

УДК 004.65

Шевченко Г. В., магістр. Тел.: +380 (50) 237 41 20. E-mail: foxik.ryzyy@gmail.com

Мушта С. С., магістр. Тел.: +380 (93) 376 59 61. E-mail: s.mushta@ltd.kiev.ua

(Державний університет телекомунікацій, м. Київ)

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ МЕРЕЖЕВОЇ РІВНОВАГИ ПРИ ІНТЕРНЕТ-РЕКЛАМУВАННІ

Shevchenko G. V., Mushta S. S. The mathematical model of network equilibrium framework for Internet advertising. In this paper a network equilibrium framework for the modeling and analysis of competitive firms engaged in Internet advertising among multiple websites was developed. The model allows to determine both the equilibrium online advertising budget as well as the advertising expenditures on the different websites. Specialization of the model to the case of fixed online budgets was done. The governing equilibrium conditions of both models are shown to satisfy finite-dimensional variational inequalities. The qualitative properties of the solution patterns as well as computational procedures that exploit the network structure of these problems were developed. The models and algorithms are illustrated with numerical examples. This paper adds to the growing literature of the application of network-based techniques derived from operations research to the advertising.

Keywords: Internet advertising, online budgets, equilibrium conditions, consumers' responses, equilibrium by Nash; variational inequalities; optimal budgeting

Шевченко Г. В., Мушта С. С. Математична модель мережевої рівноваги при інтернет-рекламуванні. Розроблено схему рівноваги мережі для моделювання і аналізу поведінки конкуруючих фірм, які займаються розміщенням Інтернет-реклами на багатьох вебсайтах. Розглянуто випадок еластичного он-лайн бюджету для фірм. Показано, що основні умови рівноваги для моделі задовольняють варіаційним нерівностям. Представлено якісні властивості способів розв'язання, а також схему обчислення, в якій використовується структура абстрактної мережі, яка лежить в основі даних задач.

Ключові слова: інтернет-реклама, он-лайн бюджет, умови рівноваги, граничний відгук, рівновага Неша, варіаційна нерівність, оптимальний бюджет

Шевченко Г. В., Мушта С. С. Математическая модель сетевого равновесия при интернет-рекламировании. Разработана система равновесия системы для моделирования и анализа поведения конкурирующих фирм, занимающихся размещением интернет-рекламы на нескольких вебсайтах. Рассмотрен случай фиксированного он-лайн бюджета. Было показано, что основные условия равновесия для обеих моделей удовлетворяют вариационные неравенства. Представлены качественные характеристики способов решения, а также схема вычисления, в которой используется абстрактная сеть, которая лежит в основе данных задач.

Ключевые слова: интернет-реклама, он-лайн бюджет, условия равновесия, предельный отклик, равновесие по Нешу, вариационное неравенство, оптимальный бюджет

Вступ. Весь комплекс рішень із розроблення рекламного бюджету можна розподілити на два великих етапи: визначення загального обсягу коштів, що асигнуються на рекламу та розподіл цих коштів за статтями витрат. Але при цьому рідко вдається отримати точну цифру, оскільки, як правило, немає повної картини взаємозв'язку між контактами споживача з рекламою і його діями у відповідь. Аналітичний підхід базується на пошуку функціональної залежності між рекламним бюджетом і рівнем досяжності мети організації. Неаналітичний підхід заснований на досвіді або спрощених правилах прийняття рішення.

В цій статті сформульовано оптимізаційну задачу, яка виникає перед фірмою при визначенні розподілу її рекламного бюджету. Шляхом аналізу отриманої задачі, також встановлюється, що бюджет фірми на інтернет-рекламу є зростаючою функцією від граничного відгуку.

Постановка задачі в загальному вигляді. Припускається, що одна і та сама послуга, а саме, надання інтернет-послуги (в подальшому продукт) може рекламуватись N фірмами в усіх середовищах.

Для фірми n ; $n=1,2,\dots,N$: нехай f_{ni} означає витрати на інтернет-рекламу і нехай f_{nd} витрати на рекламу в інших засобах. Для простоти не розрізняються веб-сайти в моделі, яка пропонується в даній статті. Але також пропонується модель мережевої рівноваги яка враховує кілька вебсайтів. Згрупуємо f_{ni} та f_{nd} , $n=1,2,\dots,N$ відповідно в вектори f_i, f_d . Надалі, якщо не сказано інакше, всі вектори вважаються векторами-стовпцями.

Нехай $r_{ni}(f_i)$ та $r_{nd}(f_d)$ позначають відгук споживачів внаслідок витрат f_i та f_d відповідно. Припускається, що відгук споживачів на витрати на інтернет-рекламу залежить лише від витрат, які було зроблено саме на дане середовище, це стосується і витрат на інші рекламні середовища. Це припущення менш строге, ніж в інших аналогічних дослідженнях.

Можна знехтувати крос-медійним ефектом, але потрібно врахувати крос-фірмовий ефект, і в той же час було враховано основні механізми маркетингу.

Вважається, що $r(f_j), j=i, d$ є зростаючою, диференційованою та угнутою функцією від f_j . Припускається, що кожна фірма n має загальний рекламний бюджет C_n .

Задача оптимального розподілу бюджету, з якою зустрічається фірма n , при припущенні, що вона бажає максимізувати споживчій відгук через всі середовища, в межах бюджету, можна висловити, як наступну оптимізаційну задачу:

$$\left\{ \left\{ r_{ni}(f_i) + r_{nd}(f_d) \right\} \right\} \xrightarrow{f_{ni}, f_{nd}} \max, \quad (1)$$

за умов

$$f_{ni} + f_{nd} \leq C_n, \quad (2)$$

$$f_{ni} \geq 0, f_{nd} \geq 0. \quad (3)$$

Задача мережевої рівноваги для випадку рівноваги транспортної мережі з еластичним попитом, досліджувалась в класичному випадку в статтях [1, 2], з використанням теорії варіаційних нерівностей в асиметричному випадку, коли умови рівноваги не можна переформулювати як умови Кюна-Такера і пов'язаною з ними оптимізаційною задачею [3]. У випадку задачі рівноваги системи при інтернет-рекламуванні маркетингологи намагаються максимізувати відгуки в односторонньому порядку і граничні відгуки максимізуються/зрівнюються при рівновазі по використаним вебсайтам - шляхам. Потoki на моделі мережі, відповідають потокам фінансових ресурсів і вимоги в свою чергу є бюджетами фірм. Задачі рівноваги мережі, включаючи задачі рівноваги транспортної мережі і багато інших задач рівноваги, розглядалися в роботі [4].

Внесок, який зробила праця [5], відзначений в статті [6]. В статті [7] було доведено, що задачі теорії ігор в сенсі Неша, а звідси і в випадку олігопольних задач допускають формулювання умов рівноваги через варіаційні нерівності. Конкуренція з асиметричною інформацією є предметом інших досліджень [8].

На практиці збирати веб-інформацію, яка стосується власної компанії досить легко; важко зібрати дані, які стосуються інших компаній, оскільки вони є конкурентами. Таким чином, функції відгуку можуть бути побудовані на асиметричній інформації. Зацікавленість в дослідженні цих тенденцій носить як теоретичний так і практичний характер.

Метою статті є вироблення стратегії рівноважного розміщення реклами в інтернеті. У зв'язку з цим вирішується задача вимірювання ефективності реклами на традиційних носіях, хоча б тому, що неможливо зібрати дані, що пов'язують появу реклами та відгук на неї. Як наслідок, важко визначити в такому разі, з наукової точки зору, кількість інвестицій в рекламу і прибуток від неї. У випадку розміщення реклами в інтернеті, навпаки, можна точно виміряти появу і відгук. Також вирішується задача побудови моделі, за допомогою якої можна зосередитись на знаходженні рівноваги (яка є оптимальною) інтернет-витрат, і тоді, та частина бюджету, яка залишається, буде оптимальною сумою, яку слід розмістити на традиційних носіях.

Математичне представлення задачі. Припускається, що на даний момент N фірм конкурує на M сайтах і кожна з них намагається максимізувати свій персональний відгук. Нехай, f_{mn} $m=1, 2, \dots, M; n=1, 2, \dots, N$ означає витрати фірми n на сайті m , де $f_{mn} \geq 0$. Витрати на інтернет-рекламу f_{mn} були згруповані в невід'ємні вектори $f \in R_+^{MN}$. Для позначення граничного відгуку на дії фірми щодо онлайн-реклами використовується η_n . Рекламний бюджет фірми n на онлайн-рекламу b_n є зростаючою функцією від η_n і може бути записаним:

$$b_n = b_n(\eta_n), n = 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

Якщо позначити відгук споживачів, який отримує фірма n від сайту m через r_{mn} , тоді природньо припустити, що

$$r_{mn} = r_{mn}(f), \quad (5)$$

яка є зростаючою і угнутою функцією від f , і тоді

$$r_n = r_n(f) = \sum_{m=1}^M r_{mn}(f) \quad (6)$$

є загальним відгуком в інтернет-середовищі для фірми. Функція r_n також має бути зростаючою і угнутою функцією від f [5, 6]. Слід зауважити, що згідно (5) споживчий відгук на рекламні витрати фірми на сайті є функцією від рекламних витрат всіх фірм на всіх вебсайтах. При цьому розглядаються фірми, які конкурують в якійсь конкретній області, а саме в галузі інтернет-послуг.

Тепер робиться припущення, що кожна із фірм намагається максимізувати онлайн-відгук в залежності від обмежень щодо онлайн-бюджету. Таким чином, фірма n , $n=1, \dots, N$ в умовах конкуренції зустрічається з наступною оптимізаційною проблемою.

$$r_n(f) \xrightarrow{f_{1n}, \dots, f_{Mn}} \max, \quad (7)$$

за умови

$$\sum_m f_{mn} \leq b_n(\eta_n), \quad (8) \quad f_{mn} \geq 0, m = 1, 2, \dots, M \quad f_{mn} \geq 0, m = 1, 2, \dots, M. \quad (9)$$

Тут припускається, що η_n необов'язкові дані. Якщо η_n дано, фірма повинна пов'язати $b_n(\eta_n)$, онлайн-реклами з задачею (7)-(9), яку потрібно розв'язати, щоб визначити оптимальне $f_{mn}, m=1, 2, \dots, M$. Маркетингова дія покращується і η_n збільшується, а в результаті збільшується бюджет $b_n(\eta_n)$. В рівновазі, проте, η_n більше не є необов'язковим значенням, а визначається розміщенням f . Формально, це можна обґрунтувати за допомогою наступного твердження, в якому також припускається, що конкуренція між фірмами в сенсі Неша, виражається в не-кооперативній грі [9, 10].

Твердження 1 (рівновага Неша при інтернет-рекламуванні). Вектор $f^* = \{f_{mn}^*, m = 1, \dots, M; n = 1, \dots, N\}$ є рівноважним розподіленням бюджету для всіх фірм на всіх вебсайтах в сенсі Неша тоді і тільки тоді, коли він задовольняє наступним рівнянням і нерівностям для всіх фірм n і всіх сайтів m :

$$\frac{\partial r_n(f^*)}{\partial f_{mn}^*} \begin{cases} = \lambda_n^*, f_{mn}^* > 0, \\ \leq \lambda_n^*, f_{mn}^* = 0. \end{cases} \quad (10)$$

$$\lambda_n^* \begin{cases} = 0, f_{ns}^* > 0, \\ \geq 0, f_{ns}^* = 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$\sum_{m=1}^M f_{mn}^* + f_{ns}^* = b_n(\lambda_n^*). \quad (12)$$

Таким чином, в рівновазі граничні відгуки на всіх вебсайтах дорівнюють граничному відгуку на додаткову одиницю витрат цієї фірми на онлайн-рекламу, якщо використовується цей вебсайт.

Тепер встановимо, що вищевикладені умови рівноваги, які представляють рівновагу Неша для N фірм, конкуруючих на M вебсайтах співпадають з умовами рівноваги для мережі, представленої нижче.

Нехай N є мережею з $N+1$ вузлами, позначеними $\Pi, 1, \dots, N$ та $N(M+1)$ зв'язками, позначеними відповідно, $11, \dots, 1M, 1s; \dots; 1k, \dots, Mk, ks; \dots; 1N, \dots, MN, Ns$ і з N парами початок/мета (П/М), позначеними відповідно $c_l = (\Pi, 1)$, $c_k = (\Pi, k)$, \dots , $c_N = (\Pi, N)$. Кожна пара початок/мета з'єднується M шляхами і "фіктивним" шляхом.

Таким чином, існує всього $N(M+1)$ шляхів в мережі. Вектор потоку шляхів задається як $f = (f_{11}, f_{12}, \dots, f_{MN})^T$, який є вектором у R^{MN} , де f_{mn} представляє потік на шляху mn . Потоки f_{ns} : $n = 1, 2, \dots, N$ представляють невід'ємні потоки на відповідних хибних шляхах і, як буде невдовзі показано, відповідають резервній або невикористаній частині бюджету. Потрібно прийняти до уваги, що в даній мережі кожний шлях складається з єдиного зв'язку.

Нехай тепер $u_{mn}(f)$ означає граничний прибуток від мережевого потоку f на шляху mn , який визначається таким чином:

$$u_{mn}(f) = \frac{\partial r_n(f)}{\partial f_{mn}}; m = 1, 2, \dots, M; n = 1, 2, \dots, N,$$

при цьому всі граничні прибутки на хибному шляху вважаються рівними нулю. Еластичність попиту, пов'язана з П/М парою і представлена $b_n(\cdot)$ для $n = 1, 2, \dots, N$. Тоді умови рівноваги (10)-(12) мають наступну інтерпретацію для рівноваги мережі: тільки ті шляхи, які забезпечують максимальний граничний прибуток, тобто, максимальні граничні відгуки використовуються (мають додатній потік) в рівновазі.

Перед тим, як встановити варіаційні нерівності для умов рівноваги Неша (10)-(12) вводяться наступні позначення. Оскільки бюджет на онлайн рекламу фірми $b_n(\lambda_n)$ є зростаючою функцією від граничного відгуку λ_n , то $\lambda_n = \lambda_n(b_n)$ є оберненою функцією $b_n(\cdot)$ і є також зростаючою функцією. Тепер ми визначимо наступні вектори: нехай

$$u(f) = (u_{mn}(f); m = 1, 2, \dots, M; n = 1, 2, \dots, N),$$

$$b = (b_n; n = 1, 2, \dots, N), \lambda(b) = (\lambda_n(b_n); n = 1, 2, \dots, N).$$

Тоді $u(f) \in R^{MN}$, $b \in R^N$ і $\lambda(b) \in R^N$ відповідно.

Умови рівноваги (10)-(12) можуть бути записані у еквівалентному вигляді: для всіх фірм $n = 1, 2, \dots, N$ і для всіх вебсайтів $m = 1, 2, \dots, M$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r_n(f^*)}{\partial f_{mn}} &= \lambda_n(b_n^*), f_{mn}^* > 0, \\ &\leq \lambda_n(b_n^*), f_{mn}^* = 0, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} &= 0, f_{ns}^* > 0, \\ &\geq 0, f_{ns}^* = 0, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\sum_{m=1}^M f_{mn}^* + f_{ns}^* = b_n(\lambda_n^*). \quad (15)$$

Тепер можна стверджувати наступне.

Твердження 2. (Формулювання у вигляді варіаційних нерівностей рівноваги Неша при інтернет-рекламуванні.) Вектор $(f^*, b^*) \in K^1$ є рівноважним згідно умов (13)-(15), еквівалентних (10)-(12) тоді і тільки тоді, коли він є розв'язком варіаційної задачі:

$$u(f^*), f - f^* - \lambda(b^*), b - b^* \leq 0, \forall (f, b) \in K^1,$$

$$K^1 \equiv \left\{ (f, b) \mid (f, b) \in R_+^{MN+N}, \sum_{m=1}^M f_{mn} + f_{ns} = b_n, f_{ns} \geq 0; n = 1, 2, \dots, N \right\}, \quad (16)$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означає внутрішній добуток у Евклідовому просторі потрібної розмірності.

Важливо зазначити, що множина K^1 є опуклою необмеженою множиною в математичному сенсі. Але з маркетингової точки зору, доцільно вважати цю множину опуклою, обмеженою компактною множиною, оскільки онлайн-бюджет фірми b_n менший, або дорівнює загальному рекламному бюджету фірми, який в свою чергу не може бути нескінченним (отже необмеженим).

Алгоритм для обчислення рівноважного рекламного бюджету і розподілу бюджету. Спочатку представимо точний алгоритм для варіаційної нерівності спеціального вигляду, який дозволяє визначити рівноважний бюджет і явні витрати на рекламу і буде покажемо, що розв'язок варіаційної нерівності (16) можна наблизити послідовністю розв'язків відповідних варіаційних нерівностей спеціального вигляду. В алгоритмі використовується викладена нижче мережева структура задачі розміщення реклами в інтернеті.

Твердження 3. Якщо варіаційна нерівність (16) є квадратною з відокремлюваними змінними в сенсі: для $m=1, 2, \dots, M; n = 1, 2, \dots, N$:

$$u_{mn}(f) = \frac{\partial r_n(f)}{\partial f_{mn}} = a_{mn} f_{mn} + k_{mn}$$

$$\lambda_n(b_n) = \alpha_n b_n + \beta_n$$

де $a_{mn} < 0, \alpha_{mn} > 0$, для того, щоб забезпечити сильну монотонність $-u(f)$ та $\lambda(b)$; $k_{mn} > 0$, для того, щоб забезпечити зростання $r_n(f)$ на допустимій множині K^1 і $\beta_n \leq 0$ для того, щоб гарантувати невід'ємність бюджету b_n для будь-яких невід'ємних границь, тоді рівноважний Інтернет-бюджет та його розміщення можна розрахувати за наступним алгоритмом: для кожного $n = 1, 2, \dots, N$:

Крок 0: $\{k_{mn}\}$ розташовуються в незростаючому порядку. Не втрачаючи загальності можна припустити, що $k_{1n} \geq k_{2n} \geq \dots \geq k_{Mn}$.

Крок 1: Нехай $j = 1$. Обчислюється

$$b_n^j = \frac{\beta_n \sum_{m=1}^j \frac{1}{a_{mn}} - \sum_{m=1}^j \frac{k_{mn}}{a_{mn}}}{1 - \alpha_n \sum_{m=1}^j \frac{1}{a_{mn}}}, \quad \lambda_n^j = \alpha_n b_n^j + \beta_n.$$

Тепер потрібно порівняти λ_n^j та k_{jn} :

$$k_{1n} \geq k_{2n} \geq \dots \geq k_{jn} \geq \lambda_n^j \geq k_{j+1n} \geq k_{j+2n} \geq \dots \geq k_{Mn}.$$

Якщо $l = j$, потрібно покласти $b_n^* = b_n^j$, $\lambda_n^j = \alpha_n b_n^* + \beta_n$, де b_n^* є рівноважним бюджетом для фірми n і можна переходити до Кроку 2. Якщо, $j < l$, то потрібно покласти $j = j+1$ і повернутись до Кроку 1. Якщо $j > l$ то покласти $j = j-1$ і перейти до кроку 1.

Крок 2. Нехай $\lambda_n^* = \max\{0, \lambda_n^j\}$.

Крок 3. Розрахунок розміщення рівноважного інтернет-бюджету: для $n = 1, 2, \dots, N$:

$$f_{mn}^* = \frac{\lambda_n^* - k_{mn}}{a_{mn}}, m = 1, 2, \dots, j,$$

$$f_{mn}^* = 0, m = j+1, \dots, M.$$

Тут необхідно звернути увагу, що граничний відгук з вебсайту m для фірми n дорівнює λ_n^* .

Якщо $\lambda_n^j < 0$, фірма досягає максимального відгуку у внутрішній точці допустимої множини K^1 і виникає надлишок бюджету $f_{ns}^* = b_n^* - \sum_{m=1}^M f_{mn}^*$.

Висновки

В статті запропоновано схему мережевої рівноваги при інтернет-рекламуванні для випадку, коли декілька фірм змагаються на декількох веб-сайтах. Було доведено, що такий підхід оправданий, оскільки онлайн-рекламування відрізняється від розміщення реклами на інших носіях. Було ідентифіковано мережеву структуру для задачі рівноваги в умовах конкуренції, розв'язання якої визначає розміри рівноважного онлайн бюджету за умов конкуренції фірм, а також рівноважні розміщення цих бюджетів на різних вебсайтах, в термінах вартості реклами. Завдяки спеціальній структурі задачі було запропоновано спеціальний алгоритм і далі показано як цей алгоритм можна звести до більш загального алгоритму варіаційних нерівностей. В статті показано як інструменти операційних досліджень, а саме, мережеві засоби і варіаційні нерівності можна застосувати в області маркетингу та реклами.

Хоча в цій роботі обговорюються стратегії рівноважного розміщення реклами в інтернеті (що теж є оптимізацією), оптимальний стан не-інтернет рекламування досягається одночасно витратою тих коштів, які залишились в бюджеті після розміщення тієї кількості реклами в Інтернеті, яка була розрахована завдяки даній моделі.

Література.

1. Chatterjee P. Modeling the clickstream: implications for web-based advertising efforts / P. Chatterjee, D.L. Hoffman, T.P. Novak // *Marketing Science* 22. – 2003. – P. 520-541.
2. Zhao L. A network equilibrium framework for Internet advertising: Models, qualitative analysis and algorithms / L. Zhao, A. Nagurney // *European Journal of Operational Research* 187. – 2008. – P. 456-472.
3. Dafermos S. An iterative scheme for variational inequalities / S. Dafermos // *Mathematical Programming* – 1983. – №28. – P. 174-185.
4. Reibstein D. Competitive responsiveness / D. Reibstein, D. Wittink // *Marketing Science*. – 2005. – №23. – P. 280-303.
5. Nash J. F. Noncooperative games / J. F. Nash // *Annals of Mathematics*. – 1951. – №54. – P. 286-298.
6. Dafermos S. Sensitivity analysis for the general asymmetric network equilibrium problem / S. Dafermos, A. Nagurney // *Mathematical Programming*. – 1984. – №28. – P. 174-184.
7. Zhao L. General economic equilibrium and variational inequalities / L. Zhao, S. Dafermos // *Operations Research Letters*. – 1991. – №10. – P. 369-376.
8. Бугрій О. М. Про єдиність розв'язку деякої нелінійної параболічної варіаційної нерівності в необмеженій області / О. М. Бугрій, // *Математичний вісник НТШ*. – 2006. – Т. 3. – С. 5-13.
9. Dafermos S. The general multimodal network equilibrium problem with elastic demand. *Networks* / S. Dafermos // *Operations Research*. – 1982. – №12. – P. 57-72.
10. Бугрій О. М. Деякі властивості розв'язків параболічних варіаційних нерівностей зі змінним ступенем не лінійності / О. М. Бугрій, О. Т. Панат // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2006. – Т. 49, № 2. – С. 99-107.

Дата надходження в редакцію: 24.07.2015 р.

Рецензент: д.т.н., проф. О. В. Барабаш