УДК 539.3

ПРУЖНЕ ЕЛІПСОЇДАЛЬНЕ ТЕПЛОПРОВІДНЕ ВКЛЮЧЕННЯ У ТІЛІ ЗА ДІЇ ТЕПЛОВОГО ПОТОКУ НА БЕЗМЕЖНОСТІ

М. М. СТАДНИК

Національний лісотехнічний університет України, Львів

Одержано точний аналітичний розв'язок системи чотирьох сингулярних інтегродиференціальних рівнянь, до якої зведена тривимірна термопружна задача для тіла з теплопровідним пружним еліпсоїдальним включенням. Вважали, що на безмежності тіла діє однорідний тепловий потік, перпендикулярний до серединної площини включення. В результаті виписані формули для обчислення концентрації напружень біля включення та напружень у ньому, а також відповідних коефіцієнтів інтенсивності напружень K_{II} і K_{III}. Проаналізовано вплив конфігурації включення на концентрацію та інтенсивність напружень для деяких часткових випадків задачі.

Ключові слова: *система інтегродиференціальних рівнянь, теплопровідне пружне включення, тепловий потік.*

Базовими параметрами для вивчення міцності та довговічності тіл з пружними включеннями за дії температурного поля є коефіцієнти концентрації та інтенсивності напружень для відповідних термопружних задач. Термопружні задачі для жорсткого пластинчастого еліптичного включення, коли на його поверхні підтримується постійна температура або на безмежності тіло знаходиться під дією рівномірного теплового потоку, який направлений паралельно чи перпендикулярно до площини включення, досліджені і встановлено КІН K_{I} [1–3]. Нижче розв'язано термопружну задачу і знайдено концентрацію напружень та відповідні КІН K_{II} і K_{III} для теплопровідного пружного еліпсоїдального включення у тілі за дії теплового потоку на безмежності, напрямок якого перпендикулярний до серединної площини включення.

Формулювання задачі і її розв'язок. Розглянемо тривимірне ізотропне тіло, в якому виберемо систему прямокутних декартових координат $Oxyz$. У тілі розміщено пружне ($0 \le \varepsilon = G_1 / G < \infty$, G_1, G – модулі зсуву включення та матриці відповідно) тонке включення, обмежене гладкою поверхнею $z = \pm h = \pm c\sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}$ ($\max h << d$; $\rho << d$; d – найменше значення діаметра серединної площини включення S; ρ – радіус заокруглення його вершини).

На безмежності на тіло діє тепловий потік інтенсивністю $q = \mathrm{const}$, який направлений перпендикулярно до серединної S площини включення $z = 0$. Вважають, що на поверхні з'єднання матриця–включення існують ідеальний механічний і тепловий контакти. Задача полягає у визначенні термічних напружень у включенні та матриці біля нього. Користуючись відомим результатом [4], зведемо її до розв'язку такої системи сингулярних інтегродиференціальних рівнянь

$$\frac{2+\varepsilon d_3}{4\pi\varepsilon d_1}\Delta\iint_S\left[\tilde{u}_{\lambda_i}\right]_* R^{-1} d\xi d\eta + \frac{2\mu+\varepsilon d_3}{4\pi\varepsilon d_1}\frac{\partial}{\partial\lambda_{3-i}}\iint_S\left(\left[\tilde{u}_{\lambda_{3-i}}\right]_*\frac{\partial R^{-1}}{\partial\lambda_i} - \left[\tilde{u}_{\lambda_i}\right]_*\frac{\partial R^{-1}}{\partial\lambda_{3-i}}\right) d\xi d\eta +$$

Контактна особа: М. М. СТАДНИК, e-mail: nltu@ukr.net

$$+\frac{\varepsilon\kappa-2d_3}{8\pi G_1 d_1}\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\iint_S\frac{[\tilde{\sigma}_{zz}]_*}{R}d\xi d\eta-\frac{\left[\tilde{u}_{\lambda_i}\right]_*}{h}=\frac{\alpha d_2(2-\varepsilon)}{4\pi\varepsilon d_1}\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\iint_S\frac{[T]_*}{R}d\xi d\eta+$$
$$+\frac{\partial\left(u_z^0\right)_*}{\partial\lambda_i}+\frac{\left[u_{\lambda_i}^0\right]_*}{h}-\frac{\left(\sigma_{z\lambda_i}^0\right)_*}{G_1};$$

$$-\frac{\kappa}{8\pi d_1 G}\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\iint_S\frac{[\tilde{\sigma}_{zz}]_*}{R}d\xi d\eta-\frac{d_3}{4\pi d_1}\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\iint_S\left(\left[\tilde{u}_{\lambda_i}\right]_*\frac{\partial R^{-1}}{\partial\lambda_i}+\left[\tilde{u}_{\lambda_{3-i}}\right]_*\frac{\partial R^{-1}}{\partial\lambda_{3-i}}\right)d\xi d\eta+$$
$$+\frac{\left[\tilde{u}_{\lambda_i}\right]_*}{h}+\frac{1}{G_1 h}\int_{-a_i}^{\lambda_i}\left[\tilde{\sigma}_{zz}^{(\lambda_i)}\right]_*d\lambda_i=\frac{\alpha d_2}{4\pi d_1}\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\iint_S\frac{[T]_*}{R}d\xi d\eta- \qquad (1)$$
$$-\frac{\partial\left(u_z^0\right)_*}{\partial\lambda_i}-\frac{\left[u_{\lambda_i}^0\right]_*}{h}-\frac{1}{G_1 h}\int_{-a_i}^{\lambda_i}\left[\sigma_{zz}^{0(\lambda_i)}\right]_*d\lambda_i+A_3^{(i)}(\lambda_i),$$
$$(x,y)\in S;\ z=0;\ i=1,2;\ \lambda_1=x;\ \lambda_2=y;\ a_1=a;\ a_2=b$$

відносно стрибків вектора збурених переміщень $[\vec{\tilde{u}}]_*$ та тензора напружень $[\hat{\tilde{\sigma}}]_*$. Тут S – еліптична область $x^2/a^2+y^2/b^2\le 1$; $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$; $(A)_*$, $[A]_*$ – відповідно сума і різниця величини A на поверхнях включення $\pm h$; $R=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$; $A_3^{(i)}(\lambda_i)$ – довільні функції, які підлягають визначенню; $T=T_0+\tilde{T}$; $T_0=qz/\lambda_0$ – температура у суцільному тілі; λ_0 – коефіцієнт теплопровідності матриці; α – коефіцієнт теплового розширення матриці; $\tilde{T}$ – збурене температурне поле у тілі; $d_1=1-\mu$; $d_2=1+\mu$; $d_3=1-2\mu$; $\kappa=3-4\mu$; μ – коефіцієнт Пуассона матриці; $\vec{u}^0$, $\hat{\sigma}^0$ – відповідно вектор зміщень і тензор напружень у суцільному тілі; $\vec{u}=\vec{\tilde{u}}+\vec{u}^0$; $\hat{\sigma}=\hat{\tilde{\sigma}}+\hat{\sigma}^0$.

Стрибок температури $[T]_*$ визначаємо із рівняння, яке з урахуванням гармонічності та лінійної залежності температури T від висоти включення, набуває вигляду [4]

$$-\frac{2\pi\lambda_b}{h\lambda_0}[T]_*+\Delta\iint_S\frac{[T]_*d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}=-\frac{4\pi q}{\lambda_0}, \qquad (2)$$

тобто

$$[T]_*=2qb\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}\,/\left(\lambda_0 E(k)+\lambda_b\lambda\right);\ [T_0]_*=[T]_*\big|_{\lambda_b=\lambda_0};$$
$$k^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}. \qquad (3)$$

Тут λ_b – коефіцієнт теплопровідності включення; $\lambda=b/c$; $E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$.

Розв’язок рівнянь (1) подамо у вигляді

$$\left[\tilde{u}_x\right]_*=C_1x\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2};\quad \left[\tilde{u}_y\right]_*=C_2y\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2};$$

$$\left[\tilde{\sigma}_{zz}^{(x)}\right]_{*}=C_3\frac{\partial}{\partial x}\left(x\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}\right); \qquad (4)$$

$$\left[\tilde{\sigma}_{zz}^{(y)}\right]_{*}=C_4\frac{\partial}{\partial y}\left(y\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}\right); \qquad \left[\tilde{\sigma}_{zz}\right]_{*}=\left[\tilde{\sigma}_{zz}^{(x)}\right]+\left[\tilde{\sigma}_{zz}^{(y)}\right],$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 – невідомі сталі величини.

Підставивши вирази (4) у рівняння (1), отримуємо формули

$$C_1=\frac{1}{\Delta_1}\left[\left(\frac{N_1F_5(k)}{b}+\frac{3bF_3(k)}{a^2\varepsilon}+\frac{1}{c}+\frac{N_2Q_8}{b\Delta_0}\right)\left(\frac{b^2F_1(k)R_2}{a^2}-\frac{N_2bR_3Q_6}{a^2\Delta_0}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{N_2bQ_5}{a^2\Delta_0}+\frac{N_3bF_3(k)}{a^2}\right)\left(F_2(k)R_2-\frac{N_2R_3Q_9}{b\Delta_0}\right)\right];$$

$$C_2=\frac{1}{\Delta_1}\left[\left(\frac{N_1bF_4(k)}{a^2}+\frac{3F_3(k)}{b\varepsilon}+\frac{1}{c}+\frac{N_2bQ_4}{a^2\Delta_0}\right)\left(F_2(k)R_2-\frac{N_2R_3Q_9}{b\Delta_0}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{N_2Q_7}{b\Delta_0}+\frac{N_3F_3(k)}{b}\right)\left(\frac{b^2F_1(k)R_2}{a^2}-\frac{N_2bR_3Q_6}{a^2\Delta_0}\right)\right];$$

$$C_3=\frac{1}{G\Delta_0}\left[C_1\left(\left(\frac{3bF_4(k)}{a^2d_1}+\frac{3F_3(k)}{b}\right)\left(\frac{3d_3F_5(k)}{2d_1b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{9d_3\mu}{2d_1^2a^2}F_3^2(k)\right)+\right.$$
$$+\frac{3bF_3(k)}{a^2d_1}C_2\left(\frac{\mu}{c}-\frac{3d_3F_5(k)}{2b}-\frac{3bd_3F_3(k)}{2a^2}\right)+ \qquad (5)$$
$$\left.+R_3\left(\frac{3d_3b}{2d_1a^2}\left(F_2(k)F_3(k)-F_1(k)F_5(k)\right)-\frac{b^2F_1(k)}{a^2c}\right)\right];$$

$$C_4=\frac{1}{G\Delta_0}\left[\frac{3F_3(k)}{bd_1}C_1\left(\frac{\mu}{c}-\frac{3d_3bF_4(k)}{2a^2}-\frac{3d_3F_3(k)}{2b}\right)+\right.$$
$$+C_2\left(\left(\frac{3F_5(k)}{bd_1}+\frac{3bF_3(k)}{a^2}\right)\left(\frac{3bd_3F_4(k)}{2d_1a^2}+\frac{1}{c}\right)-\frac{9d_3\mu}{2d_1^2a^2}F_3^2(k)\right)+$$
$$\left.+R_3\left(\frac{3d_3b}{2d_1a^2}\left(F_1(k)F_3(k)-F_2(k)F_4(k)\right)-\frac{F_2(k)}{c}\right)\right]$$

для обчислення C_1, C_2, C_3, C_4.

Тут

$$N_1=\frac{3(2+\varepsilon d_3)}{2\varepsilon d_1}; \quad N_2=\frac{3(\varepsilon\kappa-2d_3)}{4G\varepsilon d_1}; \quad N_3=\frac{3(2\mu+\varepsilon d_3)}{2\varepsilon d_1};$$

$$F_3(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}d\theta; \quad F_4(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4\theta d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}; \quad F_5(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^4\theta d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}};$$

$$R_1=\frac{\alpha d_2q}{d_1\lambda_0}\left(\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon\left(E(k)+\lambda\right)}-\frac{1}{E(k)+\lambda_b\lambda/\lambda_0}\right);$$

$$R_2 = \frac{\alpha d_2 q}{d_1 \lambda_0}\left(\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon\left(E(k)+\lambda_b \lambda / \lambda_0\right)} - \frac{1}{E(k)+\lambda} \right);$$

$$R_3 = \frac{2\alpha d_2 q}{d_1 \lambda_0}\left(\frac{1}{E(k)+\lambda_b \lambda / \lambda_0} - \frac{1}{E(k)+\lambda} \right);$$

$$\Delta_0 = \frac{1}{G^2}\left[\left(\frac{3bd_3}{2d_1 a^2} F_4(k) + \frac{1}{c} \right)\left(\frac{3d_3}{2d_1 b} F_5(k) + \frac{1}{c} \right) - \left(\frac{3d_3}{2d_1 a} F_3(k) \right)^2 \right];$$

$$\Delta_1 = \left(\frac{bN_1 F_4(k)}{a^2} + \frac{3F_3(k)}{b\varepsilon} + \frac{1}{c} + \frac{bN_2 Q_4}{a^2 \Delta_0} \right)\left(\frac{N_1 F_5(k)}{b} + \frac{3bF_3(k)}{a^2 \varepsilon} + \frac{1}{c} + \frac{N_2 Q_8}{b\Delta_0} \right) -$$

$$-\left(\frac{N_3 F_3(k)}{b} + \frac{N_2 Q_7}{b\Delta_0} \right)\left(\frac{bN_3 F_3(k)}{a^2} + \frac{bN_2 Q_5}{a^2 \Delta_0} \right);$$

$$Q_4 = \frac{1}{Gc}\left(F_4(k)\left(\frac{3b}{a^2 d_1} F_4(k) + \frac{3}{b} F_3(k) \right) + \frac{3\mu}{d_1 b} F_3^2(k) \right) +$$

$$+\frac{3d_3}{2Gd_1 b}\left(\frac{3b}{a^2 d_1} F_4(k) + \frac{3}{b} F_3(k) \right)\left(F_4(k) F_5(k) - F_3^2(k) \right);$$

$$Q_5 = \frac{1}{Gc}\left(\frac{3b\mu}{a^2 d_1} F_3(k) F_4(k) + \frac{3F_5(k) F_3(k)}{d_1 b} + \frac{3b}{a^2} F_3^2(k) \right) +$$

$$+\frac{9d_3 \mu}{2Gd_1^2 a^2} F_3(k)\left(F_4(k) F_5(k) - F_3^2(k) \right);$$

$$Q_6 = -\frac{1}{Gc}\left(\frac{b^2}{a^2} F_1(k) F_4(k) + F_2(k) F_3(k) \right) + \frac{3bd_3}{2Gd_1 a^2} F_1(k)\left(F_3^2(k) - F_4(k) F_5(k) \right);$$

$$F_1(k) = F_4(k) + F_3(k); \qquad F_2(k) = F_5(k) + F_3(k);$$

$$Q_7 = \frac{1}{Gc}\left(\frac{3\mu}{d_1 b} F_3(k) F_5(k) + \frac{3b}{a^2 d_1} F_3(k) F_4(k) + \frac{3}{b} F_3^2(k) \right) + \qquad (6)$$

$$+\frac{9\mu d_3}{2Gd_1^2 a^2} F_3(k)\left(F_4(k) F_5(k) - F_3^2(k) \right);$$

$$Q_8 = \frac{1}{Gc}\left(F_5(k)\left(\frac{3}{d_1 b} F_5(k) + \frac{3b}{a^2} F_3(k) \right) + \frac{3b\mu}{a^2 d_1} F_3^2(k) \right) +$$

$$+\frac{3bd_3}{2Gd_1 a^2}\left(\frac{3}{d_1 b} F_5(k) + \frac{3b}{a^2} F_3(k) \right)\left(F_4(k) F_5(k) - F_3^2(k) \right);$$

$$Q_9 = -\frac{1}{Gc}\left(\frac{b^2}{a^2} F_1(k) F_3(k) + F_2(k) F_5(k) \right) + \frac{3bd_3}{2Gd_1 a^2} F_2(k)\left(F_3^2(k) - F_4(k) F_5(k) \right);$$

$$A_3^{(1)}(x) = -\frac{\alpha d_2}{2\pi d_1 \varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \frac{[T_0]_*}{R} d\xi d\eta; \quad A_3^{(2)}(y) = -\frac{\alpha d_2}{2\pi d_1 \varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \iint_S \frac{[T_0]_*}{R} d\xi d\eta.$$

Перейшовши у співвідношеннях (5) до границі $\varepsilon \to 0$ або $\varepsilon \to \infty$, одержимо результати для еліпсоїдальної теплопровідної порожнини або еліпсоїдального теплопровідного абсолютно жорсткого включення, відповідно. Якщо у формулах (5) перейти спочатку до границі $\varepsilon \to 0$, а потім – до $c \to 0$ і покласти $\lambda_b = 0$, то одержимо відомий [5] розв'язок для еліптичної термоізольованої тріщини. Очевидно, що коли матеріали матриці і включення однакові ($\varepsilon = 1$; $\lambda_b = \lambda_0$), то із виразів (5) матимемо, що $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$.

На основі результатів праці [4] та виразів (4), (5) для визначення нормальних і дотичних напружень на поверхні з'єднання матриці–включення $\pm h$ одержимо співвідношення

$$\left[\tilde{\sigma}_{zz}\right]_* = \left(C_3 + C_4\right)\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \left(\frac{C_3 x^2}{a^2} + \frac{C_4 y^2}{b^2}\right) / \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,; \qquad (7)$$

$$\sigma_{zx} = \frac{3x}{2d_1 b}\left[\frac{d_3 b^2}{2a^2}(C_3 F_4(k) + C_4 F_3(k)) - GC_1\left(\frac{b^2}{a^2}F_4(k) + d_1 F_3(k)\right) - \frac{\mu G b^2 C_2}{a^2}F_3(k)\right];$$

$$\sigma_{zy} = \frac{3y}{2d_1 b}\left[\frac{d_3}{2}(C_3 F_3(k) + C_4 F_5(k)) - GC_2\left(F_5(k) + \frac{b^2 d_1}{a^2}F_3(k)\right) - \mu G C_1 F_3(k)\right],$$

$$(x, y) \in S\,.$$

Встановлено, що найбільшого значення напруження σ_{zx} і σ_{zy} досягають на контурі області *S*, тобто відшарування включення від матриці (якщо воно відбувається) починається з його вершини, а у центрі включення рівні нулю.

Користуючись рухомою локальною прямокутною системою координат $O_1 ntz$ з початком на контурі області S, матимемо асимптотичні подання для стрибків зміщень та напружень у малому околі межі еліпса

$$\left[\tilde{u}_x\right]_* = C_1\sqrt{-2f(\varphi)na/b}\ \cos\varphi + O(n)\,; \quad \left[\tilde{u}_y\right]_* = C_2\sqrt{-2f(\varphi)nb/a}\ \sin\varphi + O(n)\,;$$

$$\begin{aligned}\left[\tilde{\sigma}_{zz}\right]_* = {}&\left(C_3 + C_4\right)\sqrt{-2nf(\varphi)/(ab)} - \left(C_3\cos^2\varphi + \right.\\ &\left.+ C_4\sin^2\varphi\right)\sqrt{-ab/\left(2nf(\varphi)\right)} + O(n),\end{aligned} \qquad (8)$$

де нехтуємо доданки порядку $O(n)$, $f(\varphi) = \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}$, $O_1 n$ – зовнішня нормаль до контуру області S; φ – кут, що визначає параметричні координати точок еліпса ($x^2/y^2 + y^2/b^2 = 1$; $|n| << a, b$).

Формули переходу для зміщень і напружень у системі координат $O_1 ntz$ матимуть вигляд

$$\left[\tilde{u}_n\right]_* = \left[\tilde{u}_x\right]_*\cos\theta + \left[\tilde{u}_y\right]_*\sin\theta\,; \ \left[\tilde{u}_t\right]_* = -\left[\tilde{u}_x\right]_*\sin\theta + \left[\tilde{u}_y\right]_*\cos\theta\,; \qquad (9)$$

$$\left[\tilde{\sigma}_{zz}^{(n)}\right]_* = \left[\tilde{\sigma}_{zz}\right]_*\cos(\theta - \varphi)\,; \ \left[\tilde{\sigma}_{zz}^{(t)}\right]_* = \left[\tilde{\sigma}_{zz}\right]_*\sin(\varphi - \theta)\,,$$

де $\left[\tilde{\sigma}_{zz}^{(n)}\right]_*$ і $\left[\tilde{\sigma}_{zz}^{(t)}\right]_*$ – напруження, вектори згинних моментів яких перпендикулярні до площин $t = 0$ і $n = 0$, відповідно; θ – кут між додатними напрямами осей Ox і $O_1 n$; $\cos\theta = b\cos\varphi / f(\varphi)$; $\sin\theta = a\sin\varphi / f(\varphi)$.

На основі виразів (8), (9) одержимо:

$$
\begin{aligned}
&[\tilde{u}_n]_* = \left(C_1\cos^2\varphi + C_2\sin^2\varphi\right)\sqrt{-2nab/f(\varphi)} + O(n);\\
&[\tilde{u}_t]_* = \left(-C_1a^2 + C_2b^2\right)\sin 2\varphi\sqrt{-n/\left(2abf(\varphi)\right)} + O(n);\\
&[\tilde{\sigma}_{zz}^{(n)}]_* = \left(b\cos^2\varphi + a\sin^2\varphi\right)\Big[\left(C_3 + C_4\right)\sqrt{-2n/\left(abf(\varphi)\right)} -\\
&-\left(C_3\cos^2\varphi + C_4\sin^2\varphi\right)\sqrt{-ab/\left(2nf^3(\varphi)\right)}\Big] + O(n);\\
&[\tilde{\sigma}_{zz}^{(t)}]_* = (b-a)\sin 2\varphi\Big[\left(C_3 + C_4\right)\sqrt{-2n/\left(abf(\varphi)\right)} -\\
&-\left(C_3\cos^2\varphi + C_4\sin^2\varphi\right)\sqrt{-ab/\left(2nf^3(\varphi)\right)}\Big]/2 + O(n).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Користуючись поданнями (10) і результатами праці [4], матимемо формули

$$
\begin{aligned}
&K_{\mathrm{II}}(\lambda) = \frac{\sqrt{\pi ab}}{2d_1\sqrt{f(\varphi)}}\Big[G\left(C_1\cos^2\varphi + C_2\sin^2\varphi\right) -\\
&\quad -\frac{d_3}{2f(\varphi)}\left(b\cos^2\varphi + a\sin^2\varphi\right)\left(C_3\cos^2\varphi + C_4\sin^2\varphi\right)\Big];\\
&K_{\mathrm{III}}(\lambda) = \frac{\sqrt{\pi ab}}{4\sqrt{f(\varphi)}}\sin 2\varphi\Big[G\left(-C_1\frac{a}{b} + C_2\frac{b}{a}\right) -\\
&\quad -\frac{d_3(b-a)}{2f(\varphi)d_1}\left(C_3\cos^2\varphi + C_4\sin^2\varphi\right)\Big],
\end{aligned}
\tag{11}
$$

щоб обчислити КІН $K_{\mathrm{II}}(\lambda)$ і $K_{\mathrm{III}}(\lambda)$ для еліптичної тріщини, на берегах $z = \pm 0$ якої діють напруження, знесені із поверхонь $z = \pm h$ пружного теплопровідного еліпсоїдального включення. Очевидно, що для сфероїдального ($a = b$) включення $K_{\mathrm{III}}(\lambda) = 0$ для будь-якого значення φ. Якщо у формулах (11) перейти спочатку до границі $c \to 0$, то тоді, як це випливає із виразів (5), $\lim\limits_{c\to 0} K_{\mathrm{II}}(\lambda) = = K_{\mathrm{II}} = 0$; $\lim\limits_{c\to 0} K_{\mathrm{III}}(\lambda) = K_{\mathrm{III}} = 0$ для пружного включення, де K_{II} і K_{III} – загальноприйняті позначення КІН.

Якщо у виразах (11) перейти спочатку до границі $\varepsilon \to 0$, то одержимо КІН $K_{\mathrm{II}}(\lambda)$ і $K_{\mathrm{III}}(\lambda)$ для еліптичної тріщини, на берегах $z = \pm 0$ якої діють напруження, знесені із поверхонь $z = \pm h$ еліпсоїдальної теплопровідної порожнини. Перейшовши у поданнях (11) послідовно до границі $\varepsilon \to 0$, $c \to 0$ і поклавши $\lambda_b = 0$, одержимо відомі [5] КІН $K_{\mathrm{II}}(\lambda)$ і $K_{\mathrm{III}}(\lambda)$ для термоізольованої еліптичної тріщини.

Якщо у виразах (11) перейти спочатку до границі $\varepsilon \to \infty$, то одержимо $K_{\mathrm{II}}(\lambda)$ і $K_{\mathrm{III}}(\lambda)$ для еліптичної тріщини, на поверхнях $z = \pm 0$ якої діють напруження, знесені з поверхонь $z = \pm h$ еліпсоїдального абсолютно жорсткого теплопровідного включення. Для пластинчастого ($c \to 0$) абсолютно жорсткого ($\varepsilon \to \infty$) термоізольованого [3] ($\lambda_b = 0$) чи теплопровідного ($\lambda_b \neq 0$) включення величини $K_{\mathrm{II}} = K_{\mathrm{III}} = 0$, що випливає із виразів (5), (11).

Для визначення концентрації напружень σ_{zn} і σ_{zt} у матриці в околі включення використаємо співвідношення [4]

$$\sigma_{zn} = 2nK_{\mathrm{II}}(\lambda)/\sqrt{\pi(\rho+2n)^3} + \tilde{\sigma}_{zn}(0)\rho\sqrt{\rho}/(\rho+2n)^3;$$

$$\sigma_{zt} = K_{\mathrm{III}}(\lambda)/\sqrt{\pi(\rho+2n)},\ \rho = bf(\varphi)/\left(a\lambda^2\right), \tag{12}$$

де $\tilde{\sigma}_{zn}(0)$ – збурені дотичні напруження на контурі області S.

Дослідження першої формули (12) на екстремум показує, що найбільшого значення σ_{zn} досягають для $n = \rho\left(2K_{\mathrm{II}}(\lambda) - 3\tilde{\sigma}_{zn}(0)\sqrt{\pi\rho}\right)/\left(2K_{\mathrm{II}}(\lambda)\right)$, яке залежить від пружних та геометричних параметрів включення. У конкретному випадку, за необхідності, це значення n можна завжди обчислити, використовуючи вирази (7), (11). Вважаючи, що у поданнях (12) $n = 0$, $\rho > 0$, на основі (7), (11) і умови рівності контактних напружень на контурі області S одержимо формули

$$\sigma_{zn} = \frac{3a}{2d_1 f(\varphi)}\left\{\left[\frac{d_3 b^2}{2a^2}\left(C_3F_4(k) + C_4F_3(k)\right) - C_1G\left(\frac{b^2}{a^2}F_4(k) + d_1F_3(k)\right) - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{\mu G b^2 C_2}{a^2}F_3(k)\right]\cos^2\varphi + \left[\frac{d_3}{2}\left(C_3F_3(k) + C_4F_5(k)\right) - \right. \tag{13}$$
$$\left.\left. - C_2\,G\left(F_5(k) + \frac{b^2 d_1}{a^2}F_3(k)\right) - \mu G C_1 F_3(k)\right]\sin^2\varphi\right\};$$

$$\sigma_{zt} = \frac{ab\sin 2\varphi}{4cf(\varphi)}\left[G\left(-\frac{a}{b}C_1 + \frac{b}{a}C_2\right) - \frac{d_3(b-a)}{2f(\varphi)d_1}\left(C_3\cos^2\varphi + C_4\sin^2\varphi\right)\right],$$

які служать для обчислення напружень у матриці на контурі S біля пружного еліпсоїдального включення. Для сфероїдального ($a = b$) включення ($C_1 = C_2$, $C_3 = C_4$) формули (13) значно спрощуються і набувають вигляду

$$\sigma_{zn} = \frac{3\pi}{16d_1}\left(d_3C_3 - 2C_1G\right), \qquad \sigma_{zt} = 0. \tag{14}$$

Підставляючи у вирази (13) величини C_1, C_2, C_3, C_4 для $\varepsilon = 0$ або $\varepsilon \to \infty$, матимемо відповідні подання для обчислення напружень σ_{zn} і σ_{zt} у матриці біля еліпсоїдальної порожнини або еліпсоїдального абсолютно жорсткого включення.

Якщо для визначення контактних напружень ($n = 0$) на контурі області S, коли $c << a, b$, використати відоме [6] подання $\tilde{\sigma}_{zn}(0) = K_{\mathrm{II}}(\lambda)/\sqrt{\pi\rho}$, що не забезпечує їх рівності, то на основі виразів (12) при $n = 0$ матимемо:

$$\sigma_{zn} = K_{\mathrm{II}}(\lambda)/\sqrt{\pi\rho}, \tag{15}$$

де $K_{\mathrm{II}}(\lambda)$ подаємо виразом (11).

Підставляючи C_1, C_2, C_3, C_4 із співвідношень (5) при $\varepsilon \to 0$, $c \to 0$, $\lambda_b = 0$ у формулу (15) і спрямовуючи $\rho \to 0$, одержимо, що $\sigma_{zn} \to \infty$, тобто матимемо результат для тріщини.

Якщо у виразах (7), (11), (13) перейти до границі $a \to \infty$, то за відповідних значень кута φ матимемо подання для тунельного еліптичного пружного теплопровідного включення, тобто розв'язок плоскої і антиплоскої задач.

РЕЗЮМЕ. Получено точное аналитическое решение системы четырех сингулярных интегродифференциальных уравнений, к которой сведена трехмерная термоупругая задача для тела с теплопроводным упругим эллипсоидальным включением. Считали, что на бесконечности тела действует однородный тепловой поток, перпендикулярный к срединной плоскости включения. В результате выписаны формулы для вычисления концентрации напряжений возле включения и напряжений в нем, а также соответствующих коэффициентов интенсивности напряжений K_{II} и K_{III}. Проанализировано влияние конфигурации включения на концентрацию и интенсивность напряжений для некоторых частных случаев задачи.

SUMMARY. The exact analytical solution of a system of four singular integro-differential equations, to which a three-dimensional thermoelastic problem for a body with a thermal conductive elastic ellipsoidal inclusion is reduced, has been obtained. It is considered, that a homogenous heat flow, which is perpendicular to the middle plane of the inclusion, acts at the infinity of a body. As a result, the formulae for evaluation of stress concentrations at the inclusion and stresses in it as well as the corresponding stress intensity factors K_{II} and K_{III} have been written. The influence of the inclusion configuration on the concentration and intensity of stresses has been analyzed for some partial cases of the problem.

1. *Подильчук Ю. Н., Добривечер В. В.* О термонапряженном состоянии трансверсально-изотропного тела с жестким эллиптическим включением // Прикл. механика. – 1996. – № 1. – С. 11–17.
2. *Подильчук Ю. Н., Добривечер В. В.* О термонапряженном состоянии трансверсально-изотропного тела с жестким эллиптическим включением, подверженном действию равномерного теплового потока в плоскости включения // Там же. – 1996. – № 8. – С. 31–39.
3. *Пассос Моргадо А. Х., Пивник Я., Подильчук Ю. Н.* Распределение напряжений в бесконечном трансверсально-изотропном теле с жестким эллиптическим включением в равномерном тепловом потоке // Там же. – 1995. – № 11. – С. 3–10.
4. *Стадник М. М.* Метод розв’язування тривимірних термопружних задач для тіл з тонкими включеннями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1994. – **30**, № 6. – С. 30–40.

   (*Stadnyk M. M.* A Method for the Solution of Three-Dimensional Thermoelasticity Problems for Bodies with Thin Inclusions // Materials Science. – 1994. – **30**, № 6. – P. 643–652.)
5. *Стадник М. М.* Еліптична тріщина у просторі під дією теплового потоку на безмежності // Там же. – 2010. – **46**, № 3. – С. 38–41.

   (*Stadnyk M. M.* Elliptic Crack in a Space under the Action of a Heat Flow at Infinity // Materials Science. – 2010. – **46**, № 3. – P. 325–329.)
6. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.

Одержано 27.09.2010