5. АВТОРСЬКІ ПРОГРАМИ ТА ПРОЕКТИ

Тетяна Павлівна Прохорчук,
учитель математики вищої категорії,
«Старший учитель» Смілянського
навчально-виховного комплексу
«Загальноосвітня школа І ступеня – гімназія
ім. В. Т. Сенатора» Смілянської міської ради
Черкаської області,
м.Сміла, Україна

ПОКАЗНИКОВА І ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ (УРОК З АЛГЕБРИ, 11 КЛАС)

Мета: ввести поняття показникової функції, що описує природні процеси, розглянути її властивості та графік. Ввести поняття логарифмічної функції як оберненої до показникової, розглянути властивості та графік. Формувати в учнів цілісну картину світу шляхом використання міжпредметних зв'язків. Формувати в учнів інформаційні компетенції: критично осмислювати та використовувати інформацію з різних галузей наук (фізики, біології, екології). Навчати учнів елементам самоосвіти._

Вид навчального заняття: інтегрований.

Методи: сюжетно-рольова гра, проблемний метод (науково-пошукові завдання роздано групам).

Тип навчального заняття: вивчення нового матеріалу.

Обладнання: мультимедійна система, методичне забезпечення.

Запис на дошці: Анрі Беккерель відкрив радіоактивність у 1896 р., Луї Пастер у 1878 р. – теорію мікробів.

Природа формулює свої закони
мовою математики.
Галілей

Хід уроку

І. Організаційний момент.

ІІ. Мотивація навчання.

Учитель: Ми з вами знаємо, що багато процесів у природі, техніці, мистецтві можна описати математичною мовою. За допомогою яких способів ми це робимо? *(за допомогою рівнянь, нерівностей, графіків, словесного опису, заданням функції)*

Учень: У природі і техніці часто зустрічаються процеси, що мають спільну назву процесів *органічної зміни величини*. Їх суть полягає в тому, що за рівні проміжки часу значення величин змінюється в одному й тому ж відношенні.

Учитель: Глибше зрозуміти ці процеси та математично їх обґрунтувати нам допоможуть фізик та біолог. Давайте перенесемось з Париж кінця XIX ст. до лабораторії видатного фізика Анрі Беккереля і подивимося над чим він працює.

Анрі Беккерель: Ось у мене уранова сіль. Я хочу перевірити, чи буде вона флюоресцирувати. Обгорнувши фотографічну пластинку чорним папером, я поставлю її перед пробіркою з ураном і зроблю так, щоб сонячні промені потрапили на уранову сіль, що повинно спричинити процес флюоресценції. О! Фотопластинка засвітилася!

А зараз я візьму ключ, прикладу його до фотопластинки, обгорну їх папером і захововаю в ящик. Дістаю, і що ж бачу – силует ключа на пластинці. Що цього разу засвітило пластинку? Це якісь нові промені.., і йдуть вони від солей урану. Оскільки уран випромінює цікаві промені, а термін «промінь» латинською мовою означає радіус, то цю речовину назвемо «радіоактивною».

Але що ж це? Солі стало менше. І ось ще цікаво: за рівні проміжки часу цей радіоактивний елемент вдвічі зменшує власну масу.

Та в нас часу немає, потрібно бігти в Сорбонну на лекцію до студентів.

Бонжур, месьє, мадемуазель.

Стикнувшись з проблемою радіоактивного розпаду та побачивши, що маса урану зменшується вдвічі за рівні проміжки часу, я задумався, як описати цей процес лаконічно та красиво?!

Студент: Месьє професор, мені здається, що опис будь-якого процесу найкраще зробити за допомогою функції.

Анрі Беккерель: Так, початкове значення функції є m_0, а якщо маса за рівні проміжки часу зменшується вдвічі, то помножимо m_0 на ½**.**

Студент: не просто на ½ – цього замало, адже час постійно плине, тому необхідно помножити ще на ½ тощо.

Анрі Беккерель: Точно, то ми задамо цю залежність формулою $m = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^t$, де t – це час. Як же назвати цю функцію?

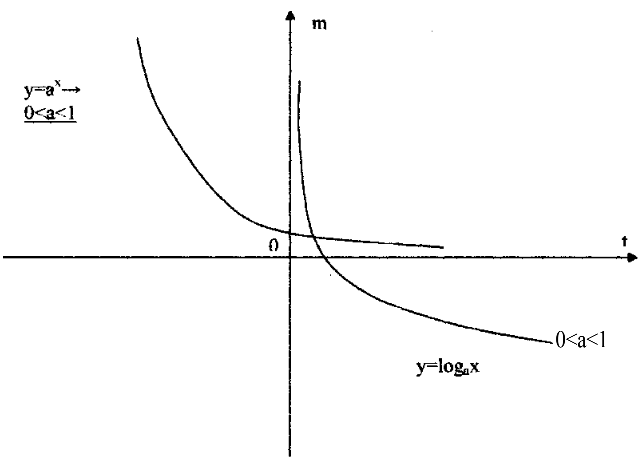
Студент: Месьє професор, оскільки змінна перебуває у показнику степеня, то назвемо цю функцію показниковою.

Учитель: Запишіть тему сьогоднішнього заняття: «Показникова та логарифмічна функції».

Пропоную побудувати графік функції.

Нехай m_0 = 1г, $m = \left(\frac{1}{2}\right)^t$.

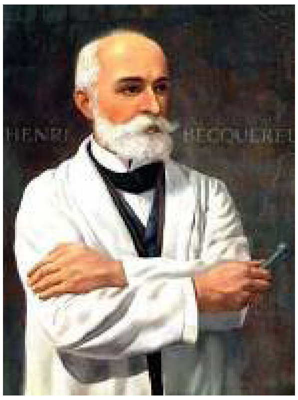
t	-3	-2	-1	0	1	2	3
m	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8



Властивості:

1. Д (y)=R
2. Е (y)= R_+
3. Якщо 0<$^1/_2$<1, то F↘ на R.

Отже, цей графік описує процес радіоактивного розпаду речовини.



У той самий час в іншому кінці Парижа, але вже в лабораторії мікробіолога Луї Пастера досліджують розмноження мікробів. Звідки ж беруться мікроорганізми? − поставив собі таке питання Луї Пастер.

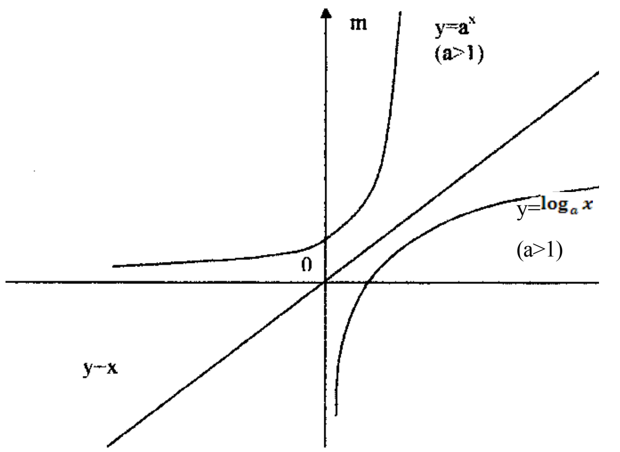
Луї Пастер: Ось тут у мене в поживному бульйоні є бактерії. Була одна, а зараз багато, оскільки вони постійно розмножуються і розмножуються... Скоро вже посудини невистачить. А загалом: скільки їх вже тут? На початку досліду було m_0 =1г бактерій. А якщо за кожну годину їхня маса збільшується вдвічі, то скільки ж зараз?

Студент: необхідно знову задати функцію, лише вже з основою 2. Месьє Луї Пастер, пропоную вам зростання бактерій описати функцією:

$$m = \left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

Луї Пастер: Будь-яку функцію можна описати графічно, отже побудуємо графік такої функції. Хто мені допоможе? Нехай $m_0 = 1\tilde{a}$, тоді $m = 2^t$.

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
m	1/8	1/4	1/8	1	2	3	4



Властивості:

1. Д (y) = R
2. Е (y) = R_+.
3. Якщо a > 1, то y ↗ на R.

Учитель: А зараз залишаємо науковців з їх відкриттями і повернемося до сучасності.

Пропоную позначити аргумент через x, тоді функцію задамо формулою y=a^x, де a>0, $a \neq 1$.

Запишемо властивості цих функцій (разом з учнями).

Д(y)=R. Е(y)=R_+. Якщо a>1, то y ↗, якщо 0<a<1, то y↘ на R.

При $x \in R$, $y \in R$ мають місце рівності:

$$a^x a^y = a^{x+y},\ (ab)^x = a^x b^x,\ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x},\ \left(a^x\right)^y = a^{xy}.$$

Вчитель: До нас завітали фахівець з екології та представник Всесвітньої організації Green peace.

Еколог: У сучасному світі проблеми екології – глобальні. Бачив ви щойно розглядали радіоактивний розпад, але зараз термін «мирний» атом втратив свій зміст. Під час найбільшої в історії цивілізації аварії на Чорнобильській АЕС лише в навколишнє середовище було викинуто 8 т радіоактивної речовини. Підрахуйте будь ласка через який час після вибуху відбулося забруднення довкілля.

Учитель: Ми маємо формулу радіоактивного розпаду $m = \left(\frac{1}{2}\right)^t$, де $m_0 = 8$ т = $8 \bullet 10^6$ г.

Припустимо, що залишилося 1 г речовини, а все інше перетворилося на важкі метали і рентгенівські промені.

Отже, m=1г, тоді $1 = 8 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$

Зведемо число 10 до степеня з основою 2: $10 \approx 8\sqrt{2} \approx 2^{3,5}$.

Тоді $\left(\frac{1}{2}\right)^t = \frac{1}{8 \cdot 10^6}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^t = \frac{1}{8 \cdot \left(2^{3,5}\right)^6}$;

$\left(\frac{1}{2}\right)^t \approx \frac{1}{2^{24}}$. А оскільки $\left(\frac{1}{2}\right)^t \approx \left(\frac{1}{2}\right)^{24}$, то $t \approx 24$ с.

Еколог: Отже, вже через 24 сек після вибуху було забруднено довкілля. За результатами досліджень забруднено 3,5 млн га сільськогосподарських угідь, 2,5 млн га орних земель, 1,5 млн га лісів та садів. Отже, логічним є твердження: ***Давайте будемо берегти природу, а вона збереже нас!***

Учитель: Прошу звернути увагу на те, що під час обчислення цього прикладу ми мали труднощі при знаходженні часу *t*. Ви побачили, що не завжди можна звести ліву та праву частини виразу до однієї основи.

Як же знайти вихід із цієї положення? Як за значенням функції знайти значення показника?

Учень: Через обернену функцію.

Учитель: Давайте згадаємо, яку функцію називають оберненою? Пригадаємо теорему про обернену функцію та визначимо як розміщено графіки прямої функції та оберненої до неї. Для функції $y = a^x$ існує обернена $x = a^y$.

Запис в зошиті: зміст значущості в оберненій функції – це показник степеня, до якого потрібно піднести число *a*, щоб дістати *x*.

Такий показник степеня називається *логарифмом* числа *x* за основою *a*. Функцію, обернену до показникової називають *логарифмічною* та позначають $y = \log_a x$, де $a \neq 1$, a>0, x>0.

Оскільки рівності $y = \log_a x$ і $x = a^y$ за означенням логарифма визначають один і той самий зв'язок між змінними *x* та *y*, то показникова і логарифмічна функції є взаємно оберненими.

Давайте вставимо зв'язок між графіками цих функцій за тією ж основою *a* (графіки симетричні). Де ви зустрічаєтесь зі симетрією? Скористаємось цим для побудови графіка функції $y = \log_a x$.

(Учні будують графіки самостійно у супроводі музики, потім за допомогою медіа системи перевіряється побудова).

IV. Закріплення вивченого матеріалу.

1. Що можна сказати про числа *m* і *n*, якщо $5^m < 5^n$? (оскільки основа 5>1, то y↗, отже, m<n)?

Що можна сказати про числа *p* і *q*, якщо $(0,3)^p < (0,3)^q$? (оскільки основа 0<0,3<1, то зі зростанням аргументу показникова функція 0,3x спадає, тому p>q).

2. Які з функцій є зростаючими, які спадними:

$y = \left(\sqrt{10}\right)^x, y = \left(\frac{5}{7}\right)^x, y = \left(\frac{7}{5}\right)^x, y = 0{,}018^x$

3. За властивостями логарифмічних функцій визначити, що більше:

а) $\log_2 3$ чи $\log_2 5, a > 1$

б) $\log_{\frac{1}{2}} 5$ чи $\log_{\frac{1}{2}} 3, a < 1$

№ 45 (підручник)

1) $y = \log_a(2 + x)$;
$2 + x > 0$
$x > -2$
$x \in (-2; \infty)$

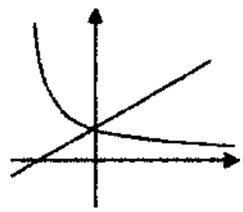
2) $y = \log_3(x^2 + 3)$
$x^2 + 3 > 0$
$x \in R$

3) $y = \log_5(4 - x^2)$
$4 - x^2 > 0$
$x^2 < 4$
$x \in (-2; 2)$

4) $y = \log_4(x^2 + x + 1)$
$x^2 + x + 1 > 0$
$x^2 + x + 1 > 0$ Д $= 1 - 4 < 0$
$x \in R$

4. Розв'язати графічно рівняння:

$\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$



V. Підсумок навчального заняття.

VI. Домашнє завдання.

Творчі та дослідницькі завдання з вивченої теми.