

УДК 539.3

## ГОЛОВНІ НАПРУЖЕННЯ У ПІВПРОСТОРІ ВІД ДІЇ НА ЙОГО ПОВЕРХНІ РУХОМОГО ФРИКЦІЙНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

О. О. ЄВТУШЕНКО<sup>1,2</sup>, С. Ю. ПИР'ЄВ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів;

<sup>2</sup> Політехніка Білостоцька, Польща

Отримано розв'язок просторової квазістатичної задачі термопружності для півпростору, на поверхню якого в обмеженій області діє рухоме механічне та теплове навантаження. Чисельний аналіз головних напружень виконано для герцівського розподілу тиску та пропорційної йому інтенсивності теплового потоку, заданих в області еліптичної форми.

**Ключові слова:** термопружність, півпростір, головні напруження, рухоме навантаження, тертя.

Тертя ковзання часто супроводжується відшаруванням та викришуванням матеріалу робочих поверхонь трибоз'єднань і, як наслідок, втратою ними робоздатності [1]. Однією із причин виникнення таких пошкоджень приповерхневого шару є перевищення максимальним головним розтягувальним напруженням свого критичного значення – границі міцності. Задачі теорії пружності та термопружності для півпростору із заданими на його поверхні локально розподіленими рухомими механічним і тепловим навантаженнями є модельними в механіці контактної взаємодії і трибології [2–4]. Побудовано розв'язки двовимірних [5–9] та просторових, із коловою лінією розділу крайових умов [10, 11], квазістатичних задач термопружності. Розв'язок просторової задачі термопружності для півпростору із довільною формою області рухомого навантаження отримано раніше [12]. Нижче досліджено розподіли головних напружень, зумовлених дією такого навантаження на поверхню півпростору.

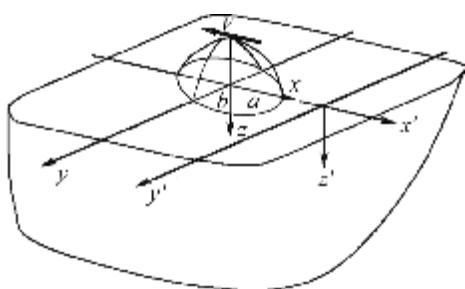


Рис. 1. Схема навантаження півпростору.

Fig. 1. Loading scheme of a semi-space.

**Постава та розв'язок задачі.** Розглянемо пружний однорідний ізотропний півпростір, віднесений до глобальної системи декартових координат  $O'x'y'z'$ , та деяку область  $\Omega$  на поверхні  $z' = 0$ , яка рухається зі сталою швидкістю  $V$  у від'ємному напрямку осі  $O'x'$  (рис. 1). В області  $\Omega$  задане механічне (нормальний тиск  $p(x, y) = p_0 p^*(x, y)$ , де  $p_0$  – характерне значення тиску, а  $p^*(x, y)$  – безрозмірна функція координат) та теплове (тепловий потік з інтенсивністю, рівною питомій потужності тертя  $q(x, y) = fVp(x, y)$ ,  $(x, y) \in \Omega$ ,  $f$  – коефіцієнт тертя [13]) навантаження. Зовні області  $\Omega$  поверхня півпростору вільна та теплоізолювана. Введемо також рухому систему прямокутних координат

Контактна особа: О. О. ЄВТУШЕНКО, e-mail: [a.yevtushenko@pb.edu.pl](mailto:a.yevtushenko@pb.edu.pl)

Охуз:  $x = x' + Vt$ ,  $t \geq 0$ ,  $y = y'$ ,  $z = z'$  із початком у геометричному центрі області  $\Omega$ . В ейлеровій системі координат Охуз температурне поле та напружено-деформований стан півпростору усталені, а компоненти тензора напружень мають вигляд [12]

$$\sigma_{mn}(X, Y, Z) = p_0[\sigma_{mn}^{e*}(X, Y, Z) + w_{th}\sigma_{mn}^{th*}(X, Y, Z)], \quad m, n \equiv x, y, z; \quad (1)$$

$$\sigma_{mn}^{e(th)*}(X, Y, Z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \bar{p}^*(\rho, \varphi) s_{mn}^{e(th)}(\rho, \varphi, X, Z) \cos(\rho Y \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi; \quad (2)$$

$$\bar{p}^*(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi a^2} \iint_{\Omega} p^*(x, y) \exp[i(\xi x + \eta y)] dx dy; \quad (3)$$

$$s_{mn}^{e(th)}(\rho, \varphi, Z) = \bar{\sigma}_{mn}^{e(th)*}(\rho, \varphi, Z) \exp(-i\rho X \cos \varphi) + \bar{\sigma}_{mn}^{e(th)*}(\rho, \pi - \varphi, Z) \exp[-i\rho X \cos(\pi - \varphi)];$$

$$\bar{\sigma}_{mn}^{e*}(\rho, \varphi, Z) = \frac{1}{2\Delta^e(\varphi)} \sum_{j=1}^2 b_{mn}^{(j)} \exp(-\rho\beta_j Z);$$

$$\bar{\sigma}_{mn}^{th*}(\rho, \varphi, Z) = \frac{1}{\beta_3 \Delta^{th}(\rho, \varphi) \Delta^e(\varphi)} \sum_{j=1}^3 c_{mn}^{(j)} \exp(-\rho\beta_j Z);$$

$$b_{xx}^{(1)} = (M_2^2 - 2M_1^2 + 2)\Phi_1^e(\varphi) \cos^2 \varphi, \quad b_{xx}^{(2)} = -2i\beta_2 \cos \varphi \Phi_2^e(\varphi);$$

$$b_{yy}^{(1)} = [2 + (M_2^2 - 2M_1^2 - 2) \cos^2 \varphi] \Phi_1^e(\varphi), \quad b_{yy}^{(2)} = -2i\beta_2 \Phi_3^e(\varphi) \sin \varphi;$$

$$b_{zz}^{(1)} = -2J(\varphi) \Phi_1^e(\varphi), \quad b_{zz}^{(2)} = 2i\beta_2 [\Phi_2^e(\varphi) \cos \varphi + \Phi_3^e(\varphi) \sin \varphi];$$

$$b_{xy}^{(1)} = \Phi_1^e(\varphi) \sin 2\varphi, \quad b_{xy}^{(2)} = -i\beta_2 [\Phi_2^e(\varphi) \sin \varphi + \Phi_3^e(\varphi) \cos \varphi];$$

$$b_{zx}^{(1)} = -2i\beta_1 \Phi_1^e(\varphi) \cos \varphi, \quad b_{zx}^{(2)} = -0,5\Phi_3^e(\varphi) \sin 2\varphi - [2J(\varphi) - \sin^2 \varphi] \Phi_2^e(\varphi);$$

$$b_{zy}^{(1)} = -2i\beta_1 \Phi_1^e(\varphi) \sin \varphi, \quad b_{zy}^{(2)} = -0,5\Phi_2^e(\varphi) \sin 2\varphi - [2J(\varphi) - \cos^2 \varphi] \Phi_3^e(\varphi);$$

$$c_{xx}^{(1)} = (M_2^2 - 2M_1^2 + 2)\Phi_1^{th}(\rho, \varphi) \cos^2 \varphi, \quad c_{xx}^{(2)} = 2\beta_2 \Phi_2^{th}(\rho, \varphi) \cos \varphi;$$

$$c_{xx}^{(3)} = -[M_2^2 \rho \cos^2 \varphi + 2(\rho \cos^2 \varphi - iPe \cos \varphi)] \Delta^e(\varphi) / \sqrt{\rho};$$

$$c_{yy}^{(1)} = [2 + (M_2^2 - 2M_1^2 - 2) \cos^2 \varphi] \Phi_1^{th}(\rho, \varphi), \quad c_{yy}^{(2)} = 2\beta_2 \Phi_3^{th}(\rho, \varphi) \sin \varphi;$$

$$c_{yy}^{(3)} = -[M_2^2 \rho \cos^2 \varphi + 2(\rho \sin^2 \varphi - iPe \cos \varphi)] \Delta^e(\varphi) / \sqrt{\rho}, \quad c_{zz}^{(1)} = (1 + \beta_2^2) \Phi_1^{th}(\rho, \varphi);$$

$$c_{zz}^{(2)} = 2\beta_2 [\Phi_2^{th}(\rho, \varphi) \cos \varphi + \Phi_3^{th}(\rho, \varphi) \sin \varphi], \quad c_{zz}^{(3)} = -\sqrt{\rho} (1 + \beta_2^2) \Delta^e(\varphi);$$

$$c_{xy}^{(1)} = \Phi_1^{th}(\rho, \varphi) \sin 2\varphi, \quad c_{xy}^{(2)} = \beta_2 [\Phi_2^{th}(\rho, \varphi) \sin \varphi + \Phi_3^{th}(\rho, \varphi) \cos \varphi];$$

$$c_{xy}^{(3)} = -\sqrt{\rho} \Delta^e(\varphi) \sin 2\varphi;$$

$$c_{zx}^{(1)} = -2i\beta_1 \Phi_1^{th}(\rho, \varphi) \cos \varphi, \quad c_{zx}^{(2)} = -i[0,5\Phi_3^{th}(\rho, \varphi) \sin 2\varphi + (\beta_2^2 + \cos^2 \varphi) \Phi_2^{th}(\rho, \varphi)];$$

$$c_{zx}^{(3)} = 2i\beta_3 \Delta^e(\varphi) \cos \varphi, \quad c_{zy}^{(1)} = -2i\beta_1 \Phi_1^{th}(\rho, \varphi) \sin \varphi;$$

$$c_{zy}^{(2)} = -i[0,5\Phi_2^{th}(\rho, \varphi) \sin 2\varphi + (\beta_2^2 + \sin^2 \varphi) \Phi_3^{th}(\rho, \varphi)], \quad c_{zy}^{(3)} = 2i\beta_3 \Delta^e(\varphi) \sin \varphi;$$

$$\Phi_1^e(\varphi) = J(\varphi) - if\beta_2 \cos \varphi, \quad \Phi_2^e(\varphi) = -i\beta_1 \cos \varphi - f[I(\varphi) \sin^2 \varphi + J(\varphi)];$$

$$\begin{aligned}
\Phi_3^e(\varphi) &= -i\beta_1 \sin \varphi + 0,5f I(\varphi) \sin 2\varphi, \quad \Phi_1^{th}(\rho, \varphi) = \sqrt{\rho} J^2(\varphi) - \beta_3 \beta_2; \\
\Phi_2^{th}(\rho, \varphi) &= (\beta_3 - \sqrt{\rho} \beta_1) J(\varphi) \cos \varphi, \quad \Phi_3^{th}(\rho, \varphi) = (\beta_3 - \sqrt{\rho} \beta_1) J(\varphi) \sin \varphi; \\
\Delta^e(\varphi) &= J^2(\varphi) - \beta_1 \beta_2, \quad \Delta^{th}(\rho, \varphi) = M_1^2 \rho \cos^2 \varphi - iPe \cos \varphi; \\
I(\varphi) &= [J(\varphi) - 2\beta_1 \beta_2] / \beta_2^2, \quad J(\varphi) = 1 - 0,5M_2^2 \cos^2 \varphi; \\
\beta_1 &= \sqrt{1 - M_1^2 \cos^2 \varphi}, \quad \beta_2 = \sqrt{1 - M_2^2 \cos^2 \varphi}, \quad \beta_3 = \sqrt{\rho - iPe \cos \varphi} / \sqrt{\rho}; \\
w_{th} &= \frac{afVE\alpha_t}{2K(1-\nu)}, \quad Pe = \frac{Va}{k}, \quad M_1 = \frac{V}{c_1}, \quad M_2 = \frac{V}{c_2}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}; \quad (4)
\end{aligned}$$

$$\xi = \frac{\rho}{a} \cos \varphi, \quad \eta = \frac{\rho}{a} \sin \varphi, \quad X = \frac{x}{a}, \quad Y = \frac{y}{a}, \quad Z = \frac{z}{a}, \quad (5)$$

де  $\sigma_{mn}^e$ ,  $\sigma_{mn}^{th}$  – компоненти тензора напружень, зумовлених дією нормального тиску  $p(x, y)$  та фрикційного теплового потоку інтенсивності  $q(x, y)$ , відповідно;  $a$  – характерний розмір області  $\Omega$ ;  $K, k$  – коефіцієнти тепло- і температуропровідності;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $\lambda, \mu$  – коефіцієнти Ляме;  $\rho_0$  – густина матеріалу півпростору. Безрозмірний параметр  $w_{th}$  (3), що відповідає у співвідношенні (1) за внесок термічних напружень  $\sigma_{mn}^{th}$  у повні напруження  $\sigma_{mn}$  у півпросторі, відомий як “термоконтактний критерій” [14, 15].

**Головні напруження.** Головні напруження  $\sigma_k$ ,  $k=1,2,3$  є корені характеристичного рівняння [16]

$$\begin{aligned}
s^3 - I_1 s^2 - I_2 s - I_3 &= 0, \quad I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}, \\
I_2 &= -(\sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{yy} \sigma_{zz} + \sigma_{zz} \sigma_{xx}) + (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2); \quad (6) \\
I_3 &= \sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} + 2\sigma_{xy} \sigma_{yz} \sigma_{zx} - \sigma_{xx} \sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy} \sigma_{zx}^2 - \sigma_{zz} \sigma_{xy}^2,
\end{aligned}$$

де компоненти тензора напружень  $\sigma_{mn}$ ,  $m, n \equiv x, y, z$  мають вигляд (1)–(5). Дійсні корені полінома третього порядку (6) знаходимо за формулами [17]

$$\begin{aligned}
s_1 &= I_1/3 + 2\sqrt{|-p/3|} \cos(\alpha/3), \quad s_{2,3} = I_1/3 - 2\sqrt{|-p/3|} \cos[(\alpha \pm \pi)/3]; \quad (7) \\
p &= -I_1^2/3 - I_2, \quad q = -2(I_1/3)^3 - I_1 I_2/3 - I_3, \quad \alpha = \arccos[-0,5q/(\sqrt{|-p/3|})^3].
\end{aligned}$$

Для виконання умови  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  приймаємо  $\sigma_1 = \max\{s_1, s_2, s_3\}$ ,  $\sigma_3 = \min\{s_1, s_2, s_3\}$ ,  $\sigma_2 = s_1 + s_2 + s_3 - \sigma_1 - \sigma_3$ , де корені  $s_k$ ,  $k=1,2,3$  обчислюємо за формулами (7).

**Числові результати.** Нехай область дії зовнішнього навантаження на поверхні півпростору є еліпс  $\Omega = \{(x, y): x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1\}$ . Розподіл тиску  $p(x, y) = p_0 p^*(x, y)$  вважаємо герцівським [2]:

$$p_0 = 3P/(2\pi ab), \quad p^*(x, y) = \sqrt{1 - (x/a)^2 - (y/b)^2}, \quad (8)$$

де  $P$  – головний вектор нормальних зусиль, розподілених на області  $\Omega$ . Підставивши залежності (8) під знак інтеграла у формулі (3), знайдемо трансформанту Фур’є тиску:

$$\bar{p}^*(\rho, \varphi) = \frac{\varepsilon}{\rho^2 l^2} \left[ \frac{\sin(\rho l)}{\rho l} - \cos(\rho l) \right], \quad (9)$$

де  $l = \sqrt{\cos^2 \varphi + \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}$ ,  $\varepsilon = b/a$ . Функцію  $\bar{p}^*(\rho, \varphi)$  (9) використовували під час знаходження безрозмірних механічних та теплових напружень за формулою (2).

Чисельний аналіз безрозмірних головних напружень  $\sigma_k^* = \sigma_k / p_0$ ,  $k = 1, 2, 3$  виконано для нержавної сталі ( $E = 190$  GPa;  $\nu = 0,3$ ;  $\rho_0 = 7,8 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup>;  $K = 21$  V/(m<sup>3</sup>°C);  $k = 5,9 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s;  $\alpha = 14 \cdot 10^{-6}$  °C<sup>-1</sup>), коли  $a = 0,5$  mm,  $f = 0,5$ ,  $V = 15$  m/s. Розглянуто випадок, де еліптична область навантаження витягнута в напрямку руху ( $\varepsilon = 0,5$ ). Із формул (4) знайдено, що  $w_t = 339,3$ ,  $Pe = 1271,2$ ,  $M_1 = 0,26 \cdot 10^{-2}$ ,  $M_2 = 0,49 \cdot 10^{-2}$ . Подвійні інтеграли у формулі (2) обчислювали наблизено за допомогою квадратурних формул типу Гауса [18].

Ізотерми максимального безрозмірного напруження  $\sigma_1^*$  подано на рис. 2. Області навантаження  $\Omega$  у площині  $Oxz$  відповідає смуга  $-1 \leq X \leq 1 \wedge Z \geq 0$ . Поблизу поверхні контакту, як і передбачали, головне напруження  $\sigma_1^*$  стискувальне. Зокрема, в центрі навантаженої області  $\Omega$  ( $X = Y = Z = 0$ ) маємо  $\sigma_1^* \approx -0,975$ . Вплив термічного складника  $\sigma_{mn}^{th*}$  на сумарний напружений стан проявляється насамперед в тому, що головне напруження  $\sigma_1^*$  може стати розтягувальним (додатним). Найбільше додатне його значення  $\approx 1,99$  досягається всередині півпростору на відстані  $Z \approx 0,12$  від його поверхні під задньою  $X \approx 1$  відносно напрямку руху межею навантаженої області. Незначні значення розтягувального максимального головного напруження  $\sigma_1^*$  спостерігаємо також зовні від передньої ( $X = -1$ ), щодо напрямку руху, межі області  $\Omega$ .

Описану картину розподілу у півпросторі максимального головного напруження  $\sigma_1^*$  підтверджують також дані, наведені на рис. 3 і 4. Абсолютне значення головного напруження  $\sigma_1^*$  із віддаленням від поверхні півпростору зменшується (рис. 3). Безрозмірне головне напруження  $\sigma_2^* \approx 0$ , а мінімальне безрозмірне  $\sigma_3^*$  всюди у півпросторі стискувальне. Абсолютне його значення найбільше на поверхні півпростору  $Z = 0$  у точці з координатами  $X = 0,5$ ;  $Y = 0$ . Характер розподілу всіх головних напружень всередині півпростору вздовж осі  $Ox$  однаковий – їхні значення найменші поблизу передньої межі навантаженої області, а найбільші біля задньої (рис. 4). Отже, безрозмірне максимальне дотичне напруження  $\tau_{\max}^* = (\sigma_1^* - \sigma_3^*)/2$  досягає найбільшого значення на поверхні півпростору в точці  $X \approx 0,6$ ,  $Y = 0$ .

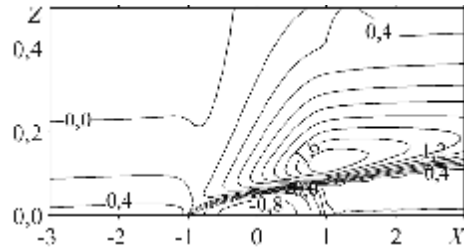


Рис. 2. Лінії рівня безрозмірного головного напруження  $\sigma_1^* = \sigma_1 / p_0$  у площині  $Oxz$ .

Fig. 2. The lines of a level of the dimensionless principal stress  $\sigma_1^* = \sigma_1 / p_0$  in the  $Oxz$ -plane.

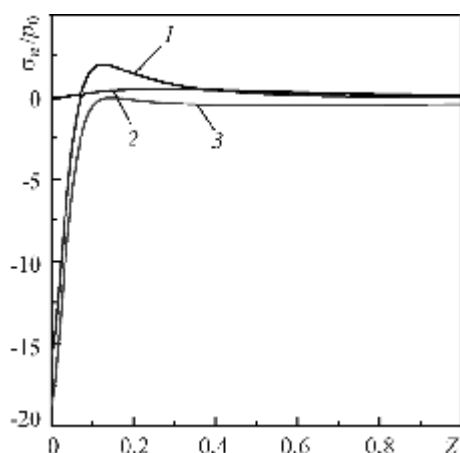


Рис. 3. Fig. 3.

Рис. 3. Розподіл безрозмірних головних напружень  $\sigma_n^* = \sigma_n / p_0$ ,  $n = 1, 2, 3$  в напрямку  $Oz$ , перпендикулярному до поверхні півпростору, коли  $X = 1,1$ ,  $Y = 0$ .

Fig. 3. Distribution of the dimensionless principal stresses  $\sigma_n^* = \sigma_n / p_0$ ,  $n = 1, 2, 3$  in  $Oz$  direction, perpendicular to the surface of the semi-space at  $X = 1.1$ ,  $Y = 0$ .

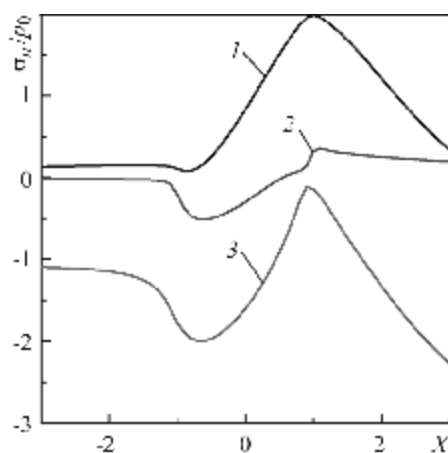


Рис. 4. Fig. 4.

Рис. 4. Розподіл безрозмірних головних напружень  $\sigma_n^* = \sigma_n / p_0$ ,  $n = 1, 2, 3$  вздовж осі  $Ox$ , коли  $Y = 0$ ,  $Z = 0,16$ .

Fig. 4. Distribution of the dimensionless principal stresses  $\sigma_n^* = \sigma_n / p_0$ ,  $n = 1, 2, 3$  along the axis  $Ox$  at  $Y = 0$ ,  $Z = 0.16$ .

## ВИСНОВКИ

Записано подання у вигляді інтегралів Фур'є компонент тензора напружень із розв'язку просторової задачі лінійної термопружності для півпростору, на поверхні якого діють рухомі локально розподілені механічне та теплове навантаження. На цій основі досліджено розподіли головних напружень і максимального дотичного напруження у півпросторі. Чисельний аналіз виконано для еліптичної навантаженої області, витягнутої в напрямку руху навантаження. Встановлено, що максимальне головне напруження на поверхні півпростору стискувальне, але з віддаленням від неї стає розтягувальним, досягаючи найбільшого значення на певній, фіксованій для заданих вхідних параметрів задачі, відстані від поверхні півпростору. Область найбільших значень розтягувального максимального напруження знаходиться всередині півпростору під межею навантаженої області, протилежною до напрямку її руху. Якщо в цій області максимальне головне напруження перевищить границю міцності даного матеріалу на розтяг, то можемо сподіватися в ній ініціації тріщиноутворення. Мінімальне головне напруження всюди у півпросторі стискувальне і набуває найбільшого абсолютного значення на поверхні півпростору в точці, що знаходиться на відстані від центра еліпса, рівній половині довжини його великої осі, в напрямку руху навантаження. За перевищення критичного значення на стиск саме тут може початися пластичне деформування матеріалу півпростору.

*РЕЗЮМЕ.* Получено решение пространственной квазистатической задачи термоупругости для полупространства, на поверхность которого в ограниченной области действует равномерно движущиеся механическая и тепловая нагрузки. Численный анализ главных напряжений выполнен для герцевского распределения давления и пропорциональной ему интенсивности теплового потока, заданных в области эллиптической формы.

*SUMMARY.* The solution of a three-dimensional quasi-static problem of thermoelasticity for a semi-space on which surface in the limited area the uniformly moving mechanical and thermal load is operating is obtained. The numerical analysis of the principal stresses is done for Hertzian distributions of pressure and of the heat flux intensity proportional to it, acting in the area of the elliptic form.

1. Дроздов Ю. Н., Арчезов В. Г., Смирнов В. И. Противозадирная стойкость трущихся тел. – М.: Наука, 1981. – 139 с.
2. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 509 с.
3. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчетов на трение и износ. – М.: Машиностроение, 1977. – 526 с.
4. Богданович П. Н., Прушак В. Я. Трение и износ в машинах. – Минск: Вышэйшая школа, 1999. – 374 с.
5. Yang C. C. Incipient plastic yielding of an elastoplastic half-space under an arbitrarily distributed moving heat source // *Int. J. Engng. Sci.* – 1971. – **9**, № 6. – P. 507–520.
6. Barber J. R. Thermoelastic displacements and stresses due to a heat source moving over the surface of a half plane // *Trans. ASME: J. Appl. Mech.* – 1984. – **51**, № 3. – P. 636–640.
7. Ju F. D. and Huang J. H. Heat checking in the contact zone of a bearing seal (A two-dimensional model of a single moving asperity) // *Wear.* – 1982. – **79**, № 2. – P. 107–118.
8. Евтушенко А. А., Панасюк И. В., Уханская О. М. Термонапряжённое состояние упругой полуплоскости, нагреваемой равномерно движущимся источником тепла // *Прикл. математика и механика.* – 1996. – **60**, вып. 1. – С. 165–171.
9. Yevtushenko A. A. and Chapovska R. B. Investigation of friction-induced thermal processes for some non-hertzian fast moving plane contacts // *Int. J. Mech. Sci.* – 1996. – **38**, № 10. – P. 1103–1116.
10. Huang J. H. and Ju F. D. Thermomechanical cracking due to moving frictional loads // *Wear.* – 1985. – **102**, № 1–2. – P. 81–104.
11. Lykotrafitis G. and Georgiadis H. G. The three-dimensional steady-state thermo-elastodynamic problem of moving sources over a half space // *Int. J. Solids Struct.* – 2003. – **40**, № 4. – P. 899–940.
12. Євтушенко О. О., Пир'єв С. Ю. Напружений стан півпростору, зумовлений дією на його поверхні рухомого механічного та теплового навантаження // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2007. – **50**, № 2. – С. 94–100.
13. Коровчинский М. В. Основы теории термомеханического контакта при локальном трении. Ч. 2 // *Вопросы теории термического контакта при локальном трении.* – М.: Наука, 1968. – С. 5–72.
14. Gesim B. and Winer W. O. Transient temperatures in the vicinity of an asperity contact // *Trans. ASME: J. Tribol.* – 1985. – **107**, № 3. – P. 333–341.
15. Евтушенко А. А., Уханская О. М. Термомеханический критерий изнашивания // *Трение и износ.* – 1994. – **15**, № 3. – С. 379–388.
16. Тимошенко С. П. Курс теории упругости / Под. ред. Э. И. Григолюка. – К.: Наук. думка, 1972. – 508 с.
17. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1974. – 831 с.

*Одержано 15.07.2010*