УДК 004.65

Шевченко Г. В., магістр. Тел.: +380 (50) 237 41 20. E-mail: foxik.ryzyy@gmail.com
Мушта С. С., магістр. Тел.: +380 (93) 376 59 61. E-mail: s.mushta @lsd.kiev.ua
(Державний університет телекомунікацій, м. Київ)

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ МЕРЕЖЕВОЇ РІВНОВАГИ ТА АЛГОРИТМ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ РІВНОВАЖНОГО РЕКЛАМНОГО БЮДЖЕТУ І ЙОГО РОЗПОДІЛУ ПРИ ІНТЕРНЕТ-РЕКЛАМУВАННІ

Shevchenko G. V., Mushta S. S. The mathematical model of network equilibrium and algorithm for equilibrium budget calculation and allocation for internet advertising. In this paper a network equilibrium framework for the modeling and analysis of competitive firms engaged in Internet advertising among multiple websites was developed. The model allows to determine both the equilibrium online advertising budget as well as the advertising expenditures on the different websites. Specialization of the model to the case of fixed online budgets was done. The governing equilibrium conditions of both models are shown to satisfy finite-dimensional variational inequalities. The qualitative properties of the solution patterns as well as computational procedures that exploit the network structure of these problemswere developed. The models and algorithms are illustrated with numerical examples. This paper adds to the growing literature of the application of network-based techniques derived from operations research to the advertising.

Keywords: limited response, network equilibrium by Nash, finite-dimensional variational inequalities, optimal budgeting, budget allocation.

Шевченко Г. В., Мушта С. С. Математична модель мережевої рівноваги та алгоритм для обчислення рівноважного рекламного бюджету і його розподілу при інтернет-рекламуванні. Розроблено схему рівноваги мережі для моделювання і аналізу поведінки конкуруючих фірм, які займаються розміщенням Інтернет-реклами на багатьох веб-сайтах. Розглянуто випадок фіксованого он-лайн бюджету для фірм. Показано, що основні умови рівноваги для моделі задовольняють варіаційним нерівностям. Представлено якісні властивості способів розв'язання, а також алгоритм обчислення в якому використовується структура абстрактної мережі, яка лежить в основі даної задачі.

Ключові слова: граничний відгук, максимізація відгуку, оптимальні умови Кюна-Такера, рівновага Неша

Шевченко Г. В., Мушта С. С. Математическая модель сетевого равновесия и алгоритм для вычисления равновесного рекламного бюджета и его распределения при интернет-рекламировании. Разработана система равновесия системы для моделирования и анализа поведения конкурирующих фирм, занимающихся размещением интернет-рекламы на нескольких вебсайтах. Рассмотрен случай фиксированного он-лайн бюджета. Было показано, что основные условия равновесия для этой модели удовлетворяют вариационные неравенства. Представлены качественные характеристики способов решения, а также схема вычисления, в которой используется абстрактная сеть, которая лежит в основе данных задач.

Ключевые слова: максимизация отклика, оптимальные условия Кюна-Такера, предельный отклик, равновесие по Нешу

Вступ. Складним завданням є вимірювання ефективності реклами на традиційних носіях, хоча б тому, що неможливо зібрати данні, що пов'язують появу реклами та відгук на неї. Як наслідок, важко визначити в такому разі, з наукової точки зору, кількість інвестицій в рекламу і прибуток від неї. У випадку розміщення реклами в інтернеті, навпаки, можна точно виміряти появу і відгук. За допомогою даної моделі можна зосередитись на знаходженні рівноваги (яка є оптимальною) інтернет-витрат, і та частина бюджету, яка залишається, є оптимальною кількістю, яку слід розмістити на традиційних носіях.

Крім того, можна отримати функцію відгуку, базуючись на реальних даних. В статті запропоновано збирати дані, за кількістю натискання клавіш (кліків) і відповідних затрат на рекламу, а потім використати модель квадратичної регресії для побудови функції. На практиці збирати веб-інформацію, яка стосується власної компанії досить легко; важко отримати дані, які стосуються інших компаній, оскільки вони є конкурентами. Таким чином, функції відгуку можуть бути побудовані на асиметричній інформації.

Постановка задачі в загальному вигляді. Припускається, що одна і та сама послуга, а саме, надання інтернет-послуг (в подальшому продукт) може рекламуватись N фірмами в усіх середовищах. Для фірми $n;\ n = 1,2,...N$: нехай f_{ni} означає витрати на інтернет-рекламу і нехай f_{nd} витрати на рекламу в інших засобах. Для простоти не розрізняються веб-сайти в моделі, яка пропонується в даній статті. Але також пропонується модель мережевої рівноваги яка враховує кілька веб-сайтів. Згрупуємо f_{ni} та $f_{nd}, n = 1,2,...N$ відповідно в вектори f_i, f_d. Надалі, якщо не сказано інакше, всі вектори вважаються векторами-стовпцями.

Нехай $r_{ni}\left(f_i\right)$ та $r_{nd}\left(f_d\right)$ позначають відгук споживачів внаслідок витрат f_i та f_d відповідно. Припускається, що відгук споживачів на витрати на інтернет-рекламу залежить лише від витрат, які було зроблено саме на дане середовище, це стосується і витрат на інші рекламні середовища. Це припущення менш строге, ніж в інших аналогічних дослідженнях.

Можна знехтувати крос-медійним ефектом, але потрібно врахувати крос-фірмовий ефект, і в той же час було враховано основні механізми маркетингу.

Вважається, що $r\left(f_j\right), \cdot j = i, \cdot d$ є зростаючою, диференційованою та угнутою функцією від f_j. Припускається, що кожна фірма n має загальний рекламний бюджет C_n.

Задача оптимального розподілу бюджету, з якою зустрічається фірма *n*, при припущенні, що вона бажає максимізувати споживчій відгук через всі середовища, в межах бюджету, можна висловити, як наступну оптимізаційну задачу:

$$\left\{\left\{r_{ni}(f_i) + r_{nd}\left(f_d\right)\right\}\right\} \xrightarrow{f_{ni}, f_{nd}} \max, \tag{1}$$

за умови

$$f_{ni} + f_{nd} \le C_n, \tag{2}$$

$$f_{ni} \ge 0, \cdot f_{nd} \ge 0.. \tag{3}$$

Аналіз останніх публікацій. Задачі рівноваги мережі, включаючи задачі рівноваги транспортної мережі і багато інших задач рівноваги в економіці, розглядались в книгах [1-3]. Внесок, який зробила праця [4] відзначений в статті [5]. Важливо відзначити, що автори [6] довели, що задачі теорії ігор в сенсі Неша, а звідси і в випадку інших задач допускають формулювання через варіаційні нерівності умов рівноваги. Відповідне доведення вищевикладеної моделі представлено в роботі [7]. Використання методу проекцій дає можливість будувати ефективні чисельні алгоритми. Обґрунтування існування та єдиності рівноваги наведено в роботі [8].

Авторами була розглянута оптимізаційна задача, яка виникає перед фірмою при визначенні розподілу її рекламного бюджету для випадку еластичного бюджету [9]. Шляхом аналізу отриманої задачі, також було встановлено, що бюджет фірми на інтернет-рекламу є зростаючою функцією від граничного відгуку. В даній статті розглядається випадок фіксованого рекламного бюджету.

Метою статті є побудова моделі, за допомогою якої можна зосередитись на знаходженні рівноваги (яка є оптимальною) інтернет-витрат, і тоді, та частина бюджету, яка залишається, буде оптимальною сумою, яку слід розмістити на традиційних носіях.

Математичне представлення оптимізаційної задачі. Припускається, що на даний момент N фірм конкурує на M сайтах і кожна з них намагається максимізувати свій персональний відгук. Нехай, f_{mn} m=1, 2,...,M; n=1,2,...,N означає витрати фірми n на сайті m, де $f_{mn} \geq 0$. Витрати на інтернет-рекламу f_{mn} були згруповані в невід'ємні вектори $f \in R_{+}^{MN}$. Для позначення граничного відгуку на дії фірми щодо онлайн-реклами використовується η_n . Рекламний бюджет фірми n на онлайн-рекламу b_n у випадку фіксованого бюджету для кожної фірми n, більше не є змінною величиною, а вважається відомою, заданою і рівною $\bar{b}_n$, тоді умови рівноваги можуть бути записані для всіх фірм $n = 1,2,...,N$ і для всіх веб-сайтів $m = 1,2,...,M$: і матимуть вигляд:

$$\frac{\partial r_n(f^*)}{\partial f_{mn}} \begin{cases} = \lambda_n\left(b_n^*\right), & f_{mn}^* > 0, \\ \leq \lambda_n\left(b_n^*\right), & f_{mn}^* = 0, \end{cases} \tag{4}$$

$$\lambda_n\left(b_n^*\right) \begin{cases} = 0, & f_{ns}^* > 0, \\ \geq 0, & f_{ns}^* = 0, \end{cases} \tag{5}$$

$$\sum_{m=1}^{M} f_{mn}^* + f_{ns}^* = \bar{b}_n, \tag{6}$$

де λ_n – множник Лагранжа, пов'язаний з обмеженням бюджету (2)

З викладеного вище випливає наступний наслідок:

***Наслідок*:** (Формулювання за допомогою варіаційних нерівностей рівноваги Неша інтернет-рекламування з фіксованим бюджетом). Вектор $f^* \in K^2$ є розв'язком умов рівноваги (4)-(5) при умові (6) тоді і тільки тоді, коли він задовольняє варіаційні нерівності:

$$u\left(f^*\right),\ f - f^* \leq 0, \text{ для будь-яких } f \in K^2 \text{ , де}$$

$$K^2 \equiv \left\{ f \middle| f \epsilon R_{+}^{MN}, \quad \sum_{m=1}^{M} f_{mn} + f_{ns} = \bar{b}_{n,,} f_{ns} \geq 0; \quad n = 1,2,\ldots,N \right\}. \tag{7}$$

Доведення. Оскільки $\sum_{m=1}^{M} f_{mn} + f_{ns} = \bar{b}_{n,,} f_{ns} \geq 0; \quad n = 1,2,\ldots,N$ і також, як f так і f^* повинні задовольняти цим обмеженням, то другий член у варіаційній нерівності (7) стає нулем і твердження доведено.

Значення λ_n, $n = 1,2,...,N$ у рівнянні (5) є множниками Лагранжа, які пов'язані з обмеженнями бюджету, що випливають з оптимізаційних умов Кюна-Такера. Тобто, якщо бюджет не зв'язаний, то фірма повинна витрачати його на ті носії, граничні відгуки від яких, дорівнюють нулю, в той же час, якщо граничні відгуки додатні, фірма повинна витрачати аж доки бюджет не стане зв'язаним.

Для простоти представлення розглядаються варіаційні нерівності в стандартному вигляді: визначається $X^* \in K$, яке задовольняє:

$$F\left(X^*\right), X - X^* \geq 0, \forall\ X \in K, \tag{8}$$

де K вважається замкненим і опуклим і $F(X)$ є неперервною функцією $K \to R^M$. Припускається компактність K, оскільки в реальності, доречним було б припустити, що в рекламній практиці K буде обмеженим. Якщо покласти $X \equiv f,\ F\left(X\right) \equiv -u\left(f\right) maK = K^2,$ тоді варіаційні нерівності (7) можна переписати в стандартному вигляді (8).

Існування розв'язку X^* варіаційної нерівності (8) випливає з припущення, що F неперервна на K за умови що а множина K є компактною. Варіаційна нерівність (8) має єдиний розв'язок X^* , якщо функція F є строго монотонною і за умови. що X^* існує.

Алгоритми обчислення рівноважних бюджетів. Тепер буде надано алгоритм для обчислення рівноважних рекламних бюджетів і розподілу бюджету. Спочатку буде введено точний алгоритм для варіаційної нерівності спеціального вигляду, який дозволяє визначити рівноважний бюджет і явні витрати на рекламу для випадку фіксованого бюджету. І нарешті буде показано, що розв'язок варіаційної нерівності (7) можна наблизити послідовністю розв'язків відповідних варіаційних нерівностей спеціального вигляду. В алгоритмах використовується мережева структура задачі розміщення реклами в інтернеті.

Алгоритм фіксованого бюджету. У випадку фіксованого бюджету кожної фірми варіаційна нерівність (7) відповідає за умови рівноваги і є квадратною з відокремлюваними змінними, якщо виконується

$$u_{mn}\left(f\right)=\frac{\partial r_n(f)}{\partial f_{mn}}=a_{mn}f_{mn}+k_{mn}. \tag{9}$$

Якщо варіаційна нерівність (7) **є** квадратною з відокремлюваними змінними, в тому розумінні, що (9) виконується при $m = 1,2,...,M \; i \; n = 1,2,...,N \; i \; a_{mn} < 0 \; i \; k_{mn} > 0$, що гарантує сильну монотонність $-u(f)$ на допустимій множині K^2 , то рівноважне розміщення інтернет-бюджету можна обчислити за допомогою наступного алгоритму:

Для кожного $n = 1,2,...,N$:

Крок 0: потрібно розташувати $\{k_{mn}\}$ в незростаючому порядку. Не втрачаючи загальності припускається, що: $k_{1n} \geq k_{2n} \geq \ldots \geq k_{Mn}$.

Крок 1: Нехай $j = 1$ і потрібно розрахувати

$$\lambda_n^j=\frac{\overline{b_n}+\sum_{m=1}^{j}\frac{k_{mn}}{a_{mn}}}{\sum_{m=1}^{j}\frac{1}{a_{mn}}}.$$

Порівнюються λ_n^j та k_{jn} $k_{1n} \geq k_{2n} \geq \ldots \geq k_{\ln} \geq \lambda_n^j \geq k_{l+1n} \geq k_{l+2n} \geq \ldots \geq k_{Mn}$.

Якщо $l = j$, , покладається $\lambda_n^* = \max\{0\lambda_n^j\}$, ,де λ_n^* є граничним відгуком у рівновазі для фірми n і можна переходити до кроку 2; якщо $j < l$, то покладається $j = j+1$ і потрібно повертатись до Кроку 1

Якщо $j > l$ і покласти $j = j-1$ і потрібно перейти до кроку 1.

Крок 2. Розрахунок рівноважного розміщення бюджету:

$$f_{mn}^*=\frac{\lambda_n^*-k_{mn}}{a_{mn}}, m=1,2,\ldots,j,$$

$$f_{mn}^*=0, m=j+1,\ldots,M.$$

$$f_{ns}^*=\bar{b}_n-\sum_{m=1}^{M}f_{mn}^* \; .$$

Алгоритм варіаційних нерівностей. Тепер буде запропоновано алгоритм, який будує послідовність квадратичних задач рівноваги мережі з відокремлюваними змінними, кожну з яких можна розв'язати за допомогою алгоритму запропонованого вище для випадку фіксованого бюджету. Даний алгоритм варіаційних нерівностей є загальним і будується на основі ітераційного методу Дафермоса [10]. Особливості побудови алгоритму варіаційних нерівностей полягають в нступному:

По-перше, буде спрощено викладки, за допомогою введення вектор-функції $g(x) = (-u(f),\ \lambda(b)): K^1 \to R^{MN+N}$, де $x \epsilon R^{MN+N}$. Далі буде побудовано функцію $G(x,\ y)\colon\ K^1 \text{x}\, K^1 \to R^{MN+N}$, яка має наступні властивості: $G(x,x) = g(x)$ для будь-якого $x \epsilon\ K^1$; для кожних *x, y є K¹, матриця* $(MN+N)\text{ x } (MN+N)$ є додатньо визначеною.

Будь-яка гладка функція $G(x,y)$ з вищевикладеними властивостями утворює наступний алгоритм.

Крок 0. Ініціалізація: Береться початкове значення $x^0 \epsilon\ K^1$. Покладається $\tau\ := 1$

Крок 1. Побудова і обчислення: Обчислюється x^τ шляхом розв'язання варіаційної нерівності:

$$G(x^\tau, x^{\tau-1})^T, x - x^\tau \geq 0, \forall\ x \epsilon K^1$$

Крок 2. Перевірка: Якщо $\left|x^\tau - x^{\tau-1}\right| < \varepsilon, \varepsilon > 0,$ є попередньо визначеною похибкою, тоді потрібно зупинитись, в іншому випадку покласти $\tau\ := \tau + 1$ і повернутись до кроку 1.

Алгоритм для розв'язання варіаційних нерівностей (7) для випадку фіксованого бюджету для інтернет-рекламування в свою чергу має вигляд:

Будуємо гладку функцію $G(x,\ y)\colon\ K^2 \text{x}\, K^2 \to R^{MN+N}$, яка має наступні властивості:

1). $G(x,x) = -u(x)$ для будь-якого $x\ \epsilon\ K^2$

2). для кожних $x,\ y\ \epsilon\, K^2$, матриця $\nabla_x G(x,y)$ розміру *(MN)* x (*MN)* є додатньо визначеною.

Будь-яка гладка функція $G(x,y)$ з вищевикладеними властивостями утворює наступний алгоритм.

Крок 0. Ініціалізація: Береться початкове значення $x^0 \epsilon\ K^2$. Покладається $\tau\ := 1$.

Крок 1. Побудова і обчислення: Обчислюється x^τ розв'язком варіаційної нерівності:

$$G(x^\tau, x^{\tau-1})^T, x - x^\tau \geq 0, \forall\ x \epsilon K^1$$

Крок 2. Перевірка збіжності: Якщо $\left|x^\tau - x^{\tau-1}\right| < \varepsilon, \varepsilon > 0$ є попередньо визначеною похибкою, тоді можна зупинитись, в іншому випадку покладається $\tau\ := \tau + 1$ і відбувається перехід до кроку 1.

Метод проекцій для фіксованого бюджету. Тепер розглянемо метод проекцій для фіксованого бюджету на інтернет-рекламування.

В частковому випадку, якщо тепер обрати $G(x^\tau, x^\tau - 1))$ такою, що:

$$G\left(x^\tau, x^{\tau-1}\right) = -u\left(x^{\tau-1}\right) - \frac{1}{\rho}\mathrm{A}\left(x^\tau - x^{\tau-1}\right),$$

де матриця **A** розміру *(MN)*×(*MN)* є діагональною матрицею з діагональними елементами :

$$a_{ijij} = \frac{\partial u_{ij}(x^0)}{\partial x_{ij}}, \; i = 1,2,\ldots,MN; \; j = 1,2,\ldots,MN \,.$$

Величина ρ змінюється в межах [0, 1]. Тоді варіаційна нерівність є квадратичною з відокремлюваними змінними і її розв'язок $(f_1^\tau, f_2^\tau, ..., f_{MN}{}^\tau,)$ можна отримати за допомогою алгоритму точного обчислення, представленого вище. Таким чином, використовуючи ітераційний алгоритм варіаційних нерівностей, викладений вище, можна отримати послідовність $\{x^\tau\}$. Ця послідовність збігається до рівноважного розв'язку, якщо $-u(f)$ сильно монотонна [10], оскільки K^2 є компактною.

Тепер буде наведено приклад для ілюстрації розв'язання варіаційної нерівності (7) за допомогою метода проекцій у випадку розв'язання задачі мережевої рівноваги при розміщенні реклами з фіксованим бюджетом на інтернет-рекламу. В даному прикладі $M = 3$ і $N = 2$. Тобто дві фірми розміщують рекламу на трьох веб-сайтах. Кожна з них має фіксований бюджет $b_1 =$ \$20 $b_1 =$ \$20 і $b_2 =$ \$15 відповідно.

Функції $u_{mn}(.)$ та $\lambda_n(.)$ мають вигляд:

$u_{11}(f) = -2f_{11} - 0.5f_{12} + 100, u_{21}(f) = -4f_{21} - f_{22} + 80, u_{31}(f) = -2f_{21} + 0.5f_{32} + 45,$

$u_{12}(f) = -f_{12} - 0.2f_{11} + 90, u_{22}(f) = -3f_{22} - 0.5f_{21} + 80, u_{32}(f) = -5f_{32} + f_{31} + 90.$

Було використано формулу проекцій для побудови $\mathrm{G}(.,.)$ з $\rho = 0.2$. Отримана послідовність f^τ записана в Табл. 1.

Розв'язок f^τ Табл. 1

Ітерація τ	$f^\tau = (f_{11}{}^\tau, f_{21}{}^\tau, f_{31}{}^\tau, f_{12}{}^\tau, f_{22}{}^\tau, f_{32}{}^\tau)$
0	(10.000, 5.000, 5.000, 4.000, 7.000, 4.000)
1	(14.067, 5.933, 0.0, 5.525, 5.698, 3.777)
2	(14.621, 5.379, 0.0, 6.724, 3.600, 4.676)
…	…
14	(16.210, 3.790, 0.0, 11.011, 1.054, 2.935)
15	(16.216, 3.784, 0.0, 11.057, 1.016, 2.927)

Зрозуміло, що умови рівноваги (4)-(6) будуть досягатись із кожним τ, як показано в Табл. 2. При $\tau = 15$ $|x^\tau - x^{(\tau-1)}| < 0.06$ досягається і подальші обчислення припиняються.

Значення *u* Табл. 2

Ітераціяτ	$u(f^{\tau)}) = (\mathrm{u}_{11}, u_{21}, u_{31}, u_{12}, u_{22}u_{32})$
0	(78.000, 53.000, 37.000, 84.000,56.500,75.000)
1	(69.104, 50.569, 46.889, 81.662, 59.939,71.113)
2	(67.397, 53.806, 46.800, 80.351, 63.283, 72.001)
...	...
14	(62.076, 63.786, 46.467, 75.747, 74.943, 75.326)
15	(62.040, 63.847, 46.464, 75.700, 75.364, 75.060)

Висновки

В цій статті було запропоновано схему мережевої рівноваги при інтернет-рекламуванні для випадку, коли декілька фірм змагаються на декількох веб-сайтах і мають фіксовані рекламні бюджети. Доведено, що такий підхід оправданий, оскільки онлайн-рекламування відрізняється від розміщення реклами на інших носіях. Було ідентифіковано мережеву структуру для задачі рівноваги в умовах конкуренції, розв'язання якої визначає рівноважні розміщення бюджетів на різних веб-сайтах, в термінах вартості реклами. Завдяки спеціальній структурі задачі було запропоновано спеціальний алгоритм і далі показано як цей алгоритм можна звести до більш загального алгоритму варіаційних нерівностей. В статті показано як інструменти операційних досліджень, а саме, мережеві засоби і варіаційні нерівності можна застосувати в області маркетингу та реклами.

Хоча в цій роботі обговорюються стратегії рівноважного розміщення реклами в інтернеті (що теж є оптимізацією), оптимальний стан не-інтернет рекламування досягається одночасно витратою тих коштів, які залишились в бюджеті після розміщення тієї кількості реклами в Інтернеті, яка була розрахована завдяки даній моделі.

Література.

1. Dafermos S. The general multimodal network equilibrium problem with elastic demand. Networks / S. Dafermos // Operations Research. – 1982. №12. – P. 57-72.

2. Zhao L., Nagurney A. A network equilibrium framework for Internet advertising: Models, qualitative analysis and algorithms / L. Zhao, A. Nagurney // European Journal of Operational Research. – 2008. – №187. – P. 456-472.

3. Бугрій О. М. Деякі властивості розв'язків параболічних варіаційних нерівностей зі змінним степенем не лінійност ./ О. М. Бугрій, О. Т. Панат // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – Т. 49, № 2. – С. 99-107.

4. Reibstein D. Competitive responsiveness / D. Reibstein, D. Wittink // Marketing Science. – 2005. – №23. – P. 280-303.

5. Chatterjee P. Modeling the clickstream: implications for web-based advertising efforts / P. Chatterjee, D.L. Hoffman, T.P. Novak // Marketing Science. – 2003. – № 22. – P. 520-541.

6. Dafermos S. Sensitivity analysis for the general asymmetric networkequilibrium problem / S. Dafermos, A. Nagurney, // Mathematical Programming. – 1984. – №28. – P. 174-184.

7. Zhao L. General economic equilibrium and variational inequalities / L.Zhao, S. Dafermos // Operations Research Letters. – 1991. – №10. – P. 369-376.

8. Бугрій О. М. Про єдиність розв'язку деякої нелінійної параболічної варіаційної нерівності в необмеженій області / О. М. Бугрій. // Математичний вісник НТШ. – 2006. – Т. 3. – С. 5-13.

9. Шевченко Г. В. Математична модель мереживої рівноваги при інтернет-рекламуванні / Г. В. Шевченко, С. С. Мушта // Наукові записки Українського науково-дослідного інституту зв'язку. – 2015. - №5(39). – С. 79- 82.

10. Dafermos S. An iterative scheme for variational inequalities / S. Dafermos // Mathematical Programming. – 1983. – №28. – P. 174-185.

Дата надходження в редакцію: 11.08.2015 р. Рецензент: д.т.н., проф. О. В. Барабаш