

але також в більш загальному вигляді модифікованого косинус-перетворення Фур'є від складного аргументу $v = \sqrt{\alpha^2} - \beta^2 \cdot (\alpha \geq \beta)$

$$U(\alpha) = \int_0^1 h(t) \cos vtdt, \tag{1}$$

яке при $\alpha \leq \beta$ зручніше записати в залежності від аргументу $v_1 = \sqrt{\alpha^2} - \beta^2$

$$U(\alpha) = \int_0^1 (t) \mathrm{ch} v_1 tdt, \tag{2}$$

причому АФ $A(\varepsilon)$ визначається функцією $U^{\circ}(\alpha)$ на всій півосі $(0, \infty)$ через зворотнє перетворення Фур'є.

В той же час модифікована АФ h(t) визначається значеннями функції $U^{\circ}(\alpha)$ тільки на промені (β, ∞).

Можна показати, що АФ $A(\varepsilon)$ та h(t) пов'язані співвідношенням:

$$A(\varepsilon) = h(\varepsilon) + \beta \int_0^{\sqrt{1}-\varepsilon^2} h\left(\sqrt{y^2} - \varepsilon^2\right) I_1(\beta y) dy,$$

де $I_n(\varepsilon)$ – модифікована функція Бесселя.

В найпростішому випадку $(\beta = 0)$, коли представлення (1) та (2) співпадають та мінімізується повна енергія ДД, задача, що розглядається, розв'язана та вивчена в [2].

Використовуючи приведені співвідношення, запишемо умови задачі оптимізації в загальному випадку при $\beta \geq \delta_1$ через h(t):

$$\int_0^1 h(t) h_1(t) dt = 1; \tag{3}$$

$$\int_0^1 h(t) h_2(t) dt = 0; \tag{4}$$

$$E_\beta = \frac{\pi}{2}\int_0^1 h(t)h_2(t)dt \gg \min, \quad (5)$$

де (3) та (4) представлені відповідно умови нормування і критерію Спарроу:

$$h_1(t) = k_1 t^2 \mathrm{ch}yt - k_2 t\,\mathrm{sh}yt;$$

$$y = \sqrt{\beta^2} - \delta^2;$$

$$k_1 = (\delta_1/\gamma)^2;$$

$$k_2 = (1 + k_1)/\gamma.$$

Задача мінімізації E_β при умовах (3) та (4) являє собою ізопериметричну варіаційну задачу, розв'язок якої має вигляд:

$$h_0(t) = \lambda_1 h_1(t) + \lambda_2 h_2(t),$$

причому множники Лагранжа дорівнюють

$$\lambda_2 = \left[a_{12} - a_{22}\frac{a_{11}}{a_{12}}\right]; \qquad \lambda_1 = -\frac{-a_{22}\lambda_2}{a_{12}},$$

де $a_{ij} = \int_0^\infty h_i(t)h_j(t)dt, \; i,j = 1,2.$

Оптимальну ДД в області головного максимуму ($\alpha \le \beta$) можна виразити через функцію

$$FG(x, v_1) = \int_0^1 \mathrm{ch}xt\,\mathrm{ch}v_1 t d = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{sh}(x + v_1)}{x + v_1} + \frac{\mathrm{sh}(x - v_1)}{x - v_1}\right]$$

та її похідні:

$$U^\circ(\alpha) = \int_0^1 h_0(t)\mathrm{ch}v_1 t dt = \lambda_1 FG(\beta, v_1) + \lambda_2 k_1 \frac{d^2}{d\gamma^2} FG(\gamma, v_1) - \lambda_2 k_2 \frac{d}{d\gamma} FG(\gamma, v_1).$$

Аналогічно, оптимальну ДД в області БМ ($\alpha \ge \beta$), при нормуванні, яке забезпечує мінімум зваженої енергії БМ, можна виразити через функцію

$$FG(x, v) = \int_0^1 \mathrm{ch}xt \cos vt dt = \frac{x\,\mathrm{sh}x \cos v + \mathrm{ch}x\, v\,\mathrm{sh}v}{x^2 + v^2}$$

та її похідні

$$U^\circ(\alpha) = \int_0^1 h_0(t) \cos vt dt = \lambda_1 FG(\beta, v) + \lambda_2 k_1 \frac{d^2}{d\gamma^2} FG(\gamma, v) - \lambda_2 k_2 \frac{d}{d\gamma} FB(\gamma, v).$$

В площині зображень результуюча картина від двох точкових об'єктів описується виразом:

$$U_\Sigma(\alpha) = U_0(\alpha - \delta_1) + U_0(\alpha + \delta_1).$$

Зважена потужність ВМ:

$$E_\beta = \frac{\pi}{2}\lambda_{1.}$$

3. Висновок. Для оцінки енергетичної ефективності апертури використовуємо наступні параметри:

– коефіцієнт концентрації енергії:

$$\gamma_k = \frac{\int_0^1 U^2(\alpha)d\alpha}{\int_0^\infty U^2(\alpha)d\alpha} = \frac{\int_0^\beta U^2(\alpha)d\alpha}{\frac{\pi}{2}P_a}, \quad \text{де } P_a = \int_0^1 A^2(\varepsilon)d\varepsilon;$$

– коефіцієнт використання площі апертури (КВП або в оптиці – коефіцієнт Штреля):

$$q = \frac{U^2(0)}{P_a};$$

– коефіцієнт освітленості в центрі ДД (відношення інтенсивностей в центрі ДД при $A(\varepsilon) \leq I$ та ДД апертури при $A(\varepsilon) = I$:

$$G = \left[\frac{U(0)}{A_m}\right]^2, \text{ де } A_m = \frac{\max}{\varepsilon \leq 1}[A(\varepsilon)];$$

– коефіцієнт відношення повних енергій апертури, що розглядається, при $A(\varepsilon) \leq I$, та апертури з рівномірним освітленням $A(\varepsilon) = I$:

$$\tau = P_a / A_m^2 .$$

Література

1. Борн М. Основы оптики / М. Борн. – Москва : Наука, 1970. – 856с.

2. Barakat R. Application of apodization to increase two-point resolution by the Sparrow criterion. I. Coherent Illumination / R. Barakat // Journ. Opt. Soc. Am. – 1962. – V.52, №3. – P. 276-283.

3. Jadotte H. M. Apodization for maximum encircled-energy ratio and specified Sparrow limit of resolution for coherent illumination / H. M. Jadotte, J. E. Wilkins // Journ. Opt. Soc. Am. –1976. – V.66, №10. – P.1052-1053.

4. Magiera A. Apodizing filtres for optimum Sparrow resolution in coherent systems with annular aperture / A. Magiera // Optic. – 1980. –V.55, №2. – P.189-197.

5. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике / А. Папулис. – Москва: Мир, 1971. – 496 с.

6. Минкович Б. М. Об одной задаче аподизации / Б. М. Минкович // Оптика и спектроскопия. – 1976. – Т.40, №5. – С. 900-907.

7. Бондаренко В. С. Акустооптические модуляторы света / В. С. Бондаренко. – Москва : Радио и связь, 1988. – 136 с.

8. Минкович Б. М. Оптимальный синтез линейных антенн симметричным возбуждением / Б. М. Минкович // Радиотехника и электроника. – 1979. – Т.24, №4. – С. 697-704.

Дата надходження в редакцію: 14.04.2015 р. Рецензент: д.т.н., проф. О. В. Барабаш