

УДК 539.421

## РОЗРАХУНКОВА МОДЕЛЬ ТІЛА ІЗ ТРІЩИНОЮ, “ЗАЛІКОВАНОЮ” В РЕЗУЛЬТАТІ ІН’ЄКТУВАННЯ

В. П. СИЛОВАНЮК, О. В. ГАЛАЗЮК

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Побудована розрахункова модель пошкодженого тріщиною тіла, зміцненого за ін’єкційними технологіями. Її особливістю є врахування нелінійності в деформуванні матеріалу заповнювача. Математично проблема зведена до розв’язування нелінійного сингулярного інтегро-диференціального рівняння. В припущенні, що контур дефекту – еліпс, отримано точний розв’язок інтегрального рівняння, одну з констант якого встановлено із розв’язку трансцендентного рівняння. Знайдено напруження в матеріалі наповнювача, коефіцієнти інтенсивності напружень, граничні навантаження тіла із залікованою ін’єкційними матеріалами тріщиною, діаграми розтягу яких змінюються від лінійних до нелінійних.

**Ключові слова:** заліковування тріщин, нелінійна модель, ін’єкційний матеріал, міцність.

Один із ефективних способів відновлення пошкоджених тріщинами елементів конструкцій – ін’єктування дефектних зон (рис. 1), яке полягає у введенні в пошкоджене місце бетонних і залізобетонних конструкцій і споруд (у тріщини, порожнини, викришування, відшарування тощо) рідинних (найчастіше полімерних) матеріалів, здатних після кристалізації або полімеризації формувати з бетонними матрицями міцні адгезійні зв’язки. В останні роки ці технології широко застосовують у вітчизняній та зарубіжній практиці для відновлення суцільності, міцності та роботоздатності багатьох об’єктів тривалої експлуатації.

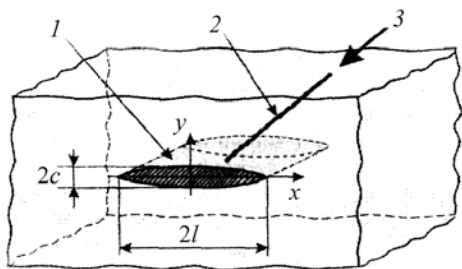


Рис. 1. Схема ін’єктування пошкодженого тріщиною елемента конструкції:  
1 – тріщина; 2 – буровий отвір;  
3 – подача ін’єкційного матеріалу.

Fig. 1. A chart of the crack-damaged structural element injection: 1 – crack; 2 – drill hole; 3 – supply of injection material.

Для оцінювання роботоздатності відновлених ін’єктуванням елементів конструкцій необхідно розв’язати задачі про граничну рівновагу тіл із заповненими тріщинами, які є окремим класом крайових задач пружного континууму. На відміну від тріщин, поверхні яких вільні від напружень або напруження на яких наперед відомі, для заповнених дефектів необхідні додаткові умови для взаємодії (контакту) матеріалу заповнювача із основним матеріалом. Ця взаємодія як передача частини навантаження, яке несе тіло із наповненою тріщиною, а також оптимальний вибір матеріалів заповнювача – суть ідеї “заліковування” пошкоджень мето-

дом ін’єктування. Зрозуміло, що ефективність такого зміцнення залежить від адгезійної міцності матеріалів на поверхні їх поділу. Незалежно від природи зв’язків з позиції механіки неоднорідних тіл-континуумів їх моделюють силовими фак-

Контактна особа: В. П. СИЛОВАНЮК, e-mail: sylovan@ipm.lviv.ua

торами та будують відповідні розрахункові моделі для оцінювання міцності таких композитних матеріалів і на цій основі оптимізують вибір матеріалів для ін'єкційного заліковування тріщин в елементах конструкцій. Результати таких досліджень підсумовано раніше [1].

Коли товщина ін'єкційного матеріалу в тріщині настільки мала, що сумірна з її розкриттям під навантаженням, то його деформація може бути суттєвою і вийти за межі дії закону Гука. Найчастіше ін'єкційними матеріалами є полімери, діаграми розтягу яких нелінійні. Встановимо вплив фізичної нелінійності (нелінійності зв'язку напружень і деформацій) на ефективність "заліковування" дефектів.

**Формулювання задачі.** Розглянемо ізотропну товсту пружну пластину з тонким тріщиноподібним дефектом. Використовуючи ін'єкційні технології для зміцнення тіла, тріщину заповнили ін'єкційним матеріалом, модуль Юнга якого після тверднення  $E_1$ . Вважали, що матеріали матриці і наповнювача ідеально контактують, тобто на поверхні поділу матеріалів  $V$  виконуються умови неперервності переміщень і напружень. Введемо декартову систему координат  $xOy$  так, як зображено на рис. 2. На нескінченності тіло розтягують у напрямку осі  $y$  зусиллями інтенсивності  $p$ .

Нехай діаграма розтягу гладкого зразка із матеріалу заповнювача нелінійна і така, що аналітично криву залежності напружень від деформацій описує співвідношення

$$\sigma_{yy} = f(\varepsilon_{yy}), \quad (1)$$

де  $f$  – деяка неперервна функція.

Деформацію матеріалу заповнювача через малу товщину поверхні  $V$  можна описати виразом

$$\varepsilon_{yy} = [u^*(x)]/h(x), \quad (2)$$

де  $u^*(x)$  – переміщення точок поверхні  $V$  по осі  $y$ ; квадратні дужки означають стрибок функції за переходу через цю поверхню.

Уявно видалимо із тіла ін'єкційний матеріал, замінивши його дію розподілом по поверхні  $V$  напружень

$$\sigma_{yy} = f([u^*(x)]h^{-1}(x)), \quad \sigma_{xy} = 0. \quad (3)$$

Таке подання реакції наповнювача на зовнішнє навантаження розтягом відповідає моделі типу Вінклера, узагальненій для нелінійності.

Розіб'ємо задачу про розтяг тіла з порожниною  $V$  на дві: про розтяг-стиск однорідного (без порожнини) тіла і задачу для тіла із розрізом вздовж відрізка  $[-a, a]$ , до берегів якого прикладені зусилля

$$\sigma_{yy} = f([u^*(x)]h^{-1}(x)) - p, \quad \sigma_{xy} = 0. \quad (4)$$

Оскільки товщина поверхні  $V$  мала, крайові умови знесли з неї на розріз  $[-a, a]$ . Розв'язок першої задачі є тривіальний, тому вважаємо його відомим.

**Інтегральне рівняння та його розв'язок.** Крайову задачу для розрізу із умовами (4) на основі загального розв'язку рівнянь рівноваги плоскої задачі теорії пружності, вираженого через функцію Ері [2], та апарату інтегральних перетворень Фур'є звели до розв'язування нелінійного сингулярного інтегродиференціального рівняння

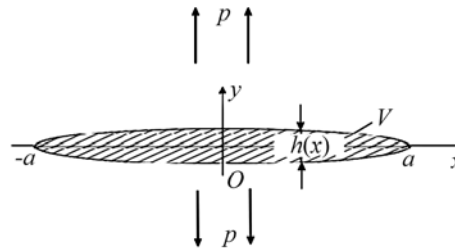


Рис. 2. Схематичне зображення заповненої тріщини і вибір системи координат.

Fig. 2. Filled cracks and selection of the coordinate system (schematically).

$$\int_{-a}^a \frac{u'(t)}{t-x} dt - 2\pi \frac{(1-\nu^2)}{E} \left( f \left( \frac{p}{E} + \frac{2u(x)}{h(x)} \right) - p \right) = 0, \quad (5)$$

де  $E$  – модуль Юнга матриці;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $u(x) = u^*(x) - u_0(x)$ ;  $u_0(x)$  – переміщення поверхні  $V$  в однорідному тілі під дією зовнішніх зусиль.

Коли поверхня  $V$  є еліпсом, можна отримати точний розв'язок рівняння (5) у вигляді

$$u(x) = A\sqrt{a^2 - x^2}, \quad (6)$$

де  $A$  – константа, яку визначаємо із трансцендентного рівняння

$$f \left( \frac{p}{E} + A\beta \right) 2\pi(1-\nu^2) + A\pi E - 2\pi(1-\nu^2)p = 0, \quad \beta = a/6, \quad (7)$$

яке отримуємо, підставивши подання (6) у вираз (4) та виконавши відповідні обчислення.

**Аналіз результатів.** Матеріал заповнювача згідно зі співвідношенням (2) знає деформації

$$\varepsilon_{yy} = \frac{p}{E} + A\beta. \quad (8)$$

Напруження у ньому обчислюємо на основі співвідношень (1), (8)

$$\sigma_{yy} = f \left( \frac{p}{E} + A\beta \right), \quad (9)$$

а коефіцієнт інтенсивності напружень  $K_I$  – за формулою

$$K_I = \frac{E\sqrt{\pi a} A}{2(1-\nu^2)}. \quad (10)$$

Лінійну модель отримуємо, якщо покладемо  $f(\varepsilon_{yy}) = E_1\varepsilon_{yy}$ . Тоді, очевидно,

$$A = 2p(1-\nu^2)(1-\lambda)/(E(1+2\beta\lambda)), \quad (11)$$

деформація матеріалу наповнювача

$$\varepsilon_{yy} = p(1+2\beta)/(E(1+2\beta\lambda)) \quad (12)$$

і коефіцієнт інтенсивності напруження

$$K_I = \frac{(1-\lambda)p\sqrt{\pi a}}{1+2\beta\lambda}. \quad (13)$$

Тут  $\lambda = E_1/E$ .

Якщо  $f(\varepsilon_{yy}) = \begin{cases} E_1\varepsilon_{yy}, & \varepsilon_{yy} \leq \varepsilon_T \\ \sigma_T, & \varepsilon_{yy} > \varepsilon_T \end{cases}$ , то співвідношення (1) описує реакцію на

зовнішні зусилля  $p$  ідеального пружно-пластичного матеріалу наповнювача. Тут  $\sigma_T$  – границя текучості ін'єкційного матеріалу;  $\varepsilon_T$  – деформація на межі текучості. Тоді

$$A = \frac{2(1-\nu^2)(p - \sigma_T)}{E},$$

деформація матеріалу включення

$$\varepsilon_y = (p + 2\beta(p - \sigma_T))E^{-1}, \quad (14)$$

коефіцієнт інтенсивності напружень

$$K_I = (p - \sigma_T)\sqrt{\pi a}. \quad (15)$$

На основі співвідношень (1), (12), (14) побудовані криві, що описують діапазон зміни напружень у порожнинах, заповнених лінійно пружними та нелінійними пружно-пластичними ін'єкційними матеріалами (рис. 3). У розрахунках вважали, що  $p = 2\sigma_T$ .

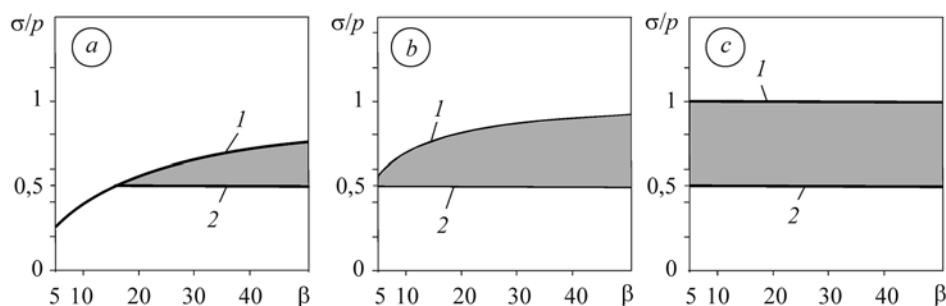


Рис. 3 Напруження у матеріалах наповнювачів, розраховані за лінійно-пружною (криві 1), пружно-пластичною (криві 2) та нелінійно пружно-пластичною (заштрихована зона) моделями:  $a - E_1 / E = 0,03$ ;  $b - 0,1$ ;  $c - 1$ .

Fig. 3 Stresses in the filler materials, calculated by the linear-elastic (curves 1), elasto-plastic (curves 2) and nonlinear elasto-plastic models (dashed region):  $a - E_1 / E = 0.03$ ;  $b - 0.1$ ;  $c - 1$ .

Як бачимо, напруження у дефектах, заповнених пружно-пластичним і пружним матеріалами можуть значно відрізнятись. Ця різниця збільшується із ростом жорсткості матеріалу наповнювача. Здатність матеріалу наповнювача деформуватися нелінійно суттєво впливає на напруження у включенні (рис. 3, інтервал між кривими 1 і 2).

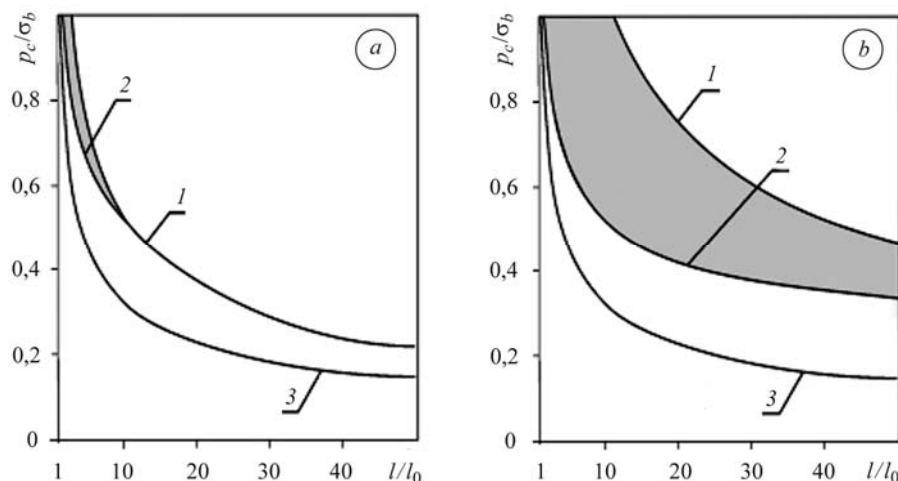


Рис. 4. Граничні навантаження тіла з тріщиноподібним дефектом, заповненим пружними і пружно-пластичними матеріалами: 1 – пружний матеріал; 2 – ідеально пружно-пластичний наповнювач; 3 – незаповнена тріщина;  $l_0 = K_{IC}^2 / \pi\sigma_B^2$ ;  $a - E_1 / E = 0,03$ ;  $b - 0,1$ .

Fig. 4. Boundary loading of a body with a crack-like defect, filled with elastic and elasto-plastic materials: 1 – elastic material; 2 – perfect elasto-plastic filler; 3 – non-filled crack;  $l_0 = K_{IC}^2 / \pi\sigma_B^2$ ;  $a - E_1 / E = 0.03$ ;  $b - 0.1$ .

Порівняно (рис. 4) результати розрахунку граничних навантажень, отриманих на основі критерію Гріффітса–Ірвіна та лінійних і нелінійних моделей деформування матеріалу наповнювача. Вважали, що параметр  $\beta = 10$ . Як бачимо, розбіжність результатів стає значною, коли тріщина малих розмірів, та зі зростанням жорсткості наповнювача.

На основі моделі нелінійного деформування матеріалу, що заповнює тріщину, встановлено суттєвий вплив нелінійності на ступінь зміцнення пошкодженого тріщиною елемента конструкції. Для реального оцінювання ефекту зміцнення тіл цим методом необхідна модель, побудована на основі діаграми розтягу ін'єкційного матеріалу. Розрахунок, що ґрунтується на лінійній залежності між напруженнями і деформаціями, може давати значно завищені оцінки.

*РЕЗЮМЕ.* Построена расчетная модель поврежденного трещиной тела, укрепленного за инъекционными технологиями. Особенностью модели является учет нелинейности в деформировании материала заполнителя. Математически проблема сведена к решению нелинейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения. В предположении что контур дефекта – эллипс получено точное решение интегрального уравнения, одна из констант которого установлена из решения трансцендентного уравнения. Найдены напряжения в материале наполнителя, коэффициенты интенсивности напряжений, предельные нагрузки для тела с “залеченной” инъекционными материалами трещиной, диаграммы растяжений которых изменяются от линейных к нелинейным.

*SUMMARY.* The calculation model of a crack-damaged body strengthened by injection technologies is presented. The distinctive feature of the model is the account of the nonlinearity in the process of the filling material deformation. The mathematical problem is reduced to the solution of the nonlinear singular integro-differential equation. In case of elliptic-shaped contour of a defect the exact solution of the integral equation where one of the constants is established by the solution of transcendental equation is found. Stress values in the filling material, stress intensity factors, boundary loadings for bodies with a crack “healed” by injection materials, which stress-strain diagrams change from linear to nonlinear ones, are found.

1. Маруха В. І., Панасюк В. В., Силованюк В. П. Ін'єкційні технології відновлення роботоздатності пошкоджених споруд тривалої експлуатації. – Львів: Сполом, 2009. – 261 с.
2. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.

*Одержано 05.04.2011*