

УДК 539.3

## ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ СКІНЧЕННОГО ЦИЛІНДРА ПІД ДІЄЮ ЗУСИЛЬ СТИСКУ

В. П. РЕВЕНКО

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Визначено напруження і переміщення в скінченному циліндрі під дією пружного кільця, яке змодельовано рівномірно розподіленими нормальними зусиллями. Для розрахунку напружено-деформованого стану використано аналітико-числовий метод найменших квадратів. Показано, що метод дає високу точність розв'язку. Проаналізовано зміну напружень і переміщень залежно від радіуса і довжини циліндра, а також ширини кільця. Знайдено два якісно різних розподіли напружень і переміщень.

**Ключові слова:** аналітико-числовий метод найменших квадратів, вектор переміщень, власні функції, пружне кільце, напружений стан, циліндр.

Напружений стан пружного циліндра під дією локально розподілених зусиль стиску, які моделюють посаджене з натягом на нього коротше кільце, розглядали раніше [1] в припущенні, що циліндр є безмежний, а навантаження кусково-неперервне. В праці [2] цю задачу вивчали наближеним методом за малих відношень радіуса до довжини циліндра. Наведено [3, 4] огляд результатів. Нижче цю задачу розв'язано для неперервних і кусково-неперервних навантажень скінченного циліндра, а також вивчено закономірності розподілу напружень і переміщень бічної поверхні циліндра для різних співвідношень довжини циліндра, його радіуса і області навантаження.

**Поставка задачі.** Знайдемо напружено-деформований стан (НДС) скінченного ізотропного циліндра  $D = \{(r, \varphi, z) \in ([0, R] \times [0, 2\pi] \times [-h, h])\}$  у циліндричній системі координат. На циліндр посаджено з натягом пружне кільце, довжина і внутрішній радіус якого менші, ніж  $2h$  і  $R$  [3]. Раніше [1, 2] дію пружного кільця моделювали рівномірно розподіленими стискальними нормальними зусиллями, які мають розрив неперервності. Використовуючи розривні зовнішні навантаження [4], не вдається знайти точні значення компонентів тензора напружень у точках їх розриву, а також істотно погіршується збіжність розв'язку. Тому дію пружного кільця апроксимуватимемо такими неперервними осесиметричними нормальними навантаженнями, які несуттєво відрізняються від прямокутного розподілу [1, 2]:

$$\sigma_r(R, \varphi, \gamma) = \sigma_g(\gamma), \quad \tau_{rz}(R, \varphi, \gamma) = 0, \quad (1)$$

де  $\gamma = z/h$ ;  $\sigma_g(\gamma) = \sigma_M$ ,  $\gamma \in [-\gamma_0, \gamma_0]$ ;  $\sigma_g(\gamma) = \chi(\gamma_1 - \gamma)$ ,  $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$ ;  $\sigma_g(\gamma) = \chi(\gamma_1 + \gamma)$ ,  $\gamma \in [-\gamma_1, -\gamma_0]$ ;  $\sigma_g(\gamma) = 0$ , коли  $\gamma \notin [-\gamma_1, \gamma_1]$ ;  $\sigma_M = A\sigma$ ;  $\chi = A\sigma/(\gamma_1 - \gamma_0)$ ;  $1 > \gamma_1 \geq \gamma_0 > 0$ ;  $\sigma$  – радіальне напруження основного НДС циліндра;  $A$  – безрозмірний коефіцієнт. Якщо покласти  $\gamma_1 = \gamma_0$ ,  $\chi = 0$ , то одержимо прямокутний розподіл навантажень. На торцях циліндра відсутні зов-

нішні навантаження:

$$\sigma_z(r, \pm h) = 0, \quad \tau_{rz}(r, \pm h) = 0. \quad (2)$$

Використовуючи аналітико-числовий метод найменших квадратів [5, 6], розрахуємо НДС пружного циліндра за кусково-неперервних і неперервних розподілів навантажень. Крайові умови (2) будуть тотожно задоволені [5], якщо компоненти тензора напружень визначатимуть такі функції переміщень:

$$\Phi = h \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{b_j I_0(\beta_j r) \sin(z_j \gamma)\} + \Phi_0, \quad \Psi = h^2 \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{\delta(z_j) b_j I_0(\beta_j r) \cos(z_j \gamma)\} + \Psi_0, \quad (3)$$

де  $b_j$  – невідомі комплексні коефіцієнти; функції  $\Phi_0 = -2a_0 z$ ,  $\Psi_0 = a_0(1-\nu) \times (r^2 - 2z^2)$  описують основний НДС,  $a_0 = \sigma/(2E)$ ;  $z_j$  – відомі власні значення;  $\beta_j = z_j/h$ ;  $\delta(z_j) = -[2(1-\nu)/z_j + tg(z_j)]$ ;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона. Підставимо функції (3) у вираз переміщень [5]:

$$u_r = h \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{b_k z_k [\delta(z_k) \cos(z_k \gamma) + \gamma \sin(z_k \gamma)] I_1(\beta_k r)\} + \frac{1-\nu}{E} \sigma r, \quad u_\varphi = 0,$$

$$u_z = h \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{b_k [z_k \gamma \cos(z_k \gamma) - [3 - 4\nu + z_k \delta(z_k)] \sin(z_k \gamma)] I_0(\beta_k r)\} + \nu \sigma r / E. \quad (4)$$

Співвідношення (4) описують осесиметричний вектор переміщень у скінченному циліндрі за вільних від навантажень торців.

**Задоволення крайових умов.** Підставимо у загальне подання тензора напружень [5] функції переміщень (3) та зведемо крайові умови (1) до такого безрозмірного вигляду:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k A_k^m(\gamma) = P_m(\gamma), \quad m = \overline{1, 2}, \quad \gamma \in [-1, 1], \quad (5)$$

де  $P_1(\gamma) = (\sigma_g(\gamma) - \sigma)/G$ ,  $P_2(\gamma) = 0$ ;  $b_k = c_{2k-1} + ic_{2k}$ ;  $A_{2k-1}^m = \operatorname{Re} V_k^m$ ,  $A_{2k}^m = -\operatorname{Im} V_k^m$ ;  $V_k^2 = 2h\{z_k \gamma \cos(z_k \gamma) - [(1-2\nu) + z_k \delta(z_k)] \sin(z_k \gamma)\} I_0'(z_k \delta_1)$ ,  $V_k^1 = 2\{[h^2 \delta(z_k) I_0''(z_k \delta_1) - 2\nu z_k I_0(z_k \delta_1)] \cos(z_k \gamma) + \gamma h^2 I_0''(z_k \delta_1) \sin(z_k \gamma)\}$ ;  $I_0'(z_k \delta_1) = z_k I_1(z_k \delta_1)/h$ ,  $I_0''(z_k \delta_1) = z_k^2 [I_2(z_k \delta_1) + I_0(z_k \delta_1)]/(2h^2)$ ;  $\delta_1 = R/h$ .

Отже, задача зведена до розв'язування функціональних рівнянь (5). Обмежимося у співвідношеннях (3) першими  $N$  членами ряду і позначимо такі функції переміщень  $\Phi_N(r, \gamma)$ ,  $\Psi_N(r, \gamma)$ . Функції  $\Phi_N$ ,  $\Psi_N$  точно задовольняють усі співвідношення тривимірної теорії пружності та крайові умови (2). Для знаходження невідомих дійсних коефіцієнтів  $c_k$  запропоновано [5] мінімізувати відхилення шуканого наближеного розв'язку від точного, яка дорівнюватиме сумі інтегралів квадратів нев'язки в крайових умовах (5). Відхилення наближеного розв'язку від точного визначатиме мінімум функціонала

$$\Omega_N \{c_1, \dots, c_{2N}\} \equiv \sum_{m=1}^2 \left\| f_N^m(\gamma) - P_m(\gamma) \right\|^2 \equiv \int_{-1}^1 \left\{ \sum_{m=1}^2 \left\{ \sum_{k=1}^{2N} c_k A_k^m(\gamma) - P_m(\gamma) \right\}^2 \right\} d\gamma \equiv$$

$$\equiv \sum_{k,j=1}^{2N} c_k c_j W_{kj} - 2 \sum_{k=1}^{2N} c_k V_k + P^2, \quad (6)$$

$$\text{де } W_{kj} = \int_{-1}^1 \left\{ \sum_{m=1}^2 A_k^m(\gamma) A_j^m(\gamma) \right\} d\gamma, \quad W_{kj} = W_{jk}, \quad V_k = \int_{-1}^1 \left\{ \sum_{m=1}^2 A_k^m(\gamma) P_m(\gamma) \right\} d\gamma,$$

$$k, j = \overline{1, 2N}; \quad P^2 = \int_{-1}^1 \{P_1(\gamma)^2 + P_2(\gamma)^2\} d\gamma; \quad \|f(\gamma)\| - \text{норма в просторі } L_2[-1,1].$$

Зазначимо, що коефіцієнти  $W_{kj}$  знайдені точно і виражені через тригонометричні функції та функції Бесселя.

**Числовий аналіз.** Під час числових розрахунків використаємо запропоновану [5] методику. Мінімум функціонала (6) для заданого значення  $N$  позначимо  $F(N)$ . Коефіцієнти, які дають мінімальне значення, позначимо  $c_k^N$ . Підставимо їх у формули (3) і знайдемо найточніший для заданого  $N$  наближений розв'язок  $\Phi_N, \Psi_N$ . У подальшому напруження і переміщення (4) діленням відповідно на  $\sigma$  і  $h$  зведемо до безрозмірного вигляду. Наведено (рис. 1) симетричний за координатою  $\gamma$  розподіл нормальних напружень і переміщень на боковій поверхні циліндра для такого навантаження:  $\sigma_M = 15\sigma$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $\gamma_0 = 0,25$ ;  $\gamma_1 = 0,254$ . Для аналізу впливу на НДС циліндра відношення  $R/h$  розглядали відносно довгий  $R/h = 0,1$  (рис. 1а) та відносно короткий  $R/h = 2$  (рис. 1б) циліндри. В околі точок закінчення дії пружного кільця на боковій поверхні циліндра маємо значний стрибок всіх нормальних напружень. У відносно довгому циліндрі за аналогічного стискального навантаження є явно виражений пік розтягальних напружень  $\sigma_z$  біля точки  $\gamma_0$ , максимальне значення яких може досягати до 50% від  $\sigma_M$ . Максимум дотичних напружень  $\tau_{rx}$  у циліндрі не перевищує 40% від  $\sigma_M$ .

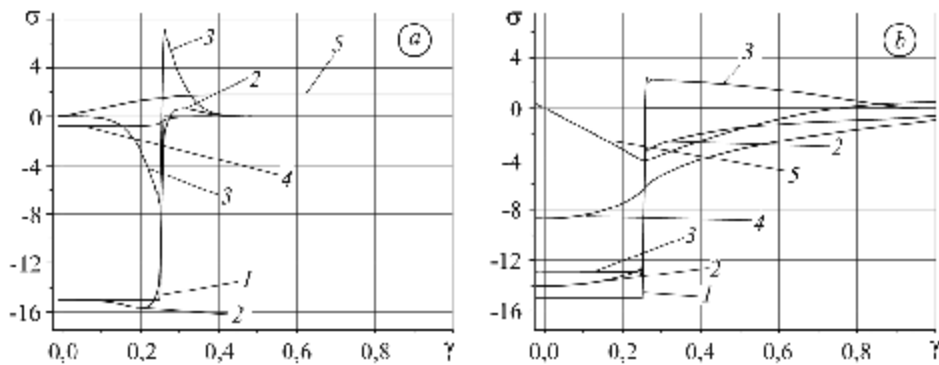


Рис. 1. Розподіл безрозмірних напружень і переміщень на поверхні циліндра:  
 $a - R/h = 0,1$ ;  $b - R/h = 2$ ; 1 -  $\sigma_r(1, \gamma)$ ; 2 -  $\sigma_\phi(1, \gamma)$ ; 3 -  $\sigma_z(1, \gamma)$ ; 4 -  $u_r(1, \gamma)$ ; 5 -  $ku_z(1, \gamma)$ ,  
 для  $a - k = 1$ ;  $b - k = 5$ .

Fig. 1. Distribution of dimensionless stresses and displacements on the cylinder surface:  
 $a - R/h = 0,1$ ;  $b - R/h = 2$ ; 1 -  $\sigma_r(1, \gamma)$ ; 2 -  $\sigma_\phi(1, \gamma)$ ; 3 -  $\sigma_z(1, \gamma)$ ; 4 -  $u_r(1, \gamma)$ ; 5 -  $ku_z(1, \gamma)$ ,  
 for  $a - k = 1$ ;  $b - k = 5$ .

Отже, маємо два різні розподіли напружень і переміщень. Зокрема, якщо  $h > 10R$ ,  $\gamma_0 > 2R$  такий розподіл якісно подібний до зображеного на рис. 1а; а якщо  $R > 2h$ ,  $0,2R > \gamma_0$  - до розподілу на рис. 1б. Рис. 1а ілюструє випадок, коли в циліндрі в зоні дії пружного кільця напруження  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\phi$  стали і приблизно рівні. Аналіз переміщень у циліндрі в зоні контакту з пружним кіль-

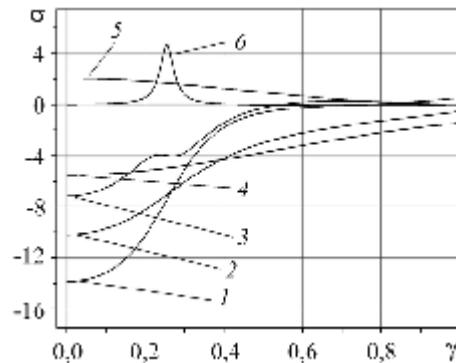
цем, показує, що кільце стискатиметься вздовж осі  $O_z$ . У випадку, подібному до зображеного на рис. 1b, переміщення  $u_r$  у зоні контакту циліндра і кільця змінюються за складним законом, а переміщення  $u_z$  різняться і є від'ємні (рис. 1a).

Умова  $F(N) \rightarrow 0$  виконується, якщо  $N \rightarrow \infty$ , а похибка задоволення крайових умов (5) лінійно залежить від  $F(N)$  і збігається до нуля. Наведемо знайдені значення мінімуму  $F(N)$ :  $F(100) = 4 \cdot 10^{-3}$ ,  $F(200) = 7 \cdot 10^{-4}$ ,  $F(400) = 3 \cdot 10^{-5}$ . Якщо  $N = 200$ , похибка задоволення в крайових умовах (5) дотичних напружень менша ніж  $3 \cdot 10^{-4}$ , а нормальних – менша ніж  $10^{-3}$ , за винятком околів точок, в яких зовнішнє навантаження має розрив першої похідної. Зі зменшенням коефіцієнта Пуассона, зменшуються напруження  $\sigma_\phi$ ,  $\sigma_z$  і збільшується переміщення  $u_r$ . Встановлено, що за  $R/h > 0,1$ ,  $\gamma_0/R > 2$  знайдені напруження практично збігаються з відповідними для нескінченного циліндра [1, 3]. За такого навантаження для безрозмірних переміщень виконуються залежності  $u_r(1,0) \approx 0,05\sigma_r$ ,  $u_z(1,\gamma_0) \approx 0,1\sigma_r$ .

Рис. 2 відображає зміну напружень, які відповідають напруженням на рис. 1b, з віддаленням від бокової поверхні циліндра по координаті  $\alpha$ . Напруження  $\sigma_z(\alpha,0)$  найшвидше змінюються зі зміною  $\alpha$  і вже при  $\alpha = 0,85$  міняють свій знак на додатний, швидкість зміни напружень  $\sigma_r(\alpha,\gamma)$  найменша. За стиску в середині циліндра максимальні значення напружень  $\sigma_z(\alpha,\gamma)$  будуть додатні і можуть досягати 25% від  $\sigma_M$ . В околі закінчення пружного кільця в матеріалі циліндра формується пік дотичних напружень  $\tau_{rz}(\alpha,\gamma_1)$  (крива б). З наближенням до торців циліндра напруження збігаються з такими ж для основного НДС.

Рис. 2. Розподіл безрозмірних напружень у циліндрі з віддаленням від поверхні:  
1 –  $\sigma_r(0,9, \gamma)$ ; 2 –  $\sigma_\phi(0,9, \gamma)$ ; 3 –  $\sigma_z(0,96, \gamma)$ ;  
4 –  $\sigma_r(0,5, \gamma)$ ; 5 –  $\sigma_z(0,5, \gamma)$ ; 6 –  $\tau_{rz}(0,99, \gamma)$ .

Fig. 2. Distribution of stresses when moving from the cylinder surface:  
1 –  $\sigma_r(0.9, \gamma)$ ; 2 –  $\sigma_\phi(0.9, \gamma)$ ; 3 –  $\sigma_z(0.96, \gamma)$ ;  
4 –  $\sigma_r(0.5, \gamma)$ ; 5 –  $\sigma_z(0.5, \gamma)$ ; 6 –  $\tau_{rz}(0.99, \gamma)$ .



## ВИСНОВКИ

Запропоновано аналітико-числовий метод, який дає змогу розраховувати НДС скінченного пружного циліндра як за кусково-неперервних, так і неперервних розподілів навантажень. Підтверджено високу точність методу. Знайдено два характерні розподіли напружень і переміщень залежно від геометричних параметрів циліндра і кільця. Зокрема, якщо  $h > 10R$ ,  $\gamma_0 > 2R$ , в середині циліндра розподіл напружень і переміщень рівномірний, а якщо  $R > 2h$ ,  $0,2R > \gamma_0$  – нерівномірний. Знайдено, що за другого розподілу в сере-

дині циліндра виникають значні максимальні додатні напруження  $\sigma_z$ , які можуть досягати 25% від  $\sigma_M$ , а відповідні переміщення  $u_r$  бокової поверхні набагато більші. Встановлено, що пружне кільце стискатиметься вздовж осі  $Oz$  в області контакту з циліндром. Якщо геометричні параметри циліндра і пружного кільця задовольняють умови  $h > 3R$ ,  $\gamma_0 > 2R$ , то виконується залежність  $\sigma_z(R,0) = \sigma_r(R,0)$ . У відносно довгому циліндрі ( $h > 3R$ ) в околі закінчення дії пружного кільця виникають значні максимальні додатні напруження  $\sigma_z \approx 0,5\sigma_M$ . Якщо  $R/h > 0,1$ ,  $\gamma_0/R > 2$ ,  $\nu = 0,3$ , то для безрозмірних переміщень і напружень знайдено залежності:  $u_r(1,0) \approx 0,05\sigma_r(1,0)$ ,  $u_z(1,\gamma_0) \approx 0,1\sigma_r(1,\gamma_0)$ .

*РЕЗЮМЕ.* Определены напряжения и перемещения в конечном цилиндре под действием упругого кольца. Действие кольца смоделировали равномерно распределенными нормальными напряжениями. Для расчета напряженно-деформированного состояния использован аналитико-численный метод наименьших квадратов. Показано, что он гарантирует высокую точность полученного решения. Проанализировано влияние радиуса и длины цилиндра, а также ширины кольца на распределение напряжений и перемещений. Найдено два качественно различных распределения напряжений и перемещений.

*SUMMARY.* The stresses and displacements in a finite cylinder under action of an elastic ring are determined. The action of the ring is modeled by a uniformly distributed pressure. For calculation of the stress-strain state the analytical-numerical method of least squares is used. It is shown, that the proposed approach guarantees a high precision of the solution. The influence of radius and length of the cylinder and also of the ring width on distribution of stresses and displacements is analyzed. Two qualitatively different distributions of stresses and displacements are found.

1. Barton M. V. The circular cylinder with a band of uniform pressure on a finite length of the surface // J. Appl. Mech. – 1941. – 8, А-97. – P. 97–104.
2. Conway H. D. and Farnham K. A. Contact stresses between cylindrical shafts and sleeves // Int. J. of Eng. Sci. – 1967. – 5, № 7. – P. 541–554.
3. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
4. Johnson K. L. Contact Mechanics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1985. – 452 p.
5. Revenko V. P. Solving the three-dimensional equations of the linear theory of elasticity // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, № 7. – P. 730–741. (Прикл. механіка. – 2009. – 45, № 7. – С. 52–65).
6. Ревенко В. П. Дослідження тривимірного напруженого стану в пружній пластині з круговим отвором // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – 45, № 5. – С. 71–76.

Одержано 22.01.2010