Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2010. – № 6. – Physicochemical Mechanics of Materials

УДК 539.3: 620.198

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ З БАГАТОШАРОВИМИ НЕОДНОРІДНИМИ ПОКРИВАМИ

В. А. ШЕВЧУК, Б. М. КАЛИНЯК

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Отримано інженерні формули для розрахунку напружень у циліндрі з неоднорідними багатошаровими покривами на основі підходу з використанням узагальнених граничних умов та підходу зі зведенням відповідної крайової задачі пружності до розв'язування інтегральних рівнянь. Порівняно і проаналізовано межі застосовності кожного з підходів.

Ключові слова: *багатошарові покриви, неоднорідний циліндр, узагальнені граничні умови, інтегральні рівняння.*

Розробка методики інженерного розрахунку напружено-деформованого стану (НДС) покривів і тіл з покривами – актуальна проблема [1]. Тут важливо враховувати реальні властивості матеріалу покриву, зокрема неоднорідність, яка може бути наслідком специфічних особливостей технологічного процесу виготовлення або впливу температурних і фізичних полів.

Раніше [2–4] розв'язували задачі пружності для тіл з неоднорідними покривами довільної товщини. У деяких підходах [5, 6] до визначення напруженого стану в них використовували специфічну особливість таких систем – малу товщину покриву порівняно з товщиною підкладки. Зокрема, підхід, пов'язаний з моделюванням тонких покривів оболонками і формулюванням відповідних узагальнених граничних умов (УГУ) [7, 8], дає можливість отримувати відносно прості розв'язки практично важливих задач [9].

З іншого боку, підхід, який ґрунтується на зведенні вихідної задачі пружності для неоднорідного циліндра до системи інтегральних рівнянь [10–14] дає можливість розв'язати відповідні задачі для тіл з неоднорідними покривами довільної товщини [15] та розрахувати НДС у них. У деяких випадках вдається отримати прості розрахункові формули [12].

Нижче на основі модифікації підходу з використанням узагальнених граничних умов для неоднорідних покривів та адаптації підходу зі зведенням крайової задачі пружності до інтегральних рівнянь для тонких покривів отримано відповідні аналітичні вирази для розрахунку напружень у циліндрі, а також порівняно ефективність цих підходів. Розглянемо суцільний однорідний довгий циліндр радіуса R з нанесеним n-шаровим неоднорідним покривом загальної товщини $h=\sum_{j=1}^{n} h_j$, де h_j – товщина j-го шару. Визначимо радіальне $\sigma_{rr}^{(j)}$, колове $\sigma_{\theta\theta}^{(j)}$ і осьове $\sigma_{zz}^{(j)}$ напруження як функції безрозмірної радіальної координати $\rho=r/R$ в j-му шарі $\left[\rho_j, \rho_{j+1}\right]$ ($j=\overline{0,n}$; індекс 0 відповідає циліндру-основі), де $\rho_0=0$, $\rho_1=1$, $\rho_j=1+\sum_{k=1}^{j-1} h_k/R$, $j=\overline{2,n+1}$.

Контактна особа: В. А. ШЕВЧУК, e-mail: shevchuk@iapmm.lviv.ua

Метод узагальнених граничних умов [7, 8] дає можливість визначити НДС у тілах з тонкими багатошаровими покривами шляхом їх моделювання оболонками. За такого підходу вплив покривів на механічний стан системи тіло–покрив описують спеціальні граничні умови. Сформулюємо модифікований варіант УГУ механічного спряження тіла з середовищем у циліндричній системі координат для радіальної неоднорідності характеристик матеріалу покриву, які пов'язують компоненти тензора напружень $\sigma_{ms}^{(0)}$ на поверхні контакту тіло–покрив із заданим зовнішнім навантаженням σ_{ms}^{C}. Нехтуючи деформації згину і закруту поверхні поділу тіло–покрив, запишемо [8]:

$$\begin{cases} \sigma_{rz}^{(0)} + p_{11}\sigma_{zz}^{(0)} + p_{12}\sigma_{\theta\theta}^{(0)} + p_{13}\sigma_{rr}^{(0)} + p_{14}\sigma_{\theta z}^{(0)} = \sigma_{rz}^{\mathrm{C}} + C_1\partial_z\sigma_{rr}^{\mathrm{C}}, \\ \sigma_{r\theta}^{(0)} + p_{21}\sigma_{zz}^{(0)} + p_{22}\sigma_{\theta\theta}^{(0)} + p_{23}\sigma_{rr}^{(0)} + p_{24}\sigma_{\theta z}^{(0)} = \sigma_{r\theta}^{\mathrm{C}} + C_2R^{-1}\partial_\theta\sigma_{rr}^{\mathrm{C}}, \\ (1+p_{33})\sigma_{rr}^{(0)} + p_{31}\sigma_{zz}^{(0)} + p_{32}\sigma_{\theta\theta}^{(0)} + p_{34}\sigma_{\theta z}^{(0)} = (1+D_1\Delta)\sigma_{rr}^{\mathrm{C}}, \end{cases} \tag{1}$$

де диференціальні оператори p_{ik} у циліндричній системі координат

$$p_{11} = \frac{\nu^{(0)}(G_{12}-G_{11})}{E^{(0)}}\partial_z, \quad p_{12} = -p_{11}, \; p_{13} = \left[\frac{\nu^{(0)}(G_{11}+G_{12})}{E^{(0)}} - C_2\right]\partial_z,$$

$$p_{14} = -\frac{2(1+\nu^{(0)})}{RE^{(0)}}G_{13}\partial_\theta, \quad p_{21} = \frac{\nu^{(0)}(G_{11}-G_{12})}{RE^{(0)}}\partial_\theta, \quad p_{22} = -p_{21},$$

$$p_{23} = R^{-1}\left[\frac{\nu^{(0)}(G_{11}+G_{12})}{E^{(0)}} - C_2\right]\partial_\theta, \; p_{24} = -\frac{2(1+\nu^{(0)})}{E^{(0)}}G_{13}\partial_z,$$

$$p_{31} = \frac{\nu^{(0)}G_{22}-G_{21}}{E^{(0)}}(\partial_z^2 + R^{-2}\partial_\theta^2), \; p_{32} = \frac{\nu^{(0)}G_{21}-G_{22}}{E^{(0)}}(\partial_z^2 + R^{-2}\partial_\theta^2),$$

$$p_{33} = \left(\frac{\nu^{(0)}(G_{21}+G_{22})}{E^{(0)}} - D_2\right)\Delta - \frac{\nu^{(0)}(G_{11}+G_{12})}{RE^{(0)}}, \; p_{34} = -\frac{4}{R}\frac{1+\nu^{(0)}}{E^{(0)}}G_{23}\partial_z\partial_\theta,$$

$$\partial_\alpha = \partial/\partial\alpha \; (\alpha = \theta, z), \; \Delta = R^{-1}\left(\partial_z\left(R\partial_z\right) + \partial_\theta\left(R^{-1}\partial_\theta\right)\right).$$

Тут відомі вирази [8] для коефіцієнтів жорсткості узагальнюють для радіально неоднорідного покриву:

$$G_{i1} = \int_0^h \frac{E}{1-\nu^2}\gamma^{i-1}d\gamma, \quad G_{i2} = \int_0^h \frac{E\nu}{1-\nu^2}\gamma^{j-1}d\gamma, \quad G_{i3} = \int_0^h \frac{E}{1+\nu}\gamma^{i-1}d\gamma, \quad i = 1, 2;$$

$$C_1 = \int_0^h \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{3\gamma^2}{h^2} - \frac{2\gamma^3}{h^3}\right)d\gamma, \quad C_2 = \int_0^h \frac{\nu}{1-\nu}d\gamma - C_1,$$

$$D_1 = \int_0^h \frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{3\gamma^3}{h^2} - \frac{2\gamma^4}{h^3}\right)d\gamma, \quad D_2 = \int_0^h \frac{\nu}{1-\nu}\gamma d\gamma - D_1,$$

де E і ν – модуль Юнґа і коефіцієнт Пуассона. Після знаходження НДС тіла на основі рівнянь тривимірної теорії пружності і використання умов (1) напруження в покриві визначають через граничні значення компонент тензора напружень на межі тіло–покрив і задане поверхневе навантаження [8]. Для неоднорідного покриву

$$\sigma_{rr}^{(j)}(\rho) = \frac{\sigma_{rr}^C + \sigma_{rr}^{(0)}}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - 2\frac{R(\rho-1)}{h}\right)\left(3 - \left(1 - 2\frac{R(\rho-1)}{h}\right)^2\right)\frac{\sigma_{rr}^C - \sigma_{rr}^{(0)}}{2},$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(j)}(\rho)=\frac{E_1^{(j)}(\rho)}{E^{(0)}}\Big[\Big(1-\nu^{(j)}(\rho)\nu^{(0)}\Big)\sigma_{\theta\theta}^{(0)}+\Big(\nu^{(j)}(\rho)-\nu^{(0)}\Big)\sigma_{zz}^{(0)}-\nu^{(0)}\Big(1+\nu^{(j)}(\rho)\Big)\sigma_{rr}^{(0)}\Big]+$$

$$+\frac{\nu^{(j)}(\rho)}{1-\nu^{(j)}(\rho)}\sigma_{rr}^{(j)}(\rho),$$

$$\sigma_{zz}^{(j)}(\rho)=\frac{E_1^{(j)}(\rho)}{E^{(0)}}\Big[\Big(1-\nu^{(j)}(\rho)\nu^{(0)}\Big)\sigma_{zz}^{(0)}+\Big(\nu^{(j)}(\rho)-\nu^{(0)}\Big)\sigma_{\theta\theta}^{(0)}-\nu^{(0)}\Big(1+\nu^{(j)}(\rho)\Big)\sigma_{rr}^{(0)}\Big]+$$

$$+\frac{\nu^{(j)}(\rho)}{1-\nu^{(j)}(\rho)}\sigma_{rr}^{(j)}(\rho),$$

$$\sigma_{\theta z}^{(j)}=\frac{E^{(j)}(\rho)(1+\nu^{(0)})}{E^{(0)}\Big(1+\nu^{(j)}(\rho)\Big)}\sigma_{\theta z}^{(0)},\quad j=\overline{1,n}\,, \tag{2}$$

де $E_1^{(j)}(\rho)=E^{(j)}(\rho)\Big/\Big(1-\Big(\nu^{(j)}(\rho)\Big)^2\Big)$.

Метод зведення до інтегральних рівнянь. Для визначення напружень у неоднорідних товстих циліндрах запропоновано [10–14] підхід, який дає можливість звести відповідну граничну задачу термопружності у напруженнях до сукупності інтегральних рівнянь Вольтера другого роду та інтегральних умов. Застосуємо його для знаходження напружень у циліндрі з багатошаровим неоднорідним покривом. Тоді систему рівнянь рівноваги, зв'язку між тензорами деформацій і напружень, рівнянь суцільності, граничних умов на бічних поверхнях і торцях циліндра, умов ідеального механічного контакту між шарами зведемо до розв'язування системи інтегральних рівнянь

$$\sigma_{rr}^{(j)}(\rho)=\frac{\sigma_{rr}^{(j)}(\rho_j)\rho_j^2}{\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho_j}^{\rho}\eta\sigma^{(j)}(\eta)d\eta,\quad j=\overline{0,n}\,; \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\sigma^{(j)}(\rho)=E_1^{(j)}(\rho)\Big\{&A^{(0)}+\nu^{(j)}(\rho)e_z+\\&+S_-(j-1)\sum_{k=1}^{j}\sigma_{rr}^{(k-1)}(\rho_k)\Big[\varphi^{(k)}(\rho_k)-\varphi^{(k-1)}(\rho_k)\Big]+\int\limits_0^{\rho}\sigma_{rr}(\eta)\varphi'(\eta)d\eta\Big\}\end{aligned} \tag{4}$$

за виконання інтегральної умови рівноваги

$$\int\limits_0^{\rho_{n+1}}\eta\sigma(\eta)d\eta=\rho_{n+1}^2P \tag{5}$$

(отриманої безпосереднім інтегруванням рівняння рівноваги з використанням граничної умови $\sigma_{rr}^{(j)}(\rho_{n+1})=P$) та інтегральної умови на осьові напруження

$$\int\limits_0^{\rho_{n+1}}\eta\sigma_{zz}\left(\eta\right)d\eta=\rho_{n+1}^{-2}Q\,, \tag{6}$$

коли задане навантаження на торцях, або умови для осьової деформації $e_z=0$, якщо торці жорстко защемлені. У формулах (3)–(6) і надалі $\sigma^{(j)}=\sigma_{rr}^{(j)}+\sigma_{\theta\theta}^{(j)}$ – сумарне напруження; $\varphi^{(j)}(\rho)=(1+\nu^{(j)}(\rho))/E^{(j)}(\rho)$; $S_-\left(x\right)=\begin{cases}1,\ x\ge 0\\0,\ x<0\end{cases}$ – асиметрична одинична функція; P і Q – навантаження на поверхні циліндра і торцях. Розв'язуючи цю систему методом квадратурних формул [16] з використанням формули трапецій [12], можна отримати такі вирази для сумарних і радіальних напружень:

$$\sigma^{(j)}(\rho)=A^{(0)}\delta_{11}^{(j)}(\rho)+e_z\delta_{12}^{(j)}(\rho)+\delta_0^{(j)}(\rho),$$

$$\sigma_{rr}^{(j)}(\rho)=A^{(0)}\gamma_{11}^{(j)}(\rho)+e_z\gamma_{12}^{(j)}(\rho)+\gamma_0^{(j)}(\rho), \quad j=\overline{0,n}, \quad \sigma_{rr}^{(0)}(0)=\frac{\sigma^{(0)}(0)}{2}, \qquad (7)$$

де $\delta_{11}^{(0)}(\rho)=E_1^{(0)}$; $\delta_{12}^{(0)}(\rho)=\nu^{(0)}E_1^{(0)}$; $\delta_0^{(0)}(\rho)=0$; $\gamma_{11}^{(0)}(\rho)=\frac{E_1^{(0)}}{4}\left(2+\rho\right)$;

$$\gamma_{12}^{(0)}(\rho)=\nu^{(0)}\gamma_{11}^{(0)}(\rho); \quad \gamma_0^{(0)}(\rho)=0;$$

$$\delta_{11}^{(j)}(\rho)=\xi^{(j)}(\rho)\left\{\left(1+\chi_{11}^{(j)}\right)\left[1+X^{(j)}(\rho)\right]+\gamma_{11}^{(j-1)}(\rho_j)Y^{(j)}(\rho)\right\};$$

$$\delta_{12}^{(j)}(\rho)=\xi^{(j)}(\rho)\left\{\nu^{(j)}(\rho)-\nu^{(j)}(\rho_j)X^{(j)}(\rho)+\right.$$

$$\left.+\left(\nu^{(j)}(\rho_j)+\chi_{11}^{(j)}\right)\left[1+X^{(j)}(\rho)\right]+\gamma_{12}^{(j-1)}(\rho_j)Y^{(j)}(\rho)\right\};$$

$$\delta_0^{(j)}(\rho)=\xi^{(j)}(\rho)\left\{\chi_0^{(j)}\left[1+X^{(j)}(\rho)\right]+\gamma_0^{(j-1)}(\rho_j)Y^{(j)}(\rho)\right\};$$

$$X^{(j)}(\rho)=\frac{E_1^{(j)}(\rho_j)\left(\rho-\rho_j\right)^2\rho_j\left(\varphi^{(j)}(\rho)\right)'}{4\rho^2};$$

$$Y^{(j)}(\rho)=\frac{\left(\rho-\rho_j\right)}{2}\left[\left(\varphi^{(j)}(\rho)\right)'\Big|_{\rho=\rho_j}+\frac{\rho^2}{\rho_j^2}\left(\varphi^{(j)}(\rho)\right)'\right];$$

$$\chi_{ml}^{(j)}=\sum_{k=0}^{j-1}\gamma_{ml}^{(k)}(\rho_{k+1})\beta^{(k)}+\sum_{k=0}^{j-1}\int\limits_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\gamma_{ml}^{(k)}(\eta)\left(\varphi^{(k)}(\eta)\right)'d\eta, \quad ml=11,\,12,\,0;$$

$$\gamma_{1k}^{(j)}(\rho)=\frac{\rho_j^2}{\rho^2}\gamma_{1k}^{(j-1)}(\rho_j)+\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho_j}^{\rho}\eta\delta_{1k}^{(j)}(\eta)d\eta, \quad k=1,\,2;$$

$$\gamma_0^{(j)}(\rho)=\frac{\rho_j^2}{\rho^2}\gamma_0^{(j-1)}(\rho_j)+\frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho_j}^{\rho}\eta\delta_0^{(j)}(\eta)d\eta;$$

$$\xi^{(j)}(\rho)=E_1^{(j)}(\rho)\left[1-(\rho-\rho_{j-1})^2E_1^{(j)}(\rho)\left(\varphi^{(j)}(\rho)\right)'\Big/(4\rho)\right]^{-1};$$

$$\beta^{(j)}=\varphi^{(j+1)}(\rho_{j+1})-\varphi^{(j)}(\rho_{j+1}), \quad j=\overline{1,n};$$

$$A^{(0)}=\frac{d_{22}c_1-d_{12}c_2}{d_{11}d_{22}-d_{21}d_{12}}, \quad e_z=\frac{d_{11}c_2-d_{21}c_1}{d_{11}d_{22}-d_{21}d_{12}}.$$

Якщо $e_z=0$, $A^{(0)}=c_1/d_{11}$. Тут $c_1=\rho_{n+1}^2P$, $c_2=\rho_{n+1}^{-2}Q$, $d_{1k}=\int\limits_0^{\rho_{n+1}}\eta\delta_{1k}(\eta)d\eta$, $k=1,\,2$; $d_{21}=\int\limits_0^{\rho_{n+1}}\eta\nu(\eta)\delta_{11}(\eta)d\eta$, $d_{22}=\int\limits_0^{\rho_{n+1}}\eta\left(E(\eta)+\nu(\eta)\delta_{12}(\eta)\right)d\eta$. Колове напруження $\sigma_{\theta\theta}^{(j)}$ визначають з означення сумарного напруження $\sigma^{(j)}=\sigma_{rr}^{(j)}+\sigma_{\theta\theta}^{(j)}$, а осьове $\sigma_{zz}^{(j)}$ – з відповідного співвідношення закону Гука.

Приклад. Розглянемо задачу про визначення напружень у суцільному циліндрі з багатошаровим покривом під дією рівномірно розподіленого тиску P по поверхні. Вважаємо, що модулі пружності у кожному шарі покриву мають степеневу залежність від радіальної змінної $E^{(j)}(\rho)=E_0^{(j)}\rho^{m_j}$ ($E_0^{(j)}$ – задані сталі, $m_j \neq 1, 2$), а коефіцієнти Пуассона $\nu^{(j)}$ – сталі у кожному шарі. Тоді третя узагальнена гранична умова (1) при $r = R$ набуде вигляду (перші дві задовольняються тотожно)

$$\left(1-\frac{\nu^{(0)}(G_{11}+G_{12})}{RE^{(0)}}\right)\sigma_{rr}^{(0)}+\frac{G_{12}-\nu^{(0)}G_{11}}{RE^{(0)}}\sigma_{zz}^{(0)}+\frac{G_{11}-\nu^{(0)}G_{12}}{RE^{(0)}}\sigma_{\theta\theta}^{(0)}=P\,.$$

Розв'язуючи задачу для циліндра [8], закріпленого на торцях від осьових переміщень, та використовуючи формули відновлення (2), остаточно отримуємо:

$$\sigma_{rr}^{(j)}(\rho)=\frac{P+\sigma_{rr}^{(0)}}{2}-\frac{1}{2}\left(1-2\frac{R(\rho-1)}{h}\right)\left(3-\left(1-2\frac{R(\rho-1)}{h}\right)^2\right)\frac{P-\sigma_{rr}^{(0)}}{2}\,,$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(j)}(\rho)=\frac{E_1^{(j)}(\rho)\left(1-\nu^{(0)}-\left(\nu^{(0)}\right)^2\right)}{E^{(0)}}\sigma_{rr}^{(0)}+\frac{\nu^{(j)}}{1-\nu^{(j)}}\sigma_{rr}^{(j)}(\rho)\,,\quad j=\overline{1,n}\,, \qquad (8)$$

$$\sigma_{rr}^{(0)}=\sigma_{\theta\theta}^{(0)}=P\delta^{-1}\,,\quad \delta=1+\frac{G_{11}\left(1-\nu^{(0)}-2\left(\nu^{(0)}\right)^2\right)}{RE^{(0)}}\,,\quad G_{11}=\int_R^{R+h}\frac{E(r)}{1-\nu^2(r)}dr\,.$$

Точний розв'язок цієї задачі має вигляд

$$\sigma_{rr}^{(j)}=C_1^{(j)}\rho^{\lambda_1^{(j)}}+C_2^{(j)}\rho^{\lambda_2^{(j)}}\,,\quad \sigma^{(j)}=C_1^{(j)}\left(\lambda_1^{(j)}+2\right)\rho^{\lambda_1^{(j)}}+C_2^{(j)}\left(\lambda_2^{(j)}+2\right)\rho^{\lambda_2^{(j)}}\,, \qquad (9)$$

де $\lambda_{1,2}^{(j)}=\dfrac{(m_j-2)\pm\sqrt{(m_j-2)^2+4m_j\dfrac{1-2\nu^{(j)}}{1-\nu^{(j)}}}}{2}$, а константи $C_1^{(j)}$ і $C_2^{(j)}$ визначають зі системи алгебричних рівнянь, отриманої з граничних умов, які враховують ідеальний механічний контакт між шарами та зовнішні навантаження.

Досліджено залежності колових безрозмірних напружень у розмірностях P (зі значком "~") на межі шарів у циліндрі з 10-шаровим покривом від товщини покриву h (h = {0,002; 0,02; 0,5}) та показника m_j (m_j = {0; 3; 5} характеризує неоднорідність покриву) за однакових товщин шарів і значень $E_0^{(j)}$ та $\nu^{(j)}$

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$E_0^{(j)}$	4,0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,0	1,6	1,2	0,8
$\nu^{(j)}$	0,3	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

за точними $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{ex}(\rho)$ (9) та наближеними $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{IE}(\rho)$ (7) і $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{sh}(\rho)$ (8) формулами.

Результати обчислень (див. таблицю) вказують на необхідність урахування неоднорідності покриву, особливо зі збільшенням товщини. Наприклад, якщо брати до уваги неоднорідність кожного шару покриву (m_j = 5) при h = 0,5, то це, порівняно з кусково-однорідним (m_j = 0), призводить до зміни колових напружень на поверхні покрив–тіло на 22%, а в останньому шарі – на 128%. Ці напруження можуть суттєво змінюватись залежно від властивостей матеріалу кожного шару покриву, їх товщин, неоднорідності матеріалу.

Розподіл напружень у шарах суттєво залежить як від товщини покриву, так і від неоднорідності і фізико-механічних властивостей кожного шару. Зокрема, при $m_j = 0$ колові напруження у шостому шарі за товщини покриву $h = 0{,}5$ на 86% перевищують напруження у цьому ж шарі, якщо $h = 0{,}002$, а напруження змінюються на 51% в останньому шарі і на 13% – на межі покрив–циліндр. Порівняння цих самих величини при $m_j = 5$ дає відповідно 207; 243 і 12%.

m_j	ρ	$h = 0{,}002$			$h = 0{,}02$			$h = 0{,}5$		
		$\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{ex}(\rho)$	$\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{IE}(\rho)$	$\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{sh}(\rho)$	$\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{ex}(\rho)$	$\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{IE}(\rho)$	$\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{sh}(\rho)$	$\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{ex}(\rho)$	$\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{IE}(\rho)$	$\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{sh}(\rho)$
0	1,00	0,3045	0,3045	0,3045	0,3075	0,3075	0,3075	0,3451	0,3451	0,3740
	1+0,1*h*	0,3590	0,3590	0,3587	0,3654	0,3654	0,3622	0,4891	0,4891	0,4390
	1+0,2*h*	0,4137	0,4137	0,4129	0,4240	0,4240	0,4168	0,6406	0,6406	0,5013
	1+0,3*h*	0,4683	0,4683	0,4671	0,4829	0,4829	0,4713	0,7905	0,7905	0,5615
	1+0,4*h*	0,5230	0,5230	0,5213	0,5421	0,5421	0,5256	0,9364	0,9364	0,6203
	1+0,5*h*	0,5777	0,5777	0,5755	0,6014	0,6014	0,5800	1,0768	1,0768	0,6784
	1+0,6*h*	0,5231	0,5231	0,5212	0,5436	0,5436	0,5248	0,9394	0,9394	0,6033
	1+0,7*h*	0,4686	0,4686	0,4670	0,4858	0,4858	0,4697	0,8062	0,8062	0,5288
	1+0,8*h*	0,4140	0,4140	0,4127	0,4278	0,4278	0,4146	0,6749	0,6749	0,4558
	1+0,9*h*	0,3595	0,3595	0,3585	0,3694	0,3694	0,3596	0,5425	0,5425	0,3848
3	1,00	0,3045	0,3045	0,3045	0,3074	0,3074	0,3050	0,3057	0,3065	0,3449
	1+0,1*h*	0,3591	0,3591	0,3588	0,3660	0,3660	0,3595	0,4562	0,4553	0,4247
	1+0,2*h*	0,4139	0,4139	0,4130	0,4260	0,4260	0,4138	0,6497	0,6467	0,4933
	1+0,3*h*	0,4687	0,4687	0,4673	0,4870	0,4870	0,4681	0,8833	0,8778	0,5606
	1+0,4*h*	0,5236	0,5236	0,5215	0,5489	0,5489	0,5224	1,1565	1,1482	0,6271
	1+0,5*h*	0,5786	0,5786	0,5757	0,6116	0,6116	0,5767	1,4705	1,4590	0,6933
	1+0,6*h*	0,5241	0,5241	0,5214	0,5540	0,5540	0,5222	1,3741	1,3635	0,6172
	1+0,7*h*	0,4695	0,4695	0,4671	0,4955	0,4955	0,4677	1,2426	1,2332	0,5416
	1+0,8*h*	0,4148	0,4148	0,4128	0,4361	0,4361	0,4133	1,0717	1,0640	0,4668
	1+0,9*h*	0,3600	0,3600	0,3585	0,3756	0,3757	0,3588	0,8562	0,8569	0,3931
5	1,00	0,3045	0,3045	0,3045	0,3074	0,3074	0,3075	0,2678	0,2711	0,3122
	1+0,1h	0,3592	0,3592	0,3588	0,3664	0,3664	0,3633	0,4146	0,4134	0,3983
	1+0,2*h*	0,4140	0,4140	0,4131	0,4273	0,4273	0,4184	0,6286	0,6213	0,4688
	1+0,3*h*	0,4690	0,4690	0,4673	0,4897	0,4897	0,4734	0,9188	0,9034	0,5390
	1+0,4*h*	0,5241	0,5241	0,5716	0,5535	0,5535	0,5283	1,2974	1,2718	0,6091
	1+0,5*h*	0,5793	0,5793	0,5758	0,6187	0,6187	0,5832	1,7790	1,7405	0,6791
	1+0,6*h*	0,5797	0,5797	0,5715	0,5611	0,5611	0,5275	1,7640	1,7256	0,6071
	1+0,7*h*	0,4701	0,4701	0,4672	0,5022	0,5022	0,4718	1,6804	1,6439	0,5353
	1+0,8*h*	0,4154	0,4154	0,4129	0,4419	0,4419	0,4162	1,5111	1,4787	0,4636
	1+0,9*h*	0,3604	0,3604	0,3586	0,3800	0,3800	0,3607	1,2355	1,2263	0,3921

Слід зауважити, що для кусково-однорідного покриву ($m_j = 0$) за підходом інтегральних рівнянь нема похибки обчислень, оскільки тоді інтегральні рівняння вироджуються у систему лінійних алгебричних рівнянь. За малих товщин метод, побудований на використанні інтегральних рівнянь, дає результати з точністю мінімум чотири значущих цифри, в той же час похибка обчислень для підходу на основі теорії оболонок не перевищує 6%. Однак за наявності товстого покриву метод на основі інтегральних рівнянь дає задовільну точність з різницею не більше 2,2%, а метод, що ґрунтується на теорії оболонок, не може дати правильних результатів.

ВИСНОВКИ

Запропоновані аналітичні вирази розрахунку напружень у циліндрі з неоднорідними багатошаровими покривами на основі підходу з використанням узагальнених граничних умов та підходу зі зведенням до інтегральних рівнянь. Виявлено, що підхід на основі теорії оболонок ефективніший для покривів зі сумарно малою товщиною. Однак лише підхід, що базується на зведенні до інтегральних рівнянь, дає задовільні результати для сумарно товстих покривів, які складаються з великої кількості тонких неоднорідних шарів.

РЕЗЮМЕ. Получены инженерные формулы для расчета напряжений в цилиндре с неоднородными многослойными покрытиями на основе подхода с использованием обобщенных граничных условий и подхода со сведением к интегральным уравнениям. Сравнены и проанализированы пределы применимости каждого из подходов.

SUMMARY. The engineering formulas for calculation of stresses in a cylinder with inhomogeneous multilayer coatings based on the approach with the use of generalized boundary conditions and the approach with reduction to integral equations have been obtained. The scopes of applicability are compared and analyzed for each of approaches.

1. *Писаренко Г. С.* Некоторые актуальные нерешенные проблемы механики деформируемого твердого тела // Проблемы прочности. – 1998. – № 6. – С. 5–8.
2. *Плевако В.* Напружений стан неоднорідних покриттів // Машинознавство. – 2001. – № 3 (45). – С. 24–28.
3. *Kroupa F., Knesl Z., and Valach J.* Residual stresses in graded thick coatings // Acta Techn. CSAV. – 1993. – **38**. – P. 29–74.
4. *Teixeira V.* Numerical analysis of the influence of coating porosity and substrate elastic properties on the residual stresses in high temperature graded coatings // Surface and Coatings Technology – 2001. – **146–147**. – P. 79–84.
5. *Пелех Б. Л., Флейшман Ф. Н.* Приближенный метод решения задач теории упругости для тел с тонкими криволинейными покрытиями // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1988. – № 5. – С. 36–41.
6. *Савула Я., Винницька Л.* Числовий аналіз напружено-деформованого стану порожнистого циліндра з тонким включенням // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2007. – Вип. 6. – С. 54–65.
7. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1967. – Вып. 7. – С. 227–233.
8. *Шевчук В. А.* Расчет напряженного состояния тел с многослойными тонкими покрытиями // Проблемы прочности. – 2000. – № 1. – С. 136–150.
9. *Shevchuk V. A. and Silberschmidt V. V.* Semi-analytical analysis of thermally induced damage in thin ceramic coatings // Int. J. of Solids and Structures. – 2005. – **42**. – P. 4738–4757.
10. *Вігак В. М.* Розв’язки задач пружності та термопружності в напруженнях // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – К.: Вид-во Ін-ту математики НАН України, 1995. – **9**. – С. 34–131.
11. *Калиняк Б. М., Попович В. С.* Напружений стан шаруватого термочутливого циліндра в умовах асимптотичного теплового режиму // Машинознавство. – 2005. – № 2. – С. 161–178.
12. *Калиняк Б. М.* Аналітичні вирази для напружень у довгому порожнистому неоднорідному термочутливому циліндрі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 2. – С. 79–86.
13. *Вігак В. М., Калиняк Б. М.* Зведення одновимірних задач пружності та термопружності для неоднорідних та термочутливих тіл до інтегральних рівнянь другого роду // ДАН України. – 1998. – **48**, № 2. – С. 60–67.
14. *Tokovyy Yu. V. and Ma Chieng-Ching.* Analysis of 2D non-axisymmetric elasticity and thermoelasticity problems for radially inhomogeneous hollow cylinders // J. Eng. Math. – 2008. – **6**. – P. 171–178.
15. *Shevchuk V. A. and Silberschmidt V. V.* Analysis of damage evolution in thick ceramic coatings // Materials Sci. and Eng. A. – 2006. – **426**. – P. 121–127.
16. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справ. пос. – К.: Наук. думка, 1986. – 543 с.

Одержано 10.07.2009