УДК 517-027.22

# ПРИКЛАДИ ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАДАЧ

**І.В.Калашніков, Г.В.Лозовська, І.М.Суховітрук**

***Анотація.*** *У статті розглядаються смислові операції: конкретизація, абстрагування, інтерпретація, узагальнення та систематизація на прикладі розв'язування прикладних задач із використанням математичних методів, зокрема методів математичного аналізу.*

***Ключові слова.*** *Прикладна задача, математична модель, конкретизація, абстрагування, інтерпретація, узагальнення, систематизація.*

***Аннотация.*** *В статье рассматриваются смысловые операции: конкретизация, абстрагирование, интерпретация, обобщение и систематизация на примере решения прикладных задач с использованием математических методов, в частности методов математического анализа.*

***Ключевые слова.*** *Прикладная задача, математическая модель, конкретизация, абстрагирование, интерпретация, обобщение, систематизация.*

***Resume***. *The article deals with the semantic operations: specification, abstraction, interpretation, compilation and systematization of the example of solving applied problems using mathematical methods, in particular the methods of mathematical analysis.*

***Key words.*** *Applied task, the mathematical model, specification, abstraction, interpretation, compilation, systematization.*

У процесі аналізу педагогічної, методичної та дидактичної літератури нами було встановлено недостатню систематизованість практичних задач у процесі вивчення елементів математичного аналізу. Тобто існуюча навчальна література не містить дієвої добірки задач прикладного змісту для того, щоб показати значимість математичного аналізу у вирішенні практичних проблем, та навчити учнів абстрагуватись при розв'язуванні задачі до рівня математичної моделі, інтерпретувати отримані результати та вміти узагальнювати їх, розв'язуючи подібні типи задач.

Нами зроблено спробу розширити базу задач прикладного змісту. У добірці задач, які будуть подані нижче, математичний аналіз поєднується з: геометрією, фізикою, економікою.

**Задача 1.** Прямокутну ділянку землі, яка дотикається до стіни приміщення, потрібно відгородити парканом. Частина паркану, паралельна до стіни, повинна бути кам'яною, а інша частина – дерев'яною. Площа всієї ділянки $90\ м^2$. Вартість одного метру кам'яного паркану $450\ грн.$, а дерев'яного – $40\ грн.$ Знайдіть такі розміри ділянки, щоб вартість всього паркану була найменшою.

**Розв'язання.** Створимо математичну модель. Нехай $x$ – довжина кам'яної частини паркану, $x \in (0;+\infty)$, тому ширина прямокутної ділянки – $\dfrac{90}{x}$.

Відповідно до математичної моделі сформулюємо математичну задачу. Знайдіть такі розміри ділянки, щоб вартість паркану була найменшою. Тоді кошти, які потрібні на будівництво паркану, виразимо формулою: $f(x) = 450x + 40 \cdot 2 \cdot \dfrac{90}{x}$, тобто функція $f(x) = 450x + \dfrac{7200}{x}$ – математична модель, згідно з якою знаходимо вартість забору в залежності від його довжини.

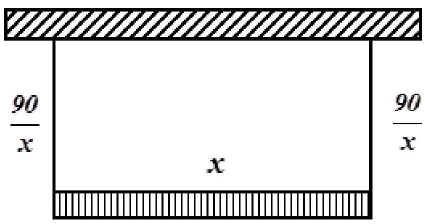


Рис.1

Дослідимо дану функцію на найменше значення, використовуючи поняття похідної, знайдемо похідну функції $f(x) = 450x + \dfrac{7200}{x}$.

$$f'(x) = \left(450x + \frac{7200}{x}\right)' = 450 - \frac{7200}{x^2} = 450\left(1 - \frac{16}{x^2}\right) = 450 \cdot \frac{x^2 - 16}{x^2}.$$

Знайдемо точки, де функція може набувати найбільшого або найменшого значення з рівняння :

$$f'(x) = 0; \quad 450 \cdot \frac{x^2 - 16}{x^2} = 0; \quad x = 4 \text{ або } x = -4.$$

$x = -4$ не задовольняє умову задачі.

При $x \in (0;4)$ $f'(x) < 0$, а при $x \in (4;+\infty)$ $f'(x) > 0$. Отже, у цій точці $x = 4$ функція

$f(x)$ набуває мінімуму. Оскільки рівняння не має інших коренів, то цей мінімум збігається з найменшим значенням функції на проміжку $(0;+\infty)$.

Знайдемо його $f(4)=450\cdot4+\frac{7200}{4}=1800+1800=3600\ (грн.)$

Отже, маємо, що довжина прямокутної ділянки паркану буде $4\,(м)$, а ширина – $\frac{90}{4}=22,5\,(м)$, таким чином, вартість паркану буде найменшою і становитиме $3600\ грн$.

Відповідь: довжина прямокутної ділянки паркану – $4\ м$; ширина – $22,5\ м$, вартість паркану – $3600\ грн$.

**Задача 2.** Знайдіть, за яких умов витрати жерсті на виготовлення консервних банок циліндричної форми заданого об'єму будуть найменшими.

**Розв'язання.** Складемо математичну модель до задачі. Суттєвим є те, що банка повинна мати заданий об'єм, форма банки має бути циліндричною, витрати жерсті повинні бути мінімальними.

Позначимо місткість банки через $V\ см^3$ і сформулюємо математичну задачу: «Знайдіть такі розміри циліндра з об'ємом $V\ см^3$, щоб площа його поверхні була найменшою».

Позначимо діаметр основи циліндра через $x\ см$, при чому $x\in(0;\infty)$, а його висоту через $h\ см$. Тоді об'єм циліндра: $V=\frac{1}{4}\pi x^2h$. Звідси $h=\frac{4V}{\pi x^2}$.

Повна поверхня циліндра:

$$S_p=2\cdot\frac{1}{4}\pi x^2+\pi xh=\frac{1}{2}\pi x^2+\pi x\cdot\frac{4V}{\pi x^2}=\frac{1}{2}\pi x^2+\frac{4V}{x}=\frac{\pi x^3+8V}{2x}.$$

Отже, формула повної поверхні циліндра матиме вигляд: $S_p=\frac{\pi x^3+8V}{2x},\ x>0.$

Знаходимо похідну:

$$S'_p=\left(\frac{\pi x^3+8V}{2x}\right)'=\frac{3\pi x^2\cdot2x-\left(\pi x^3+8V\right)\cdot2}{4x^2}=\frac{\pi x^3-4V}{x^2}.$$

Знаходимо точки, де функція може набувати найбільшого або найменшого значення, тобто похідну прирівнюємо до нуля: $\frac{\pi x^3-4V}{x^2}=0.$

Звідси $x=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$. При $x\in\left(0;\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}\right)S'_p<0$, а при $x\in\left(\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}};+\infty\right)S'_p>0.$ Отже, у точці $x=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$ функція $S(x)$ має мінімум. Оскільки рівняння не має інших коренів, то цей мінімум збігається з найменшим значенням функції на проміжку $(0;\infty)$.

Знайдемо $h$: $h=\frac{4V}{\pi x^2};\quad h=\frac{4V}{\pi\sqrt[3]{\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2}}=\sqrt[3]{\frac{64V^3}{16\pi V^2}}=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$

Отже, $h=x=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$

Отже, площа повної поверхні циліндра, позначимо її $S_n$, з об'ємом $V$ буде найменшою, якщо циліндр матиме діаметр основи і висоту однаковими.

Таким чином, найменші витрати жерсті на виготовлення консервної банки циліндричної форми будуть за умови, якщо діаметр основи дорівнюватиме висоті банки.

$$S_p = \frac{\pi \cdot \frac{4V}{\pi} + 8V}{2\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}} = \frac{6V}{\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}} = \sqrt[3]{\frac{216V^3}{\frac{4V}{\pi}}} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

**Задача 3.** Із круглої колоди, діаметр перерізу якої дорівнює $d$, потрібно вирізати балку найбільшої міцності. Міцність балки пропорційна виразу $xy^2$, де $x$ – довжина основи прямокутника, який є перерізом балки, а $y$ – його висота.

**Розв'язання.** Ми з'ясували, що на міцність балки впливають діаметр колоди, форма і розміри перерізу, вид деревини, з якої виготовлено балку.

Розв'яжемо задачу, не враховуючи вид деревини, що призведе до деякої похибки обчислень.

Використовуючи смислову операцію абстрагування, позначимо міцність балки через $M$, а коефіцієнт пропорційності через $k\ (k > 0)$. За умовою задачі $M = kxy^2$.

Сформулюємо математичну задачу. При яких значеннях змінних $x$ і $y$ функція $M$ набуде найбільшого значення?

З трикутника *ADC* (рис. 2), використовуючи наслідок з теореми Піфагора, маємо:

$y^2 = d^2 - x^2$

тоді $M(x) = kx\left(d^2 - x^2\right), \quad M(x) = kd^2x - kx^3, \quad x \in (0; d).$

Знайдемо похідну по $x$ даної функції: $M'(x) = kd^2 - 3kx^2 = k\left(d^2 - 3x^2\right).$

Знаходимо точки, де функція може набувати найбільшого або найменшого значення, по-іншому – екстремум функції:

$$k\left(d^2 - 3x^2\right) = 0; \quad d^2 = 3x^2; \quad x^2 = \frac{d^2}{3}; \quad x = \pm\sqrt{\frac{d^2}{3}}; \quad x = \frac{d}{\sqrt{3}} \text{ або } x = -\frac{d}{\sqrt{3}}.$$

$x = -\frac{d}{\sqrt{3}}$ не задовольняє умову задачі, оскільки $x$ – це довжина.

При $x \in \left(0; \frac{d}{\sqrt{3}}\right)$, $M'(x) > 0.$ Отже, функція $M(x)$ зростає в кожній точці цього проміжку.

При $x \in \left(\frac{d}{\sqrt{3}}; d\right)$ $M'(x) < 0,$ а отже на цьому проміжку, функція спадає.

Таким чином, у точці $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ функція має максимум, який у нашому випадку збігається з її найбільшим значенням.

Знаходимо $y$: $y^2 = d^2 - \frac{d^2}{3} = \frac{2d^2}{3}; \quad y = \sqrt{\frac{2}{3}}d.$

Отже, функція $M$ набуває найбільшого значення при $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ і $y = \sqrt{\frac{2}{3}}d.$ Міцність балки при цих розмірах буде найбільшою і становитиме:

$$M = k\frac{2}{3}d^2 \cdot \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{2kd^3}{3\sqrt{3}}.$$

Дамо практичні рекомендації, як з круглої колоди вирізати балку найбільшої міцності.

Розглянемо трикутник $ADC\ (\angle D = 90°).$ У ньому $AD^2 = AC \cdot AP,\ DC^2 = AC \cdot PC.$

Маємо: $x^2 = d \cdot AP; \quad \frac{d^2}{3} = d \cdot AP; \quad AP = \frac{1}{3}d; \ y^2 = d \cdot PC; \quad \frac{2d^2}{3} = d \cdot PC; \ PC = \frac{2}{3}d.$

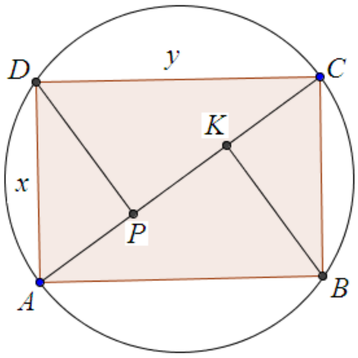


Рис 2.

Використовуючи смислову операцію інтерпретації, формулюємо правило для розмітки найміцнішого перерізу циліндричної балки. Довільний діаметр колоди ділимо на три рівні частини і в точках поділу $P$ і $K$ проводимо до нього перпендикуляри. Тоді знаходимо вершини $D$ і $B$ перерізу. Інші його вершини є кінцями діаметра колоди.

**Задача 4 .** Літак протягом *20 с* збільшував свою швидкість від *240* до *720 км/год*. Вважаючи рух рівноприскореним, знайти шлях, пройдений літаком за цей час.

**Розв'язання.** Із умови задачі випливає, що $v_0 = \frac{240 \cdot 1000}{60 \cdot 60} = \frac{200}{3}(м/с);$ $v_1 = \frac{720 \cdot 1000}{60 \cdot 60} = 200(м/с).$

З курсу фізики відомо, що швидкість рівноприскореного руху, в залежності від прискорення *a* і часу *t*, описується формулою $v(t) = at + v_0$. Звідси $a = \frac{v(t) - v_0}{t}$. Відповідно до задачі $a = 6,7\left(м/с\right)$. Оскільки рух прямолінійний, то для знаходження шляху, пройденого літаком, використаємо рівність $\frac{ds}{dt} = v(t)$, звідки $\frac{ds}{dt} = v_0 + at;$ $ds = (v_0 + at) \cdot dt;$

$$s(t) = \int_{t_1}^{t_2} (v_0 + at) \cdot dt = \left( v_0 t + \frac{at^2}{2} \right) \Bigg|_{t_1}^{t_2} \approx 2,7 \cdot 10^3 = 2,7(км)$$

Відповідь: *2,7 км.*

**Задача 5.** Радіозавод випускає *31000* радіоприймачів на рік, і кожного наступного року за рахунок модернізації підриємства випуск радіоприймачів збільшується на *500* шт. Визначити суму амортизаційних відрахувань за *10* років при нормі амортизації, яка дорівнює *1%* від собівартості випущеної продукції. Собівартість одного радіоприймача *50* грн.

**Розв'язання.** Із умови задачі випливає, що випуск радіоприймачів описується функцією $y = 31000 + 500x$, де *x* – час у роках. Тоді об'єм випуску $V$ цієї продукції за 10 років буде:

$$V = \int_0^{10} \left(31000 + 500x\right) dx$$

Амортизаційні відрахування $(A)$ підрахуємо наступним чином:

$$A = \int_0^{10} \frac{1\% \cdot 50}{100\%} (31000 + 500x) dx = 0,5 \left( 31000x + 500\frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_0^{10} = 167500 \; грн.$$

Відповідь: *167 500 грн.*

Розглянемо приклад економічної задачі про неперервне нарахування відсотків.

Початковий вклад у банк складає $Q_0$ грошових одиниць. Банк виплачує щорічно $p\%$ річних. Необхідно знайти розмір вкладу $Q_t$ через $t$ років.

З використанням простих відсотків розмір вкладу щорічно буде збільшуватись на одну й ту саму величину $\frac{p}{100} Q_0$.

$$Q_1 = Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right),\ Q_2 = Q_0\left(1+\frac{2p}{100}\right), \dots,\ Q_t = Q_0\left(1+\frac{pt}{100}\right).$$

На практиці значно частіше застосовуються складні відсотки. В такому випадку розмір вкладу щорічно буде збільшуватись на одне й те саме число $\left(1+\frac{p}{100}Q_0\right)$ разів.

$$Q_1 = Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right),\ Q_2 = Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2, \dots,\ Q_t = Q_0\left(1+\frac{t}{100}\right)^t.$$

Якщо нараховувати відсотки по вкладу не один раз на рік, а *n* раз, то за того ж таки щорічного приросту $p\%$, відсоток нарахування за $\frac{1}{n}$ частину року складе $\frac{p}{n}\%$, а розмір вкладу за $t$ років при $nt$ нарахуваннях складе $Q_t = Q_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}$

Будемо вважати, що відсотки по вкладу нараховуються кожного півріччя $(n=2)$, щоквартально $(n=4)$, щомісячно $(n=12)$, кожного дня $(n=365)$, кожну годину $(n=8760)$ і т.д., неперервно $n \to \infty$. Тоді розмір вкладу за $t$ років складе

$$Q_t = \lim_{n\to\infty}\left[Q_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}\right] = Q_0\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}}\right]^{\frac{pt}{100}},$$

або з урахуванням другої чудової границі $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\right)$ при $x = \frac{100n}{p} \to \infty$,

$$Q_t = Q_0 e^{\frac{pt}{100}}.$$

Отримана формула виражає показниковий (експоненціальний) закон приросту вкладів (при $p>0$) або спаду (при $p<0$). Вона може бути використана при неперервному нарахуванні відсотків.

**Задача 6.** Початковий вклад, який поклали в банк під $5\%$ річних, дорівнював *1* тис. грн. Визначити розмір вкладу через *20* років, при нарахуванні відсотків неперервно.

**Розв'язання.** Грошовий вклад при неперервному нарахуванні відсотків можна обрахувати за формулою:

$$Q_t = \lim_{n\to\infty}\left[Q_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}\right] = Q_0\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}}\right]^{\frac{pt}{100}}.$$

Підставимо дані умови задачі: *$Q_0$=1; p=5; t=20.*

$$Q_{20} = \lim_{n\to\infty}\left[1\cdot\left(1+\frac{5}{100n}\right)^{20n}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{100n}\right)^{\frac{100n}{5}}\right]^{\frac{5\cdot 20}{100}} = e^{\frac{5\cdot 20}{100}} \approx 2{,}718\,(\textit{тис. грн.})$$

Відповідь: $2{,}718\ \textit{тис. грн.}$

Отже, важливе місце серед задач з курсу математичного аналізу займають екстремальні задачі з фізичним, геометричним та економічним змістом. Розв'язування цих задач має велику цінність у шкільному курсі математики. Головним засобом розвитку мислення учнів є розв'язання нестандартних задач та активний пошук способу їх розв'язання. Слід звернути увагу на те, що це дає їм можливість засвоїти нові математичні факти, оволодіти новими методами та прийомами, смисловими операціями, які вони можуть застосовувати під час розв'язування інших практичних задач.

**Література**

1. Апанасов П.Т. Сборник математических задач с практическим содержанием / П.Т. Апанасов, Н.П. Апанасов. – М. : Просвещение, 1987. – 58 с.
2. Красс М.С. Математика для экономистов / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М. : Питер, 2005. – 466 с.