УДК 621.391+519.24

Попов А. А., канд. техн. наук, доц. Тел.: +380 (66) 299 29 80. E-mail: andoff@rambler.ru
(*Центральный НИИ вооружения и военной техники ВС Украины*)

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ АЛГОРИТМОВ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ, ПОСТРОЕННЫХ НА ОСНОВЕ ОПЕРАЦИЙ *L*-ГРУППЫ, В УСЛОВИЯХ НЕГАУССОВОСТИ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ

Popoff A. A. Comparative analysis of efficiency of signal parameter estimation algorithms, built on the basis of *L*-group operations, under non-Gaussian measurement errors. Location parameter estimation problem has been formulated upon some class of distributions of measurement errors with symmetric probability density function in sample space with *L*-group properties. Location parameter estimation algorithms, built upon *M*-, *L*-, and *R*-estimators in sample space with *L*-group properties, have been brought. The dependencies of gain (loss), which is obtained on measurement error processing in one of four filters forming the estimators according to the mentioned algorithms, with respect to homogeneous filter, as the functions of the ratio of squared mean to the second moment of measurement error envelopes, have been shown. It is shown that the filters, constructed on the basis of measurement result processing algorithms in sample space with *L*-group properties, provide the gain to estimation accuracy as against homogeneous filter on a wide class of distributions, which describe the behaviour of noise (interference) of a pulse type, for which the ratio of squared mean to the second moment of measurement error envelopes is defined in the interval]0; 0.75], so that the obtained gain is the greater, the less is this ratio of these moments.

Key words: sample space, *L*-group, measurement error, estimation problem, location parameter, *M*-estimator, *L*-estimator, *R*-estimator

Попов А. О. Порівняльний аналіз ефективності алгоритмів оцінювання параметрів сигналів, побудованих на основі операцій *L*-групи, в умовах негаусовості помилок вимірювань. Формулюється задача оцінювання у вибірковому просторі із властивостями *L*-групи. Наводяться алгоритми оцінювання параметру зсуву у вибірковому просторі із властивостями *L*-групи, побудовані на *M*-, *L*- та *R*-оцінках. Показується, що фільтри, які побудовані на алгоритмах обробки результатів вимірювань у вибірковому просторі із властивостями *L*-групи, забезпечують виграш в точності оцінювання у порівнянні з однорідним фільтром на широкому класі розподілень, які описують поведінку шумів (завад) імпульсного типу.

Ключові слова: вибірковий простір, *L*-група, помилка вимірювань, задача оцінювання, параметр зсуву, *M*-оцінка, *L*-оцінка, *R*-оцінка

Попов А. А. Сравнительный анализ эффективности алгоритмов оценивания параметров сигналов, построенных на основе операций *L*-группы, в условиях негауссовости ошибок измерений. Формулируется задача оценивания в выборочном пространстве со свойствами *L*-группы. Приводятся алгоритмы оценивания параметра сдвига в выборочном пространстве со свойствами *L*-группы, построенные на *M*-, *L*- и *R*-оценках. Показывается, что фильтры, построенные на алгоритмах обработки результатов измерений в выборочном пространстве со свойствами *L*-группы, обеспечивают выигрыш в точности оценивания по сравнению с однородным фильтром на широком классе распределений, которые описывают поведение шумов (помех) импульсного типа.

Ключевые слова: выборочное пространство, *L*-группа, ошибка измерений, задача оценивания, параметр сдвига, *M*-оценка, *L*-оценка, *R*-оценка

Введение. Одной из наиболее общих задач обработки сигналов на фоне помех (шумов) является оценивание сигналов и их параметров. В большей части работ по точечному оцениванию [1...4] – от учебной до узкоспециальной – наиболее употребительной моделью непосредственного измерения неизвестного неслучайного скалярного параметра λ является случай его аддитивного взаимодействия со статистически независимыми ошибками измерений в линейном выборочном пространстве $\mathcal{LS}(\mathcal{X},\mathcal{B}_\mathcal{X};+)$:

$$X_i = \lambda + N_i, \qquad (1)$$

где $\{N_i\}$ – независимые ошибки измерения с распределением из класса распределений с симметричной плотностью распределения вероятности $p_N(z) = p_N(-z)$, представленные выборкой $N=(N_1,\ldots,N_n)$, $N_i \in N$, причем $N \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{B}_\mathcal{X};+,\vee,\wedge)$; $\{X_i\}$ – результаты измерений, представленные выборками $X=(X_1,\ldots,X_n)$, $X_i \in X$: $X \in \mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{B}_\mathcal{X};+,\vee,\wedge)$; «+» – операция суммы выборочного пространства $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{B}_\mathcal{X};+,\vee,\wedge)$ со свойствами *L*-группы; $i=1,\ldots,n$ – индекс элементов статистических совокупностей $\{N_i\}$, $\{X_i\}$; n – объем выборок.

В существующей алгебраической литературе *L*-группы известны достаточно давно и хорошо исследованы [5, 6]. Выборочное пространство $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{B}_{\mathcal{X}};+,\vee,\wedge)$ со свойствами *L*-группы определяется как вероятностное пространство $(\mathcal{X},\mathcal{B}_{\mathcal{X}})$, в котором одновременно выполняются аксиомы дистрибутивной решетки $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{B}_{\mathcal{X}};\vee,\wedge)$ с операциями верхней и нижней граней соответственно: $a\vee b=\sup_{\mathcal{L}}\{a,b\}$, $a\wedge b=\inf_{\mathcal{L}}\{a,b\}$; $a,b\in\mathcal{L}(\mathcal{X},\vee,\wedge)$, а также аксиомы аддитивной коммутативной группы $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{B}_{\mathcal{X}};+)$ линейного выборочного пространства $\mathcal{LS}(\mathcal{X},\mathcal{B}_{\mathcal{X}};+)$ [7, 8].

Последнее обстоятельство позволяет, с одной стороны, существенным образом расширить алгебраические свойства рассматриваемого выборочного пространства, а, с другой стороны, описывать алгоритмы и устройства обработки сигналов в терминологии не только аддитивной коммутативной группы линейного пространства, но и с привлечением операций решетки.

В практических приложениях достаточно обоснованные допущения об известности распределения генеральной совокупности встречаются крайне редко, в связи с этим ряд специалистов в области математической статистики формулируют следующие вопросы [4, 9, 10]. Во-первых, каково поведение оптимальных (по некоторому критерию) оценок, построенных для одних распределений, в случае их применения к выборкам с другими распределениями; а, во-вторых, каким образом возможно получение оценок, устойчивых к различным распределениям из заданного класса.

Целью статьи является экспериментальный сравнительный анализ эффективности алгоритмов и устройств формирования *M*-, *L*- и *R*-оценок неизвестного неслучайного параметра сдвига в выборочном пространстве со свойствами *L*-группы, в условиях негауссовости широкого класса симметричных распределений ошибок измерений.

Основная часть. Модель (1) аналогична задаче оценивания параметра сдвига λ на некотором классе распределений ошибок измерений с симметричной плотностью распределения вероятности $p_N(z)=p_N(-z)$ в выборочном пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{B}_{\mathcal{X}};+,\vee,\wedge)$ со свойствами *L*-группы, вследствие общности свойств такого выборочного пространства, в частности, по причине наличия у него свойств аддитивной коммутативной группы $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{B}_{\mathcal{X}};+)$: $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{B}_{\mathcal{X}};+)\subset\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{B}_{\mathcal{X}};+,\vee,\wedge)$.

В задачах обработки сигналов статистическая модель непосредственного измерения неизвестного неслучайного скалярного параметра λ обычно имеет вид, аналогичный (1):

$$x(t_j)=\lambda+n(t_j), \tag{2}$$

где $x(t_j)\equiv X_i$, $n(t_j)\equiv N_i$; $t_j=t-\Delta t\cdot j$, $j=0,1,...,n-1$, $i=1,\dots,n$, $j=i-1$; $\{n(t_j)\}$ – независимые ошибки измерения с распределением из класса распределений с симметричной плотностью распределения вероятности $p_n(z)=p_n(-z)$ ($p_n(z)\equiv p_N(z)$), обусловленные воздействием непрерывного шума $n(t)$; t – временной параметр; $\{x(t_j)\}$ – дискретные результаты измерений (отсчеты) непрерывного наблюдаемого случайного процесса $x(t)$; Δt – интервал независимости отсчетов $\{n(t_j)\}$; $j=0,1,...,n-1$ – индекс отсчетов $\{n(t_j)\}$, $\{x(t_j)\}$.

Обобщенная структурная схема устройства, осуществляющего обработку результатов измерений при использовании того или иного критерия эффективности оценивания параметра λ на основе модели (2), приведена на Рис. 1.

Как следует из рисунка, с помощью последовательно включенных линий задержек формируется выборка независимых отсчетов $\{x(t_j)\}$ наблюдаемого случайного процесса $x(t)$. Фильтр, реализующий алгоритм обработки результатов измерений $\{x(t_j)\}$ в соответствии с заданным критерием эффективности оценивания параметра λ, формирует оценку $\hat{\lambda}$ измеряемого параметра.

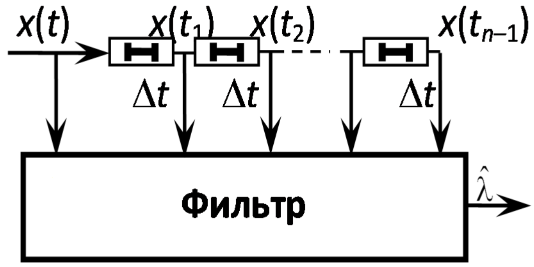

Рис. 1. Структурная схема устройства обработки результатов измерений

Предметом последующего рассмотрения будет экспериментальный (осуществляемый методом статистического моделирования) сравнительный анализ эффективности пяти алгоритмов и устройств обработки, а именно, однородного фильтра, формирующего оценку вида:

$$\hat{\lambda}_{\mathrm{hmF}} = \sum_{j=0}^{n-1} x(t - \Delta t \cdot j), \tag{3}$$

а также четырех фильтров, осуществляющих обработку в выборочном пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{B}_{\mathcal{X}};+,\vee,\wedge)$ со свойствами L-группы, которые формируют оценки вида [7;(1б)], [7;(10)], [8;(3)], [8;(5а)] соответственно:

(медианный фильтр) $$\hat{\lambda}_{\mathrm{MF}} = \underset{j=0,\ldots,n-1}{\mathrm{med}} \{x(t - \Delta t \cdot j)\}; \tag{4а}$$

(фильтр Хьюбера) $$\hat{\lambda}_{\mathrm{HF}} = \hat{\lambda}(t) = \hat{\lambda}(t-\Delta t) + \frac{\hat{\sigma}}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} k \wedge [(x(t-\Delta t \cdot j) - \hat{\lambda}(t-\Delta t)) \vee -k]; \tag{4б}$$

(фильтр усеченного среднего) $$\hat{\lambda}_{\mathrm{tmF}} = \frac{1}{n-2r} \sum_{i=r+1}^{n-r} X_{(i)}, \tag{4в}$$

где $\alpha = r/n < 1/2$; $r = [\alpha n]$, $[t]$ – наибольшее целое, меньшее или равное t; $X_{(i)}$ – i-я порядковая статистика $X_{(i)} \in X'$ вариационного ряда $X' = (X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})$; $X_i \equiv x(t - \Delta t \cdot j)$, $j = i - 1$;

(фильтр Ходжеса-Лемана) $$\hat{\lambda}_{\mathrm{HL}} = \underset{i \le k}{\mathrm{med}} \{m_{i,k}\}, \tag{4г}$$

где $m_{i,k} = \frac{1}{2}(X_{(i)} + X_{(k)})$ – $n(n+1)/2$ попарных средних, включающих сами наблюдения; $X_{(i)}$ – i-я порядковая статистика $X_{(i)} \in X'$ вариационного ряда $X' = (X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})$; $\mathrm{med}\{a_{i,k}\}$ – медиана элементов некоторого выборочного множества $\{a_{i,k}\}$.

На Рис. 2 показана зависимость выигрыша (проигрыша) $\Delta = 10\lg(\delta_{\hat{\lambda},\mathrm{hmF}} / \delta_{\hat{\lambda}})$, получаемого при обработке результатов измерений в одном из четырех фильтров, формирующих оценки в соответствии с уравнениями (4а), (4б), (4в), (4г), относительно однородного фильтра hmF, от соотношения m_1^2 / m_2 квадрата математического ожидания m_1 ко второму моменту m_2 огибающих ошибок измерения $\{n(t_j)\}$, где $\delta_{\hat{\lambda},\mathrm{hmF}}, \delta_{\hat{\lambda}}$ – величины относительной выборочной дисперсии $\delta_{\hat{\lambda}} = D_{\hat{\lambda}} / D_x$ оценки $\hat{\lambda}$ параметра сдвига λ для однородного фильтра hmF и фильтров, формирующих оценки на основе тождеств (4а), (4б), (4в), (4г) соответственно. Независимые ошибки измерения $\{n(t_j)\}$ характеризуются шестью симметричными распределениями: нормальное $N(0,b)$, $m_1^2 / m_2 = \pi/4$; «ε-загрязненное» распределение Тьюки $T(\varepsilon,\tau)$ с параметрами ε=0.1, τ=5, $m_1^2 / m_2 \approx 0.77$; логистическое распределение $L(0,b)$, $m_1^2/m_2 \approx 0.75$; распределение Лапласа (двойное экспоненциальное) $DE(0,b)$, $m_1^2/m_2 \approx 0.71$; распределение Стьюдента $St(3)$, $m_1^2/m_2 \approx 0.67$; распределение Коши $C(0,b)$, $m_1^2/m_2 \approx 0.15$, где b – параметр масштаба. Соотношение m_1^2/m_2 для всех видов распределений, кроме нормального, было определено экспериментально.

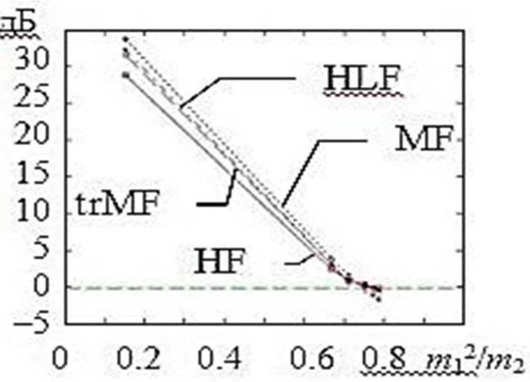

Рис. 2. Эффективность использования фильтров

Условные обозначения, показанные на Рис. 2, соответствуют следующим устройствам: HF – фильтр Хьюбера, сплошная кривая, помеченная квадратами □–□–□; MF – медианный фильтр, пунктирная линия, обозначенная ромбами ◊ – ◊ – ◊; trMF – фильтр усеченного среднего, штриховая линия, помеченная кружочками ∘ – ∘ – ∘; HLF – фильтр Ходжеса-Лемана, штрих-пунктирная линия, обозначенная плюсами + – + – +.

Как следует из результатов статистического моделирования, показанных на Рис. 2, при нормальном распределении ошибок измерения $\{n(t_j)\}$ медианный фильтр проигрывает однородному 1.61 дБ; фильтр усеченного среднего проигрывает 0.7 дБ; фильтр Ходжеса-Лемана проигрывает 0.28 дБ, а фильтр Хьюбера обеспечивает то же значение относительной выборочной дисперсии, что и однородный фильтр. При «ε-загрязненном» распределении Тьюки $T(\varepsilon,\tau)$ с параметрами ε=0.1, τ=5 медианный фильтр проигрывает однородному 1.00 дБ; фильтр усеченного среднего проигрывает 0.13 дБ; фильтр Ходжеса-Лемана проигрывает 0.09 дБ, а фильтр Хьюбера обеспечивает то же значение относительной выборочной дисперсии, что и однородный фильтр. При логистическом распределении ошибок измерения $\{n(t_j)\}$ медианный фильтр проигрывает однородному 0.34 дБ, остальные же фильтры, напротив, обеспечивают выигрыш при обработке: фильтр усеченного среднего — в 0.54 дБ; фильтр Ходжеса-Лемана — в 0.19 дБ, а фильтр Хьюбера — в 0.34 дБ. При двойном экспоненциальном распределении ошибок измерения $\{n(t_j)\}$ уже все фильтры обеспечивают выигрыш при обработке: медианный фильтр — в 1.69 дБ; фильтр усеченного среднего — в 0.64 дБ; фильтр Ходжеса-Лемана — в 1.09 дБ, а фильтр Хьюбера — в 0.92 дБ. Та же картина, но с еще большим выигрышем, наблюдается при распределении ошибок измерения $\{n(t_j)\}$ по закону Стьюдента $St(3)$: медианный фильтр обеспечивает выигрыш в 3.95 дБ; фильтр усеченного среднего — в 3.11 дБ; фильтр Ходжеса-Лемана — в 3.23 дБ, а фильтр Хьюбера — в 2.93 дБ. Еще более значительный выигрыш имеет место при распределении ошибок измерения $\{n(t_j)\}$ по закону Коши: медианный фильтр обеспечивает выигрыш в 33.7 дБ; фильтр усеченного среднего — в 31.5 дБ; фильтр Ходжеса-Лемана — в 32.3 дБ, а фильтр Хьюбера — в 28.9 дБ.

В целом, полученные результаты, за исключением тех, которые относятся к распределению Тьюки, достаточно хорошо описывают известные теоретические результаты, приведенные, например, в табл. 2 [8], суть которых сводится к следующему. Фильтры, построенные на алгоритмах обработки результатов измерений в выборочном пространстве

$\mathcal{L}(X,\mathcal{B}_X;+,\vee,\wedge)$ со свойствами L-группы, т.е., те, которые формируют оценки вида (4а,б,в,г), обеспечивают выигрыш по сравнению с однородным фильтром на широком классе распределений, которые описывают поведение шумов (помех) импульсного типа, огибающие которых имеют показатель $0 < m_1^2 / m_2 \leq 0.75$, причем получаемый выигрыш может быть тем значительнее, чем меньше значение m_1^2 / m_2, характеризующее соотношение первых двух моментов огибающей ошибок измерений.

На Рис. 3а,б,в,г показана зависимость выигрыша (проигрыша) $\Delta = 10\lg(\delta_{\hat{\lambda},\mathrm{hmF}} / \delta_{\hat{\lambda}})$, получаемого при обработке результатов измерений в одном из четырех фильтров, формирующих оценки в соответствии с уравнениями (4а), (4б), (4в), (4г), относительно однородного фильтра hmF, от соотношения m_1^2 / m_2 квадрата математического ожидания m_1 ко второму моменту m_2 огибающих ошибок измерения $\{n(t_j)\}$, где $\delta_{\hat{\lambda},\mathrm{hmF}}, \delta_{\hat{\lambda}}$ – величины относительной выборочной дисперсии $\delta_{\hat{\lambda}} = D_{\hat{\lambda}} / D_x$ оценки $\hat{\lambda}$ параметра сдвига λ для однородного фильтра hmF и фильтров, формирующих оценки на основе тождеств (4а), (4б), (4в), (4г) соответственно.

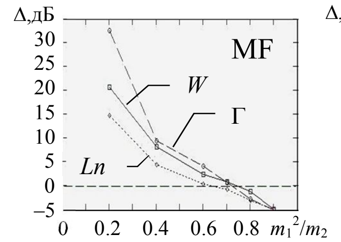

Рис. 3а

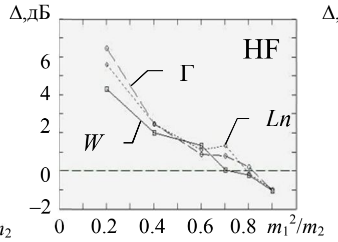

Рис. 3б

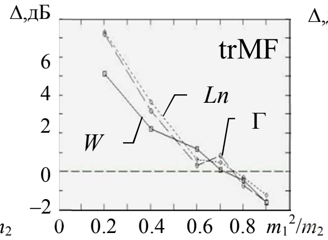

Рис. 3в

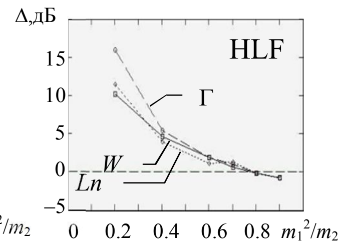

Рис. 3г

Условные обозначения, показанные на Рис. 3а,б,в,г, соответствуют следующим устройствам: MF – медианный фильтр, HF – фильтр Хьюбера, trMF – фильтр усеченного среднего, HLF – фильтр Ходжеса-Лемана. Распределения огибающих ошибок измерения $\{n(t_j)\}$ на трех классах обозначены следующим образом: Вейбулла (W) — сплошная кривая, помеченная квадратами □–□–□; Гамма (Г) — штриховая линия, помеченная кружочками ∘ – ∘ – ∘; логнормальное (Ln) — пунктирная линия, обозначенная ромбами ◊ – ◊ – ◊.

Как следует из результатов статистического моделирования, показанных на Рис. 3а,б,в,г, при огибающей ошибок измерения $\{n(t_j)\}$ с соотношением m_1^2 / m_2=0.9, медианный фильтр проигрывает однородному около 5.0 дБ; фильтр Хьюбера проигрывает около 1.0 дБ; фильтр усеченного среднего проигрывает 1.25…1.62 дБ; фильтр Ходжеса-Лемана проигрывает однородному 0.73…0.88 дБ.

При огибающих ошибок измерения $\{n(t_j)\}$ с соотношением m_1^2 / m_2=0.8 медианный фильтр проигрывает однородному около 1.15…3.0 дБ; фильтр Хьюбера проигрывает 0.15…0.2 дБ; фильтр усеченного среднего проигрывает 0.25…0.73 дБ; фильтр Ходжеса-Лемана проигрывает однородному 0.14…0.18 дБ.

При огибающей ошибок измерения $\{n(t_j)\}$ с соотношением m_1^2 / m_2=0.7 уже практически все фильтры обеспечивают выигрыш при обработке: медианный фильтр — 0.75…0.83 дБ (на логнормальном распределении все еще проигрывает 0.76 дБ); фильтр Хьюбера — 0.04…1.33 дБ; фильтр усеченного среднего — 0.08…0.84 дБ; фильтр Ходжеса-Лемана — 0.61…1.31 дБ.

При огибающей ошибок измерения $\{n(t_j)\}$ с соотношением m_1^2 / m_2=0.6 все фильтры обеспечивают выигрыш при обработке: медианный фильтр — 0.45…4.18 дБ; фильтр

Хьюбера — 0.88…1.33 дБ; фильтр усеченного среднего — 0.32…1.20 дБ; фильтр Ходжеса-Лемана — 1.13…1.89 дБ.

Та же картина, но с еще большим выигрышем, наблюдается при огибающей ошибок измерения $\{n(t_j)\}$ с соотношением $m_1^2\,/\,m_2$=0.4: медианный фильтр обеспечивают выигрыш 4.48…9.42 дБ; фильтр Хьюбера — 2.01…2.47 дБ; фильтр усеченного среднего — 2.23…3.66 дБ; фильтр Ходжеса-Лемана — 3.95…5.43 дБ.

Еще более значительный выигрыш имеет место при распределении огибающей ошибок измерения $\{n(t_j)\}$ с соотношением $m_1^2\,/\,m_2$=0.2: медианный фильтр обеспечивает выигрыш 14.7…32.5 дБ; фильтр Хьюбера — 4.3…6.45 дБ; фильтр усеченного среднего — 5.14…7.32 дБ; фильтр Ходжеса-Лемана — 10.21…15.96 дБ.

Выводы. Фильтры, построенные на алгоритмах обработки результатов измерений в выборочном пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{B}_{\mathcal{X}};+,\vee,\wedge)$ со свойствами *L*-группы, т.е., те, которые формируют оценки вида (4а,б,в,г), обеспечивают выигрыш в точности оценивания по сравнению с однородным фильтром на широком классе распределений, которые описывают поведение шумов (помех) импульсного типа, для которых характерно соотношение $m_1^2\,/\,m_2$ первых двух моментов огибающей ошибок измерений на интервале $0 < m_1^2\,/\,m_2 \le 0.75$, причем получаемый выигрыш может быть тем значительнее, чем меньше значение $m_1^2\,/\,m_2$.

Этими же преимуществами устройства, построенные на алгоритмах обработки результатов измерений в выборочном пространстве $\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{B}_{\mathcal{X}};+,\vee,\wedge)$ со свойствами *L*-группы, обладают, по-видимому, по отношению ко всем устройствам (линейным фильтрам), осуществляющим оценивание на основе алгоритмов обработки результатов измерений в линейном выборочном пространстве $\mathcal{LS}(\mathcal{X},\mathcal{B}_{\mathcal{X}};+)$.

Литература

1. Закс Ш. Теория статистических выводов / Ш. Закс. – Москва : Мир, 1975. – 776 с.
2. Кендалл М. Статистические выводы и связи / М. Кендалл, А. М. Стюарт. – Москва : Наука, 1973. – 900 с.
3. Крамер Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. – Москва : Мир, 1975. – 632 с.
4. Леман Э. Теория точечного оценивания / Э. Леман. – Москва : Наука, 1991. – 448 с.
5. Биркгоф Г. Теория решеток / Г. Биркгоф. – Москва : Наука, 1984. – 568 с.
6. Артамонов В. А. Общая алгебра. Т. 1 / В. А. Артамонов, В. Н. Салий, Л. А. Скорняков и др; под общ. ред. Л. А. Скорнякова. – Москва : Наука, 1991. – 592 с.
7. Попов А. А. Алгоритм и устройство формирования *M*-оценок на основе операций *L*-группы / А. А. Попов // Наукові записки Українського науково-дослідного інституту зв'язку. – 2015. – № 1 (35). – С. 26-30.
8. Попов А. А. Алгоритмы и устройства формирования *L-, R*-оценок на основе операций *L*-группы / А. А. Попов // Телекомунікаційні та інформаційні технології. – 2015. – № 2. – С. 18-26.
9. Дэйвид Г. Порядковые статистики / Г. Дэйвид. – Москва : Наука, 1979. – 336 с.
10. Huber P. J. Robust Statistics / P. J. Huber. – N.Y., John Wiley & Sons, 1981. – 308 p.

Дата надходження в редакцію: 09.07.2015 р. Рецензент: д.т.н., проф. Г. М. Розорінов