УДК 539.375

КРАЙОВА НЕРАДІАЛЬНА ТРІЩИНА У КРУГОВОМУ ДИСКУ

О. П. ДАЦИШИН, І. А. РУДАВСЬКА

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Одержано сингулярне інтегральне рівняння задачі про напружено-деформований стан кругового диска, послабленого крайовою прямолінійною нерадіальною тріщиною, на берегах якої діє довільне самозрівноважене навантаження. Для рівномірно розподіленого тиску на берегах тріщини обчислено коефіцієнти інтенсивності напружень залежно від орієнтації та довжини тріщини.

Ключові слова: *круговий диск, нерадіальна крайова тріщина, сингулярне інтегральне рівняння, коефіцієнти інтенсивності напружень.*

Розв'язки задач про напружено-деформований стан кругового диска, послабленого розрізами (тріщинами), важливі і як фундаментальні, серед задач математичної теорії тріщин, і як прикладні, зокрема, для прогнозування міцності та довговічності елементів трибоспряжень, насамперед тіл кочення. Тут потрібно знати коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) у вершинах тріщин. Щодо крайових радіальних тріщин, то в літературі вже є багато результатів, отриманих різними підходами і з різною точністю. Їх наведено у довідниках [1–3], а розв'язки задач і детальний аналіз КІН для диска з тріщинами подано в монографіях [4, 5]. Результати для диска з крайовою радіальною тріщиною одержано переважно для двох випадків симетричного навантаження: коли диск піддано всебічному розтягу (на протилежних берегах тріщини діє рівномірно розподілений тиск), а також позацентровому розтягу симетрично до лінії тріщини зосередженими силами. Низку задач для крайових і внутрішніх тріщин вздовж діаметра диска методом сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) розглядав Л. Л. Лібацький [6, 7], використовуючи для їх числового розв'язування метод колокацій, а також враховуючи тип особливості напружень у вершинах тріщин. Розв'язки задач (визначення КІН) про позацентровий розтяг кругового диска з радіальною крайовою тріщиною пов'язані із розробленням зразків для експериментального визначення характеристик тріщиностійкості матеріалів [8]. Детально ці дослідження описано раніше [3].

Числові результати за рівномірно розподіленого тиску на берегах крайової радіальної тріщини в диску наведено в монографії [4]. Їх отримано шляхом числового розв'язування СІР методом механічних квадратур. Р.Д. Ґреґорі [9] навів точний аналітичний розв'язок такої задачі. Однак і досі в літературі нема даних про КІН для нерадіальної крайової тріщини в диску, які мають фундаментальне значення для механіки руйнування, подібно, як і КІН для півплощини з крайовою тріщиною. Нижче на основі методу СІР [4, 5] розв'язано таку задачу.

Формулювання задачі. Розглянемо круговий диск радіуса R з центром у початку системи координат xOy (рис. 1). Диск послаблений крайовою прямолінійною тріщиною довжиною l, гирло якої розташоване на краю диска в точці $z=-R$ ($z=x+iy$). Тріщина нахилена до діаметра диска під кутом α. В гирлі тріщини розмістимо центр локальної системи координат $x_1O_1y_1$, вісь абсцис O_1x_1 якої сумісти-

Контактна особа: О. П. ДАЦИШИН, e-mail: datsyshy@ipm.lviv.ua

мо з лінією тріщини. На верхньому (+) і нижньому (–) берегах тріщини діє довільне самозрівноважене навантаження $p(x_1)$:

$$\sigma^{\pm}(x_1, 0) - i\tau^{\pm}(x_1, 0) = p(x_1), \quad 0 \le x_1 < l. \qquad (1)$$

До такої задачі методом суперпозиції зводять задачі про диск з тріщиною, коли в площині диска у внутрішніх точках або на його контурі діє довільна система зусиль за умови, що їх головний вектор і момент рівні нулю.

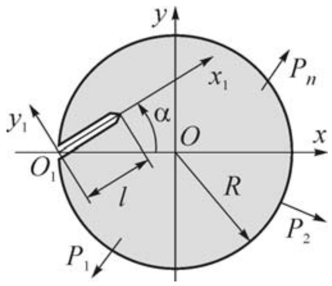

Рис. 1. Схема задачі.

Fig. 1. The scheme of the problem.

На основі СІР для системи довільно розташованих прямолінійних тріщин у круговому диску [4] отримаємо СІР поставленої задачі відносно похідної від розриву переміщень $g'(\xi)$ вздовж лінії тріщини. Запишемо це рівняння у зручній для розрахунків формі, використовуючи безрозмірні координати $\xi = t_1/l$, $\eta = x_1/l$ $(0 \le x_1,\ t_1 < l)$:

$$\int_0^1 \left[g'(\xi)\, R(\xi,\eta) + \overline{g'(\xi)}\, S(\xi,\eta) \right] d\xi = \pi P(\eta)\,,\ 0 \le \eta < 1, \qquad (2)$$

де

$$R(\xi,\eta) = \frac{\lambda e^{i\alpha}}{2} \left[\frac{1}{T - X} + \frac{e^{-2i\alpha}}{\overline{T} - \overline{X}} - \frac{\overline{T}^2 X}{1 - \overline{T}X} - \frac{\overline{T} - 2\overline{X} + \overline{X}^2 T}{\left(1 - \overline{X}T\right)^2} - \right.$$

$$\left. - e^{-2i\alpha} \frac{2X(T\overline{T} - 1) + (\overline{X} + \overline{T})(\overline{X}T - 3)T^2 + 4T}{(1 - \overline{X}T)^3} \right]; \qquad (3)$$

$$S(\xi,\eta) = \frac{\lambda e^{-i\alpha}}{2} \left\{ \frac{1}{\overline{T} - \overline{X}} - \frac{T^2 \overline{X}}{1 - T\overline{X}} - \frac{T - 2X + X^2 \overline{T}}{(1 - \overline{T}X)^2} - e^{-2i\alpha} \left[\frac{T - X}{(\overline{T} - \overline{X})^2} + \frac{T^2 \left(X - T \right)}{(1 - \overline{X}T)^2} \right] \right\};$$

$$T = \lambda\xi e^{i\alpha} - 1; \quad X = \lambda\eta e^{i\alpha} - 1; \quad P(\eta) = p(l\eta); \quad \lambda = l/R.$$

Загалом, як показано в працях [4, 5], СІР (2) ефективно можна розв’язати чисельно методом механічних квадратур Ґаусса–Чебишова. Таким способом зводимо його до системи комплексних лінійних алгебричних рівнянь. У припущенні, що шукана функція $g'(x_1)$ у точці $x_1 = 0$ має слабшу, ніж коренева, особливість, за відомою [4] формулою знаходимо КІН:

$$K_{\mathrm{I}} - iK_{\mathrm{II}} = -\lim_{x_1 \to l} \left[\sqrt{(2\pi(l - x_1))}\, g'(x_1) \right]. \qquad (4)$$

Далі числовий розв’язок знайдемо для випадку, коли на берегах тріщини діє рівномірно розподілений тиск $p(x_1) = -p$. Побудовано (рис. 2) графіки нормованих КІН $F_{\mathrm{I,II}} = K_{\mathrm{I,II}}/(p\sqrt{\pi R})$ для такої задачі. Якщо тріщина видовжується і її вершина наближається до краю диска, то КІН стають нескінченно великими. Наведено (табл. 1 і 2) числові значення КІН $F^*_{\mathrm{I,II}}$, віднесені до величини $p\sqrt{\pi l}$:

$$F^*_{\mathrm{I,II}} = K_{\mathrm{I,II}} \big/ (p\sqrt{\pi l}) = F_{\mathrm{I,II}} \big/ \sqrt{\lambda} = F_{\mathrm{I,II}} \big/ \sqrt{l/R}\ . \qquad (5)$$

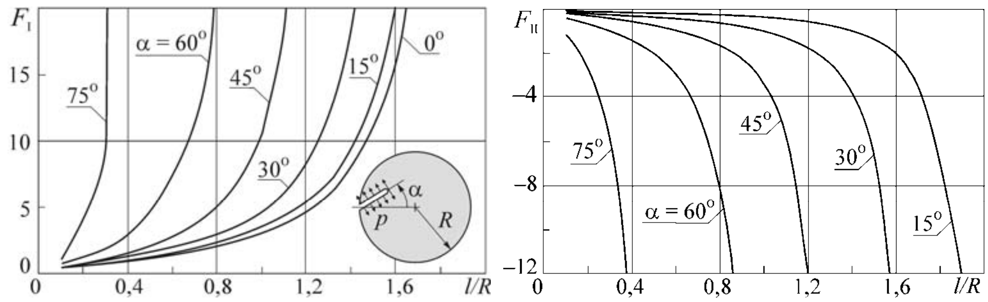

Рис. 2. Залежність безрозмірних коефіцієнтів інтенсивності напружень $F_{\mathrm{I,II}} = K_{\mathrm{I,II}}/(p\sqrt{\pi R})$ від орієнтації та довжини тріщини.

Fig. 2. Dimensionless stress intensity factors, $F_{\mathrm{I,II}} = K_{\mathrm{I,II}}/(p\sqrt{\pi R})$, depending on the crack orientation and crack length.

Таблиця 1. Безрозмірні КІН $F_{\mathrm{I}}^{*}(\alpha,\lambda) = K_{\mathrm{I}}(\alpha,\lambda)/(p\sqrt{\pi l})$

λ \ α	0°	15°	30°	45°	60°	75°
0	1,1215	1,1598	1,2920	1,596	2,329	5,01
0,2	1,3135	1,3663	1,5531	2,005	3,250	10,1
0,4	1,5673	1,6424	1,9157	2,627	4,991	38
0,6	1,9148	2,0258	2,4450	3,654	9,12	–
0,8	2,4127	2,5857	3,2727	5,583	25,2	–
1,0	3,1712	3,4608	4,7012	10,11	–	–
1,2	4,4307	4,9710	7,5858	27,5	–	–
1,4	6,8170	8,02	15,37	–	–	–
1,6	12,5	16,2	60,9	–	–	–
1,8	35,0	63,3		–	–	–

Таблиця 2. Безрозмірні КІН $F_{\mathrm{II}}^{*}(\alpha,\lambda) = K_{\mathrm{II}}(\alpha,\lambda)/(p\sqrt{\pi l})$

λ \ α	0°	15°	30°	45°	60°	75°
0	0	– 0,1170	– 0,2655	– 0,507	– 1,043	– 3,17
0,2	0	– 0,1378	– 0,3192	– 0,638	– 1,454	– 6,3
0,4	0	– 0,1657	– 0,3937	– 0,886	– 2,232	– 24
0,6	0	– 0,2044	– 0,5025	– 1,163	– 4,08	–
0,8	0	– 0,2609	– 0,6726	– 1,776	– 11,3	–
1,0	0	– 0,3491	– 0,9662	– 3,22	–	–
1,2	0	– 0,5015	– 1,5591	– 8,8	–	–
1,4	0	– 0,809	– 3,16	–	–	–
1,6	0	– 1,64	– 12,5	–	–	–
1,8	0	– 6,4		–	–	–

Відзначимо, що при $\lambda = l/R = 0$, тобто коли $R \to \infty$, диск перетворюється у півплощину із нахиленою під кутом $\pi/2 - \alpha$ до її краю тріщиною і тоді, відповідно, значення КІН $K_{\mathrm{I}}/(p\sqrt{\pi l})$ і $K_{\mathrm{II}}/(p\sqrt{\pi l})$ у перших рядках табл. 1 і 2 збігаються із відомими [5, 10]. При $\alpha = 0$ у першому стовпчику табл. 1 маємо значення КІН $K_{\mathrm{I}}/(p\sqrt{\pi l})$ для диска з радіальною тріщиною, на берегах якої діє рівномірно розподілений тиск, і які збігаються із одержаними раніше [4]. Також зауважимо, що числові дані тут знайдено в результаті розв'язування системи 100 комплексних алгебричних рівнянь.

ВИСНОВКИ

Вперше установлено значення коефіцієнтів інтенсивності напружень для нерадіальної крайової тріщини в круговому диску, підданому рівномірному тиску вздовж берегів тріщини, або ж для всебічного розтягу диска з незавантаженою тріщиною. Показано, що отримані результати збігаються зі знайденими раніше у частковому випадку для диска з радіальною тріщиною, а також для півплощини з крайовою нахиленою тріщиною.

РЕЗЮМЕ. Получено сингулярное интегральное уравнение задачи о напряженно-деформированном состоянии кругового диска, ослабленного краевой прямолинейной нерадиальной трещиной, на берегах которой действует произвольная самуравновешенная нагрузка. Для равномерно распределенного давления на берегах трещины вычислены коэффициенты интенсивности напряжений в зависимости от ориентации и длины трещины.

SUMMARY. The singular integral equation for the stress-strain state determination in a cracked circular disk has been presented. The straight nonradial edge crack under arbitrary self-balanced loading on its faces has been considered. Dependence of stress intensity factors on the crack orientation and length are calculated in case of uniformly distributed pressure on the crack faces.

1. *Tada H., Paris P. C., and Irwin G. R.* The stress analysis of cracks: Handbook. – Hellertown: Del Research Corp., 1973. – 385 p.
2. *Rooke D. P. and Cartwright D. J.* The compendium of stress intensity factors. – London: Her Majesty`s Stationare Office, 1976. – 330 p.
3. *Саврук М. П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами // Механика разрушения и прочность материалов: справ. пос. в 4-х т. / Под ред. В. В. Панасюка. – К.: Наук. думка, 1988. – **2**. – 620 с.
4. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
5. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
6. *Либацкий Л. Л.* Применение сингулярних интегральных уравнений для определения критических усилий в пластинах с трещинами // Физ.-хим. механика материалов. – 1965. – **1**, № 4. – С. 410–418.
7. *Либацкий Л. Л.* Всестороннее растяжение кругового диска с внешней радиальной трещиной // Там же. – 1969. – **5**, № 6. – С. 758–760.
8. *Панасюк В. В., Дацышин А. П., Рудь Н. А.* Об определении характеристик трещиностойкости при внецентренном растяжении дисковых образцов с краевой трещиной // Там же. – 1984. – **20**, № 1. – С. 22–28.
9. *Gregory R. D.* A circular disc containing a radial erge crack opened by a constant internal pressure // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1977. – **81**, № 3. – P. 497–521.
10. *Дацышин А. П., Марченко Г. П.* Предельное равновесие полуплоскости с криволинейной трещиной. – Львов, 1987. – 82 с. – Деп. в ВИНИТИ 11.12.87, №8663-В87.

Одержано 06.07.2011