

УДК 539.3

**ДІЯ НЕОСЕСИМЕТРИЧНОГО ДИНАМІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ
НА КОЛОВИЙ ОТВІР У ПРУЖНІЙ НЕСКІНЧЕННІЙ ПЛОЩИНІ***Л. Й. ОНИШКО, М. М. СЕНЮК, Н. М. БІДА**Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів*

Отримано розв'язок плоскої динамічної задачі теорії пружності про дію неосесиметричного навантаження на краю колового отвору в нескінченній площині. Для розв'язування задачі використано модифікований метод скінченних різниць за часом та метод рядів Фур'є за кутовою змінною. Знайдено розподіл напружень та числово розраховано концентрацію напружень на краю колового отвору залежно від часу за різних коефіцієнтів Пуассона для розподіленого за певним законом навантаження.

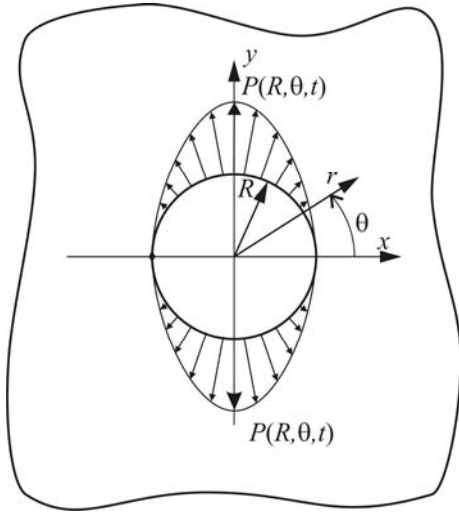
Ключові слова: динаміка, нескінченна пластина, коловий отвір, скінченні різниці, ряди Фур'є, неосесиметричне навантаження.

Методи, які, в основному, використовували для розв'язування плоских динамічних задач теорії пружності, базувались на інтегральних перетвореннях Лапласа [1]. Основний недолік цього підходу – важко отримати обернені перетворення Лапласа для певного класу динамічних задач, а у багатьох випадках одержати їх неможливо. Запропонований аналітико-числовий метод розв'язування динамічних задач [2] можна застосовувати для будь-яких геометрії тіл та навантаження. Він ґрунтується на застосуванні скінченних різниць тільки за часом і у ньому не використовують інтегральні перетворення Лапласа. За іншими просторовими змінними можна використовувати, наприклад, метод інтегральних рівнянь або інші відомі аналітичні методи. За допомогою аналітико-числового методу неоднорідні диференційні рівняння руху для поставленої динамічної задачі зводять до однорідних такого ж вигляду, як і за застосування до них перетворень Лапласа. Це дасть змогу використовувати добре розроблені підходи для розв'язування однорідних диференційних рівнянь. Метод апробували на осесиметричній динамічній задачі для пружної площини з круговим отвором за умов плоскої деформації та за його допомогою розв'язали плоскі динамічні задачі теорії пружності для одно- та двошарових порожнистих циліндрів за дії на їхніх поверхнях ударних осесиметричних навантажень [3–8].

Нижче модифікований метод скінченних різниць за часом застосували для розв'язування динамічної неосесиметричної задачі теорії пружності для нескінченної площини з коловим отвором.

Постава задачі та метод її розв'язування. Нехай у нескінченній пружній площині міститься коловий отвір радіуса $r = R$. Систему полярних координат r, θ вибрали з початком у центрі кола. На краю отвору у початковий момент часу $t = 0$ прикладене неосесиметричне динамічне навантаження $P(R, \theta, 0)$ (рис. 1).

Розв'язано задачу методом скінченних різниць за часом [2]. Рівняння руху для поставленої задачі зводять до системи неоднорідних диференційних рівнянь відносно просторових змінних. Систему розбили на дві незалежні: однорідну, розв'язок якої задовольняє ненульові крайові умови та неоднорідну з нульовими



крайовими умовами. За нульових початкових умов неоднорідна система має нульовий розв'язок. Отже, задачу звели до розв'язування однорідних диференціальних рівнянь такого ж вигляду, як за застосування до рівнянь руху інтегральних перетворень.

Рис. 1. Коловий отвір у нескінченній пружній площині під дією розподіленого динамічного навантаження

Fig. 1. A circular hole in an infinite elastic plane under distributed dynamic load.

Розподіл радіальних σ_{rr} , колових $\sigma_{\theta\theta}$ та дотичних $\sigma_{r\theta}$ напружень знайдемо за відомими формулами [9, 10]:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \lambda \nabla^2 \varphi_1 + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial \theta} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \lambda \nabla^2 \varphi_1 + \frac{2\mu}{r} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial \theta} \right), \\ \sigma_{r\theta} &= \mu \left(\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right),\end{aligned}\quad (1)$$

де $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$; λ, μ – сталі Ламе, які зв'язані з коефіцієнтом Пуассона ν та модулем Юнга E так: $\lambda = E\nu / (1 - \nu)(1 - 2\nu) = 2\mu\nu / (1 - 2\nu)$. Хвильові потенціали φ_k ($k = 1, 2$) є розв'язками двох неоднорідних рівнянь руху [11]

$$\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c_k^2} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t^2}, \quad (2)$$

де c_k – відповідно швидкості поздовжніх ($k = 1$) та поперечних ($k = 2$) хвиль.

Розвинемо допоміжні функції φ_k у ряди Фур'є [12]:

$$\varphi_1(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{1n}(r, t) \cos n\theta, \quad \varphi_2(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}(r, t) \sin n\theta \quad (3)$$

та підставимо у рівняння (2), де невідомі коефіцієнти A_{kn} ($k = 1, 2$) у кожний j -ий момент часу подамо через нові функції \widehat{A}_{kn}^j [2]:

$$A_{kn}^j = \sum_{v=1}^j w_{jv} \widehat{A}_{kn}^v, \quad t_j = \sum_{k=1}^j \Delta t_k, \quad \Delta t_k = t_k - t_{k-1}; \quad t_0 = 0, \quad (4)$$

а похідну за часом через різницеві рівняння

$$\left. \frac{\partial^2 A_{kn}}{\partial t^2} \right|_{t=t_j} = \frac{A_{kn}^j - A_{kn}^{j-1}}{\Delta t_j^2} - \frac{A_{kn}^{j-1} - A_{kn}^{j-2}}{\Delta t_j \Delta t_{j-1}}; \quad j = 2, 3, \dots \quad (5)$$

На основі модифікованого методу скінченних різниць за часом [2] вибираємо коефіцієнти ряду (4) w_{jv} у вигляді таких рекурентних співвідношень:

$$w_{jj} = 1; \quad w_{j,j-1} = \frac{\Delta t_{j-1}}{\Delta t_{j-1} - \Delta t_j}; \quad j = 2, 3, \dots,$$

$$w_{j,j-n} = \frac{\Delta t_{j-n}^2}{\Delta t_{j-n}^2 - \Delta t_j^2} \left[\left(1 + \frac{\Delta t_j}{\Delta t_{j-1}} \right) w_{j-1,j-n} - \frac{\Delta t_j}{\Delta t_{j-1}} w_{j-2,j-n} \right]; \quad (6)$$

$$j = 3, 4, \dots; \quad n = 2, 3, \dots, j-1$$

та за допомогою (3)–(6) зведемо неоднорідну систему рівнянь (2) до однорідної відносно невідомих функцій \tilde{A}_{kn}^j

$$\frac{\partial^2 \tilde{A}_{kn}^j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{A}_{kn}^j}{\partial r} - \left(\frac{n^2}{r^2} + s_{kj}^2 \right) \tilde{A}_{kn}^j = 0, \quad s_{kj}^2 = \frac{1}{c_k^2 \Delta t_j^2}. \quad (7)$$

Розподіл напружень визначаємо за формулами (1) з врахуванням подань (3), (4)

$$\sigma_{rr}^j(t, r, \theta) =$$

$$= \sum_{v=1}^j \sum_{n=0}^{\infty} \left[\lambda \left(\frac{\partial^2 \tilde{A}_{1n}^v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{A}_{1n}^v}{\partial r} - \frac{n^2 \tilde{A}_{1n}^v}{r^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \tilde{A}_{1n}^v(r, t)}{\partial r^2} - \frac{n}{r^2} \tilde{A}_{2n}^v + \frac{n}{r} \frac{\partial \tilde{A}_{2n}^v}{\partial r} \right) \right] w_{jv}^n \cos n\theta,$$

$$\sigma_{\theta\theta}^j(t, r, \theta) = \sum_{v=1}^j \sum_{n=0}^{\infty} \left[\lambda \left(\frac{\partial^2 \tilde{A}_{1n}^v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{A}_{1n}^v}{\partial r} - \frac{n^2 \tilde{A}_{1n}^v}{r^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2\mu}{r} \left(\frac{\partial \tilde{A}_{1n}^v(r, t)}{\partial r} - \frac{n^2}{r} \tilde{A}_{1n}^v + \frac{n}{r} \tilde{A}_{2n}^v - \frac{n \partial \tilde{A}_{2n}^v}{\partial r} \right) \right] w_{jv}^n \cos n\theta, \quad (8)$$

$$\sigma_{r\theta}^j(t, r, \theta) = \sum_{v=1}^j \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mu \left(-\frac{2n}{r} \frac{\partial \tilde{A}_{1n}^v}{\partial r} + \frac{2n}{r^2} \tilde{A}_{1n}^v - \frac{\partial^2 \tilde{A}_{2n}^v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{A}_{2n}^v}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \tilde{A}_{2n}^v \right) \right] w_{jv}^n \sin n\theta.$$

Коли загальний розв'язок однорідних рівнянь (7) подамо через функції Макдональда $K_n(s_{kj}r)$ n -го порядку та невідомі коефіцієнти C_{kn}^j

$$\tilde{A}_{kn}^j = C_{kn}^j K_n(s_{kj}r), \quad (9)$$

то співвідношення для напружень (8) запишемо у вигляді

$$\sigma_{rr}^j(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^j \left[C_{1n}^v L_{1n}^v(s_{1v}r) + C_{2n}^v L_{2n}^v(s_{2v}r) \right] w_{jv}^n \cos n\theta,$$

$$\sigma_{r\theta}^j(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^j \left[C_{1n}^v L_{3n}^v(s_{1v}r) + C_{2n}^v L_{4n}^v(s_{2v}r) \right] w_{jv}^n \sin n\theta, \quad (10)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^j(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^j \left[C_{1n}^v L_{5n}^v(s_{1v}r) + C_{2n}^v L_{6n}^v(s_{2v}r) \right] w_{jv}^n \cos n\theta,$$

де введемо такі позначення:

$$L_n^v(s_{1v}r) = (\lambda + 2\mu) K_n''(s_{1v}r) s_{1v}^2 + \frac{\lambda}{r} K_n'(s_{1v}r) s_{1v} - \frac{\lambda n^2}{r^2} K_n(s_{1v}r),$$

$$\begin{aligned}
L_{2n}^V(s_{2v}r) &= 2\mu n \left[\frac{1}{r} K_n'(s_{2v}r) s_{2v} - \frac{1}{r^2} K_n(s_{2v}r) \right], \\
L_{3n}^V(s_{1v}r) &= 2n\mu \left[-\frac{K_n'(s_{1v}r)}{r} s_{1v} + \frac{K_n(s_{1v}r)}{r^2} \right], \\
L_{4n}^V(s_{2v}r) &= \mu \left[-K_n''(s_{2v}r) s_{2v}^2 + \frac{K_n'(s_{2v}r)}{r} s_{2v} - \frac{n^2 K_n(s_{2v}r)}{r^2} \right], \\
L_{5n}^V(s_{1v}r) &= \lambda K_n''(s_{1v}r) s_{1v}^2 + \frac{(\lambda + 2\mu)}{r} K_n'(s_{1v}r) s_{1v} - \frac{n^2(\lambda + 2\mu)}{r^2} K_n(s_{1v}r), \\
L_{6n}^V(s_{2v}r) &= \frac{2\mu n}{r} \left[\frac{1}{r} K_n(s_{2v}r) - K_n'(s_{2v}r) s_{2v} \right], \quad K_n'(s_v r) = -K_{n+1}(rs_v) + \frac{n}{rs_v} K_n(rs_v), \\
K_n''(s_v r) &= -K_{n+1}'(rs_v) + \frac{n}{rs_v} K_n'(rs_v) - \frac{n}{(rs_v)^2} K_n(rs_v).
\end{aligned} \tag{11}$$

Задачу розв'язуємо за нульових початкових та таких крайових умов:

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = P(R, \theta, 0), \quad \sigma_{r\theta}|_{r=R} = 0. \tag{12}$$

Для їх задоволення розвинемо зовнішнє навантаження у ряд Фур'є за тригонометричними функціями [12]

$$P(R, \theta, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(R, 0) \cos n\theta, \tag{13}$$

де його коефіцієнти знайдемо так:

$$p_n(R, 0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} P(R, \theta, 0) \cos n\theta d\theta. \tag{14}$$

Перетворивши крайові умови (12) з використанням подань (10, 13, 14), отримаємо:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}|_{r=R} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=1}^j \left[C_{1n}^j(s_{1j}) L_{1n}(s_{1j}R) + C_{2n}^j(s_{2j}) L_{2n}(s_{2j}R) \right] w_{jv}^n \cos n\theta = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} p_n(R, 0) \cos n\theta,
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\sigma_{r\theta}|_{r=R} = \sum_{v=1}^j \left[C_{1n}^v(s_{1j}) L_{5n}(s_{1j}R) + C_{2n}^v(s_{2j}) L_{6n}(s_{2j}R) \right] w_{jv}^n = 0.$$

Коли прирівняємо у виразах (15) коефіцієнти при тригонометричних функціях ($\cos n\theta$) та виділимо j -ті члени рядів за умови, що $w_{jj}^n = 1$, то отримаємо систему рівнянь

$$C_{1n}^j L_{1n}(s_{1j}R) + C_{2n}^j L_{2n}(s_{2j}R) = \tilde{p}_n^j, \quad C_{1n}^j L_{3n}(s_{1j}R) + C_{2n}^j L_{4n}(s_{2j}R) = 0, \tag{16}$$

з якої визначаємо невідомі коефіцієнти $C_{kn}^j(s_{kj})$

$$C_{1n}^j = \frac{\tilde{p}_n^j L_{4n}(s_{2j}R)}{L_n}, \quad C_{2n}^j = -\frac{\tilde{p}_n^j L_{3n}(s_{1j}R)}{L_n}, \tag{17}$$

де
$$\bar{p}_n^j = p_n(R, t) - \sum_{m=1}^{j-1} w_{jm}^n \bar{p}_n^m,$$

$$L_n = L_n(s_{1j}R, s_{2j}R) = L_{4n}(s_{2j}R)L_{1n}(s_{1j}R) - L_{2n}(s_{2j}R)L_{3n}(s_{1j}R). \quad (18)$$

Підставимо коефіцієнти (17) у формули (10) та зведемо отримані співвідношення для розподілу напружень до безрозмірних величин

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{rr}^j(r, \theta, t)}{p_0} &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=1}^j \left[\frac{\bar{p}_n^v}{\bar{L}_n(\bar{s}_{1v}, \bar{s}_{2v})} (\bar{L}_{4n}(\bar{s}_{2v})\bar{L}_{1n}(\bar{s}_{1v}, \tilde{s}_{1v}) - \bar{L}_{3n}(\bar{s}_{1v})\bar{L}_{2n}(\bar{s}_{2v}, \tilde{s}_{2v})) \right] w_{jv}^n \cos n\theta, \\ \frac{\sigma_{r\theta}^j(r, \theta, t)}{p_0} &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=1}^j \left[\frac{\bar{p}_n^v}{\bar{L}_n(\bar{s}_{1v}, \bar{s}_{2v})} (\bar{L}_{4n}(\bar{s}_{2v})\bar{L}_{3n}(\bar{s}_{1v}, \tilde{s}_{1v}) - \bar{L}_{3n}(\bar{s}_{1v})\bar{L}_{4n}(\bar{s}_{2v}, \tilde{s}_{2v})) \right] w_{jv}^n \sin n\theta, \quad (19) \\ \frac{\sigma_{\theta\theta}(r, \theta, t)}{p_0} &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=1}^j \left[\frac{\bar{p}_n^v}{\bar{L}_n(\bar{s}_{1v}, \bar{s}_{2v})} (\bar{L}_{4n}(\bar{s}_{2v})\bar{L}_{5n}(\bar{s}_{1v}, \tilde{s}_{1v}) - \bar{L}_{3n}(\bar{s}_{1v})\bar{L}_{6n}(\bar{s}_{2v}, \tilde{s}_{2v})) \right] w_{jv}^n \cos n\theta, \end{aligned}$$

де
$$\bar{p}_n^v = p_n^v(t) / p_0 - \sum_{m=1}^{v-1} w_{jm}^n \bar{p}_n^m / p_0 = \bar{p}_n^v(t) - \sum_{m=1}^{v-1} w_{vm}^n \bar{p}_n^m,$$

$$\bar{L}_n(\bar{s}_{1v}, \bar{s}_{2v}) = [\bar{L}_{4n}(\bar{s}_{2v})\bar{L}_{1n}(\bar{s}_{1v}) - \bar{L}_{2n}(\bar{s}_{2v})\bar{L}_{3n}(\bar{s}_{1v})],$$

$$\bar{L}_{1n}(\tilde{s}_{1v}, \bar{s}_{1v}) = \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2 \right) K_n''(\tilde{s}_{1v}) \bar{s}_{1v}^2 + \frac{\lambda}{\mu} K_n'(\tilde{s}_{1v}) \frac{a}{r} \bar{s}_{1v} - n^2 \frac{\lambda}{\mu} \frac{a^2}{r^2} K_n(\tilde{s}_{1v}),$$

$$\bar{L}_{1n}(\bar{s}_{1v}) = \bar{L}_{1n}(\tilde{s}_{1v}, \bar{s}_{1v}) \Big|_{\tilde{s}_{1v}=\bar{s}_{1v}},$$

$$\bar{L}_{2n}(\tilde{s}_{2v}, \bar{s}_{2v}) = 2n \left[\frac{a}{r} K_n'(\tilde{s}_{2v}) \bar{s}_{2v} - \frac{a^2}{r^2} K_n(\tilde{s}_{2v}) \right], \quad \bar{L}_{2n}(\bar{s}_{2v}) = \bar{L}_{2n}(\tilde{s}_{2v}, \bar{s}_{2v}) \Big|_{\tilde{s}_{2v}=\bar{s}_{2v}},$$

$$\bar{L}_{3n}(\tilde{s}_{1v}, \bar{s}_{1v}) = 2n \left[-\frac{a}{r} K_n'(\tilde{s}_{1v}) \bar{s}_{1v} + \frac{a^2}{r^2} K_n(\tilde{s}_{1v}) \right], \quad \bar{L}_{3n}(\bar{s}_{1v}) = \bar{L}_{3n}(\tilde{s}_{1v}, \bar{s}_{1v}) \Big|_{\tilde{s}_{1v}=\bar{s}_{1v}}, \quad (20)$$

$$\bar{L}_{4n}(\tilde{s}_{2v}, \bar{s}_{2v}) = -K_n''(\tilde{s}_{2v}) \bar{s}_{2v}^2 + \frac{a}{r} K_n'(\tilde{s}_{2v}) \bar{s}_{2v} - n^2 \frac{a^2}{r^2} K_n(\tilde{s}_{2v}),$$

$$\bar{L}_{4n}(\bar{s}_{2v}) = \bar{L}_{4n}(\tilde{s}_{2v}, \bar{s}_{2v}) \Big|_{\tilde{s}_{2v}=\bar{s}_{2v}},$$

$$\bar{L}_{5n}(\tilde{s}_{1v}, \bar{s}_{1v}) = \frac{\lambda}{\mu} K_n''(\tilde{s}_{1v}) \bar{s}_{1v}^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2 \right) \frac{a}{r} \bar{s}_{1v} K_n'(\tilde{s}_{1v}) - n^2 \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2 \right) \frac{a^2}{r^2} K_n(\tilde{s}_{1v}),$$

$$\bar{L}_{5n}(\bar{s}_{1v}) = \bar{L}_{5n}(\tilde{s}_{1v}, \bar{s}_{1v}) \Big|_{\tilde{s}_{1v}=\bar{s}_{1v}}, \quad \bar{L}_{6n}(\tilde{s}_{2v}, \bar{s}_{2v}) = 2n \left[\frac{a^2}{r^2} K_n(\tilde{s}_{2v}) - K_n'(\tilde{s}_{2v}) \frac{a}{r} \bar{s}_{2v} \right],$$

$$\bar{L}_{6n}(\bar{s}_{2v}) = \bar{L}_{6n}(\tilde{s}_{2v}, \bar{s}_{2v}) \Big|_{\tilde{s}_{2v}=\bar{s}_{2v}}, \quad K_n'(\tilde{s}_{kv}) = -K_{n+1}(\tilde{s}_{kv}) + \frac{n}{\tilde{s}_{kv}} K_n(\tilde{s}_{kv}),$$

$$K_n'(\bar{s}_{kv}) = K_n'(\tilde{s}_{kv}) \Big|_{\tilde{s}_{kv}=\bar{s}_{kv}},$$

$$K_n''(\tilde{s}_{kv}) = -K_{n+1}'(\tilde{s}_{kv}) + \frac{n}{\tilde{s}_{kv}} K_n'(\tilde{s}_{kv}) - \frac{n}{(\tilde{s}_{kv})^2} K_n(\tilde{s}_{kv}), \quad K_n''(\bar{s}_{kv}) = K_n''(\tilde{s}_{kv}) \Big|_{\tilde{s}_{kv}=\bar{s}_{kv}},$$

коли $\bar{s}_{1v} = c_2 / c_1 \Delta\tau_v$, $\bar{s}_{2v} = 1 / \Delta\tau_v$, $\tilde{s}_{1v} = c_2 r / Rc_1 \Delta\tau_v$, $\tilde{s}_{2v} = r / R \Delta\tau_v$, $\Delta\tau_v = c_2 \Delta t_v / R$, p_0 – статичні колові напруження у точці $r = R$, $\theta = 0$ для нескінченної пружної площини з коловим отвором, навантаженою неосесиметричними розподіленими силами.

Дія розподілених ударних навантажень на краю колового отвору. Прикладені на краю отвору розподілені зусилля в початковий момент часу подамо у вигляді

$$P(R, \theta, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(R, t) \cos n\theta = p(1 - \cos 2\theta), \quad (21)$$

де коефіцієнти ряду (21) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} p_n(R, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(R, \theta, t) \cos n\theta d\theta = \frac{p}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2\theta) \cos n\theta d\theta = \\ &= \frac{p}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos n\theta d\theta - \frac{p}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\theta \cos n\theta d\theta. \end{aligned} \quad (22)$$

Порахувавши інтеграли

$$\frac{p}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos n\theta d\theta = 0; \quad 2 \int_0^{\pi} \cos^2 2\theta d\theta = \pi, \quad n = 2; \quad \frac{p}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\theta \cos n\theta d\theta = 0, \quad n^2 \neq 2^2,$$

одержимо такі значення членів ряду у кожний j -ий момент часу:

$$p_0^j(R, t) = p, \quad p_1^j(R, t) = 0, \quad p_2^j(R, t) = -p, \quad p_n^j(R, t) = 0, \quad n = 3, 4, \dots$$

Числові результати. За формулами (19), (20) числово розраховали розподіл напружень у нескінченній пластині з коловим отвором навантаженою динамічними розподіленими зусиллями (21).

Наведено (рис. 2) графіки залежностей напружень $\sigma_{\theta\theta}(t, r, \theta) / p_0$ від часу $\tau_j = \sum_{v=1}^j \Delta\tau_v$ за коефіцієнтів Пуассона $\nu = 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$ на краю отвору ($R/r = 1$)

у точках: $\theta = 0$ (рис. 2a), $\theta = \pi/4$ (рис. 2b), $\theta = \pi/2$ (рис. 2c). У розрахунках використовували вирази для співвідношень швидкостей c_2/c_1 та сталей Ламе через коефіцієнти Пуассона: $c_2/c_1 = [(1 - 2\nu)/(1 - \nu)]^{1/2} / \sqrt{2}$, $\lambda/\mu = 2\nu/(1 - 2\nu)$.

Виявили (рис. 2), що зі збільшенням часу ($\tau_j > 9$) концентрація колових напружень $\sigma_{\theta\theta} / p_0$ на краю отвору мало залежить від коефіцієнта Пуассона, а числовий розв'язок динамічної задачі наближається до значення p_0 , яке знайдено з розв'язку відповідної статичної задачі [13]. Максимальна концентрація відносних

напружень $\sigma_{\theta\theta}/p_0$ досягається в точці $\theta = 0$ і залежить від коефіцієнта Пуассона (рис. 2a).

Відзначимо, що як і для осесиметричних задач, у початковий момент часу спостерігають динамічний ефект – стрибок напружень (рис. 2a–c), який суттєво залежить не тільки від коефіцієнтів Пуассона, але і від розташування точок θ на краю колового отвору. Найбільший стрибок спостерігають, коли $\theta = \pi/2$ (рис. 2c) і мінімальний за $\theta = 0$ (рис. 2a).

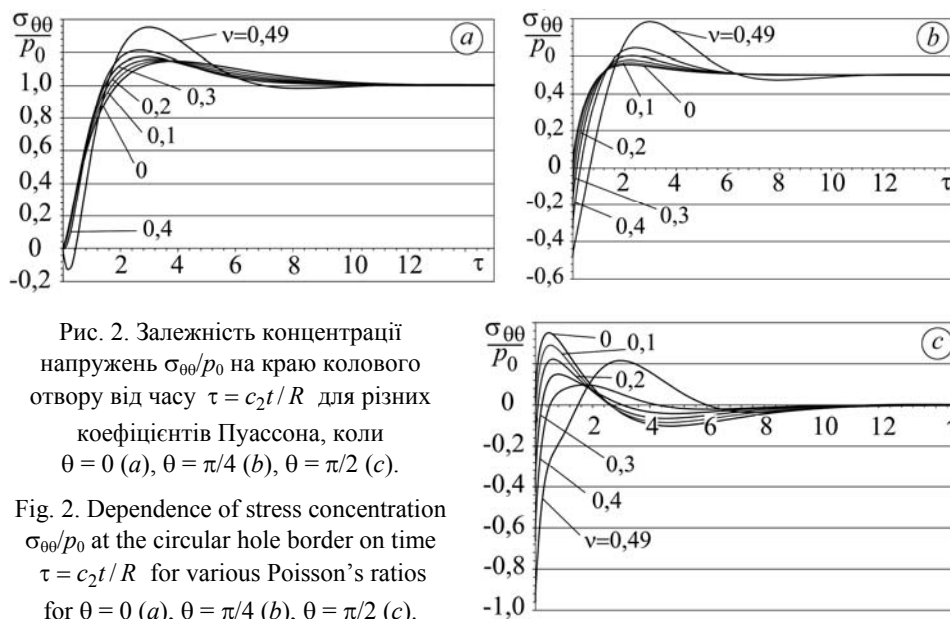


Рис. 2. Залежність концентрації напружень $\sigma_{\theta\theta}/p_0$ на краю колового отвору від часу $\tau = c_2 t / R$ для різних коефіцієнтів Пуассона, коли $\theta = 0$ (a), $\theta = \pi/4$ (b), $\theta = \pi/2$ (c).

Fig. 2. Dependence of stress concentration $\sigma_{\theta\theta}/p_0$ at the circular hole border on time $\tau = c_2 t / R$ for various Poisson's ratios for $\theta = 0$ (a), $\theta = \pi/4$ (b), $\theta = \pi/2$ (c).

ВИСНОВКИ

Отримано розв'язок нової задачі теорії пружності про дію неосесиметричних динамічних сил на краю колового отвору у нескінченній площині поєднанням модифікованого методу скінченних різниць за часом та методу рядів Фур'є за кутовою змінною.

Числово розраховано концентрацію напружень на отворі залежно від часу за різних коефіцієнтів Пуассона для розподіленого ударного навантаження, яке моделюють трьома членами ряду Фур'є.

Концентрація напружень на краю отвору зі збільшенням часу асимптотично наближається до розв'язку відповідної задачі теорії пружності про дію неосесиметрично розподілених статичних сил на краю колового отвору у нескінченній площині. Виявлено, що у початковий момент часу за заданих нульових початкових умов виникають ненульові напруження. Подібний динамічний ефект уже спостерігали раніше під час розв'язування відповідних осесиметричних задач.

РЕЗЮМЕ. Получено решение плоской динамической задачи теории упругости о воздействии неосесимметричной нагрузки на круговое отверстие в бесконечной плоскости. Для решения задачи использовано модифицированный метод конечных разностей по времени и метод рядов Фурье по угловой переменной. Найдено распределение напряжений и проведен численный расчет концентрации напряжений на краю кругового отверстия, находящегося под действием распределенного за некоторым законом нагружения, в зависимости от времени для различных коэффициентов Пуассона.

SUMMARY. The modified finite difference method with respect to time and the Fourier series method with respect to the angular variable are used to solve the plane dynamic elastic

problem on action of symmetrically located nonaxisymmetrical loading on the circular hole boundary in an infinite plane. The stress distributions for the assigned problem are found. The numerical calculation of stress concentration distribution at the hole boundary depending on time for different Poisson's ratios and the loading distributed by certain laws is carried out.

1. *Frangi A.* Elastodynamics by BEM: a new direct formulation // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* – 1999. – **45**. – P. 721–740.
2. *Саврук М. П.* Новий метод розв'язування динамічних задач теорії пружності та механіки руйнування // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2003. – **39**, № 4. – С. 7–11.
(*Savruk M. P.*, New method for the solution of dynamic problems of the theory of elasticity and fracture mechanics // *Materials Science.* – 2003. – **39**, № 4. – P. 465–471.)
3. *Саврук М., Онишко Л., Сенюк М.* Про використання методу скінченних різниць за часом до розв'язування динамічної осесиметричної задачі для кругового кільця // *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: в 2-х т.* – Львів, 2006. – Т. 2. – С. 144–146.
4. *Саврук М. П., Онишко Л. Й., Сенюк М. М.* Плоска динамічна осесиметрична задача для порожнистого циліндра // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2008. – **44**, № 1. – С. 7–13.
(*Savruk M. P., Onyshko L. I., and Senyuk M. M.* A Plane dynamic axisymmetric problem for a hollow cylinder // *Materials Science.* – 2008. – **44**, № 4. – P. 1–9.)
5. *Онишко Л., Варивода Ю., Сенюк М.* Розподіл колових та радіальних напружень в порожнистому циліндрі за імпульсних навантажень на його поверхнях // *Наук. вісник Львів. нац. ун-ту вет. медицини та біотехнологій ім. С. З. Гжицького.* – 2008. – **10**, № 3 (38). – С. 211–217.
6. *Онишко Л. Й., Сенюк М. М.* Напружений стан порожнистого двошарового циліндра під динамічним навантаженням // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2009. – **45**, № 1. – С. 55–61.
(*Onyshko L. I. and Senyuk M. M.* Stressed state of a hollow two-layer cylinder under dynamic loads // *Materials Science.* – 2009. – **45**, № 1. – P. 57–65.)
7. *Онишко Л., Варивода Ю., Сенюк М.* Вплив на міцність циліндричних елементів конструкцій прямокутних імпульсних навантажень // *Наук. вісник Львів. нац. ун-ту вет. медицини та біотехнологій ім. С. З. Гжицького.* – 2009. – **11**, № 3 (42). – С. 198–205.
8. *Онишко Л., Варивода Ю., Біда Н.* Плоска задача теорії пружності про дію динамічних навантажень на краю колового отвору у нескінченній пружній площині // *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: в 2-х т.* – Львів, 2010. – Т. 2. – С. 105–108.
9. *Eringen C. and Suhubi E. S.* Elastodynamics. V. II: Linear theory. – New York: Academic Press, 1975. – 660 p.
10. *Sih G. C.* Mechanics of Fracture. V. 4: Elastodynamic Crack Problems. – Leyden: Noordhoff International Publishing, 1977. – 352 p.
11. *Грінченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
12. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1981. – 720 с.
13. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.

Одержано 11.07.2013