УДК 539.3

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПІВПЛОЩИНИ З ВНУТРІШНІМИ ПРИПОВЕРХНЕВИМИ ТРІЩИНАМИ

В. С. КРАВЕЦЬ

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Методом сингулярних інтегральних рівнянь розв'язано пружну та пружно-пластичну (в межах моделі смуг пластичності) задачі теорії пружності та механіки руйнування для півплощини з внутрішніми гладкими та кусково-гладкими тріщинами. Числові розв'язки інтегральних рівнянь отримано методом механічних квадратур. Визначено коефіцієнти інтенсивності напружень у вершинах кусково-гладких приповерхневих тріщин, досліджено їх залежності від геометричних параметрів задачі за внутрішнього тиску на берегах тріщини та розтягу півплощини на нескінченності. У пружно-пластичній задачі досліджено вплив вільного краю півплощини, рівня навантаження та форми тріщини на розкриття в її вершинах, довжини та кути орієнтації прямолінійних смуг пластичності, які виходять з вершин тріщини.

Ключові слова: *півплощина, плоска задача, сингулярні інтегральні рівняння, кусково-гладка тріщина, коефіцієнти інтенсивності напружень, смуги пластичності, розкриття тріщини.*

На основі побудованих інтегральних зображень комплексних потенціалів напружень для двовимірних пружних тіл з криволінійними тріщинами [1] розроблено методи розв'язування широкого класу плоских задач математичної теорії тріщин для ізотропних тіл [2, 3]. Дослідженню кусково-гладких тріщин присвячено багато праць (див. огляд [3]). У межах моделей смуг пластичності отримано розв'язки відповідних пружно-пластичних задач [4, 5] для різних плоских областей. Розроблено також методику розв'язування пружних та пружно-пластичних задач для півплощин з тріщинами [2, 6, 7].

Нижче розв'язано плоскі задачі теорії пружності для півплощини з внутрішніми кусково-гладкими тріщинами та пружно-пластичні задачі механіки руйнування (в межах моделі смуг пластичності) для півпластини з приповерхневою криволінійною тріщиною.

Розроблену методику розв'язування поставлених задач можна використати для математичного моделювання практично важливих задач щодо блістерінгу (появи різного роду приповерхневих тріщин, пор і каверн) в результаті наводнення металів [8, 9]. Зокрема, за відомими з експериментальних досліджень формами поверхонь наводнених металів можна оцінити рівні внутрішніх тисків водню у блістерах.

Пружна задача. Розглянемо ізотропну півплощину S (з краєм L_0 вздовж осі Ox основної декартової системи координат xOy) зі системою трьох внутрішніх криволінійних тріщин $L_n\,(n=\overline{1,3})$, з'єднаних між собою у вершинах A, B (рис. 1) та віднесених до локальних декартових систем координат $x_n O_n y_n$. Зв'язок між координатами точок у цих системах задано співвідношенням $z = z_n \exp(i\alpha_n) + z_n^0$, $z = x + iy$, $z_n = x_n + iy_n$, де z_n^0 – комплексні координати початків локальних сис-

Контактна особа: В. С. КРАВЕЦЬ, e-mail: vlad@ipm.lviv.ua

тем координат O_n, α_n – кути між осями абсцис основної та локальних систем координат.

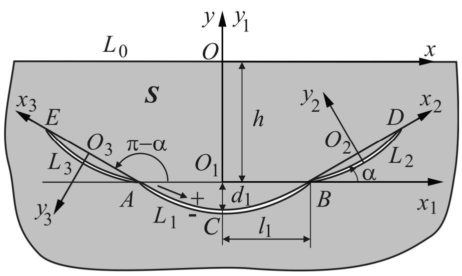

Рис. 1. Півплощина з кусково-гладкою триланковою тріщиною.

Fig. 1. A half-plane with a piecewise smooth three-sectional crack.

Край півплощини L_0 вільний від навантажень:

$$\sigma_y(x)+i\tau_y(x)=0,\ y=0,\ x\in(-\infty;\infty). \tag{1}$$

На нескінченності півплощина розтягується вздовж осі Ox сталими напруженнями p, а на берегах тріщин L_n задані самозрівноважені напруження

$$\sigma_n^{\pm}(t_n)+i\tau_n^{\pm}(t_n)=p_n(t_n),\quad t_n\in L_n,\quad n=1;2;3, \tag{2}$$

де $\sigma_n(t)$, $\tau_n(t)$ – нормальна та дотична компоненти напружень на контурі L_n, верхній знак індексу “+” (“–”) вказує на граничне значення відповідної величини за прямування до контуру тріщини L_n зліва (справа) відносно вибраного напряму його обходу.

Комплексні потенціали для півплощини з внутрішніми тріщинами L_n визначають вирази [1, 2, 7]

$$\Phi(z)=\Phi_1(z)+\Phi_0(z)+\Phi_\infty(z),\ \Psi(z)=\Psi_1(z)+\Psi_0(z)+\Psi_\infty(z),$$

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{3}\int_{L_k}\frac{g_k'(t_k)}{T_k-z}e^{i\alpha_k}dt_k,$$

$$\Psi_1(z)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{3}\int_{L_k}\left[\frac{\overline{g_k'(t_k)}}{T_k-z}e^{-i\alpha_k}\overline{dt_k}-\frac{\overline{T_k}g_k'(t_k)}{(T_k-z)^2}e^{i\alpha_k}dt_k\right],$$

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{3}\int_{L_k}\left[\frac{1}{z-\overline{T_k}}g_k'(t_k)e^{i\alpha_k}dt_k+\frac{(T_k-\overline{T_k})}{(\overline{T_k}-z)^2}\overline{g_k'(t_k)}e^{-i\alpha_k}\overline{dt_k}\right],$$

$$\Psi_0(z)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{3}\int_{L_k}\left[\frac{\overline{T_k}}{(\overline{T_k}-z)^2}g_k'(t_k)e^{i\alpha_k}dt_k+\left\{\frac{(\overline{T_k}-T_k)(\overline{T_k}+z)}{(\overline{T_k}-z)^3}-\frac{1}{\overline{T_k}-z}\right\}\overline{g_k'(t_k)}e^{-i\alpha_k}\overline{dt_k}\right],$$

$$\Phi_\infty(z)=p/4;\ \Psi_\infty(z)=-p/2.$$

Тут невідомі функції – похідні стрибків переміщень на контурах тріщин L_k

$$g_k'(t_k)=\frac{2G}{i(1+\kappa)}\frac{d}{dt_k}\left\{\left[u_k(t_k)+iv_k(t_k)\right]^+-\left[u_k(t_k)+iv_k(t_k)\right]^-\right\},\ t_k\in L_k, \tag{3}$$

де u_k, v_k – декартові компоненти переміщень точки t_k у локальних системах координат $x_kO_ky_k$, $\kappa=3-4\mu$, $\kappa=(3-\mu)/(1+\mu)$ для плоскої деформації та узагальненого плоского напруженого стану півплощини, μ – коефіцієнт Пуассона; $T_k=t_ke^{i\alpha_k}+z_k^0\in L_k$, $k=1;\ 2;\ 3$.

Крайову задачу (1), (2) про напружено-деформований стан півплощини S з криволінійними тріщинами зводимо до системи трьох сингулярних інтегральних рівнянь [2, 6, 7]

$$\sum_{k=1}^{3}\int_{L_k}\left\{R_{nk}(t_k,t_n')g_k'(t_k)dt_k+S_{nk}(t_k,t_n')\overline{g_k'(t_k)dt_k}\right\}=\pi f_n(t_n'),\quad t_n'\in L_n,\ n=1;2;3 \qquad (4)$$

відносно невідомих функцій (3). Праві частини рівнянь мають вигляд

$$f_n(t_n)=p_n(t_n)-p(1-e^{-2i\alpha_n}\overline{dt_n}/dt_n)/2,$$

а ядра за умови вільного краю (1) визначаємо з виразів [6, 7]

$$R_{nk}(t_k,t_n')=\frac{e^{i\alpha_k}}{2}\left\{\frac{1}{T_k-T_n'}-\frac{1}{\overline{T_k}-T_n'}+\frac{\overline{T_k}-T_k}{(T_k-\overline{T_n'})^2}+\right.$$

$$\left.+e^{-2i\alpha_n}\frac{d\overline{t_n'}}{dt_n'}\left[\frac{1}{\overline{T_k}-\overline{T_n'}}-\frac{1}{T_k-\overline{T_n'}}+(T_k-\overline{T_k})\left\langle-\frac{1}{(T_k-\overline{T_n'})^2}+\frac{2(T_k-T_n')}{(T_k-\overline{T_n'})^3}\right\rangle\right]\right\},$$

$$S_{nk}(t_k,t_n')=\frac{e^{-i\alpha_k}}{2}\left\{\frac{1}{\overline{T_k}-\overline{T_n'}}-\frac{1}{T_k-\overline{T_n'}}+\frac{T_k-\overline{T_k}}{(\overline{T_k}-T_n')^2}+\right.$$

$$\left.+e^{-2i\alpha_n}\frac{d\overline{t_n'}}{dt_n'}\left[-\frac{T_k-T_n'}{(\overline{T_k}-\overline{T_n'})^2}+\frac{T_k-T_n'}{(T_k-\overline{T_n'})^2}\right]\right\}.$$

Для з'єднаної триланкової тріщини *EACBD* розв'язки системи (4) повинні задовольняти одну умову однозначності переміщень $\sum_{k=1}^{3}e^{i\alpha_k}\int_{L_k}g'_k(t_k)dt_k=0$ [4] за обходу контуру тріщини $L=L_3\cup L_1\cup L_2$.

Для симетричної задачі (рис. 1) маємо залежності

$$g_3'(t_3)=\overline{g_2'(t_2)},\quad f_3(t_3)=\overline{f_2(t_2)},\ t_3=\overline{t_2},\ dt_3=\overline{dt_2},$$

$$\alpha_1=0,\ z_1^0=O_1=(0;-ih),\quad \alpha_2=\alpha,\ z_2^0=O_2=l_1+l_2e^{i\alpha},$$

$$\alpha_3=\pi-\alpha,\ z_3^0=O_3=-l_1+l_2e^{-i\alpha},$$

$$t_k=l_k\omega_k(\xi)\in L_k,\quad \xi\in[-1;+1],\quad k=1,2;\quad \omega_3(\xi)=\overline{\omega_2}(\xi),\ l_3=l_2, \qquad (5)$$

де $2l_1=|AB|,\ 2l_2=|BD|=|AE|$. Врахувавши їх, задачу зводимо до двох інтегральних рівнянь

$$\int_{L_2}\left\{\left\langle R_{12}(T_2,T_1')+S_{13}(T_3,T_1')\right\rangle g_2'(t_2)dt_2+\left\langle S_{12}(T_2,T_1')+R_{13}(T_3,T_1')\right\rangle\overline{g_2'(t_2)dt_2}\right\}+$$

$$+\int_{L_1}\left\{R_{11}(T_1,T_1')g_1'(t_1)dt_1+S_{11}(T_1,T_1')\overline{g_1'(t_1)dt_1}\right\}=\pi f_1(t_1'),\ t_1'\in L_1,\ T_1'=t_1'-ih; \qquad (6)$$

$$\int_{L_2}\left\{\left\langle R_{22}(T_2,T_2')+S_{23}(T_3,T_2')\right\rangle g_2'(t_2)dt_2+\left\langle S_{22}(T_2,T_2')+R_{23}(T_3,T_2')\right\rangle\overline{g_2'(t_2)dt_2}\right\}+$$

$$+\int_{L_1}\left\{R_{21}(T_1,T_2')g_1'(t_1)dt_1+S_{21}(T_1,T_2')\overline{g_1'(t_1)dt_1}\right\}=\pi f_2(t_2'), \qquad (7)$$

$$t_2'\in L_2,\ T_2'=(t_2'+l_2)e^{i\alpha}+l_1$$

за умови однозначності переміщень

$$\int_{L_1} g_1'(t_1)dt_1 + 2i\,\mathrm{Im}(e^{i\alpha}\int_{L_2} g_2'(t_2)dt_2) = 0\,. \qquad (8)$$

Перейдемо до безрозмірних змінних, враховуючи параметричні рівняння контурів L_1, L_2 (5) та використавши заміни для невідомих функцій

$$\varphi_k(\xi) = \frac{g_k'(t_k)}{\sigma l_k}\frac{dt_k}{d\xi} = \frac{g_k'(t_k)}{\sigma}\frac{d\omega_k(\xi)}{d\xi}, \quad k = 1;\ 2\,, \qquad (9)$$

які необмежені на кінцях проміжків інтегрування [2]

$$\varphi_k(\xi) = w_k(\xi)/\sqrt{1-\xi^2}\,,\ \xi \in [-1;1],\ k = 1;2\,. \qquad (10)$$

Тут σ – параметр навантаження (розмірності напружень), $l_1 = |AB|/2$ – основний лінійний параметр задачі.

Записавши рівняння (6)–(8) у безрозмірному вигляді, методом квадратур [2, 3] зведемо їх до системи $N_1 + N_2 - 1$ комплексних лінійних алгебричних рівнянь відносно $N_1 + N_2$ невідомих значень функцій $w_1(\xi_{1k}), w_2(\xi_{2k})$ (10) у чебишовських вузлах $\xi_{jk} = \cos\left\{\pi(2k-1)/(2N_j)\right\}$, $k = \overline{1, N_j}$; $j = 1;2$. Для замкнутості отриманої системи лінійних алгебричних рівнянь додамо одну з умов ($w_1(+1) = 0$; $w_2(-1) = 0$) обмеженості невідомих функцій $g_1'(t_1)$, $g_2'(t_2)$ (9) у спільній вершині B (рис. 1). Запишемо ці умови у дискретному вигляді

$$\frac{1}{N_1}\sum_{k=1}^{N_1}(-1)^k w_1(\xi_{1k})\,\mathrm{ctg}\left(\frac{2k-1}{4N_1}\pi\right) = 0 \quad \text{або} \quad \frac{1}{N_2}\sum_{k=1}^{N_2}(-1)^k w_2(\xi_{2k})\,\mathrm{tg}\left(\frac{2k-1}{4N_2}\pi\right) = 0\,.$$

Враховуючи прийняті заміни (9), (10), коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) у кінці тріщини L_2 (вершині D) отримаємо зі співвідношення [2]

$$K_{\mathrm{I}}^{+} - iK_{\mathrm{II}}^{+} = -\sigma w_2(+1)\sqrt{\pi l_2 \left|\omega_2'(+1)\right|}\,/\,\omega_2'(+1)\,, \qquad \omega_2'(+1) = \{d\omega_2(\xi)/d\xi\}\big|_{\xi=1}\,.$$

Відносні КІН для загальної ламаної тріщини $L = L_3 \cup L_1 \cup L_2$ визначимо за формулою

$$F_{\mathrm{I}} - iF_{\mathrm{II}} \equiv \frac{K_{\mathrm{I}}^{+} - iK_{\mathrm{II}}^{+}}{\sigma\sqrt{\pi l}} = -\sqrt{\frac{l_2}{l}}\,w_2(+1)\frac{\sqrt{\left|\omega_2'(+1)\right|}}{\omega_2'(+1)}\,, \qquad (11)$$

де $\quad l = l_1 + 2l_2\cos\alpha$; $w_2(+1) = -\dfrac{1}{N_2}\sum_{k=1}^{N_2}(-1)^k w_2(\xi_{2k})\,\mathrm{ctg}\left(\dfrac{2k-1}{4N_2}\pi\right)$.

Розраховували відносні КІН у вершині D (11) за двох типів навантаження: внутрішнього тиску на берегах кусково-гладкої тріщини L = $EACBD$ ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma,\ \ \tau_1 = \tau_2 = 0$) та розтягу півплощини на нескінченності вздовж осі Ox напруженнями $p = \sigma$ (рис. 2–4). Визначили зміни КІН від відносної довжини ($a = l_2/l_1 \in [0{,}05;\ 0{,}95]$) нахиленої ($\alpha = \pi/6$) прямолінійної тріщини L_2 для різних глибин залягання (відстаней від поверхні L_0) ($\gamma = h/l_1 \in \{1; 1{,}5; 2; 4\}$) центральної частини L_1 кусково-прямолінійної тріщини L (рис. 2). Зростання довжини контуру L_2 призводить до істотно збільшення КІН, особливо для малих відносних глибин ($\gamma < 2$) за внутрішнього тиску на береги тріщини L (рис. 2*а*). Для великих значень параметра γ отримали відомі значення КІН для площини з ламаними кусково-прямолінійними тріщинами [2, 3].

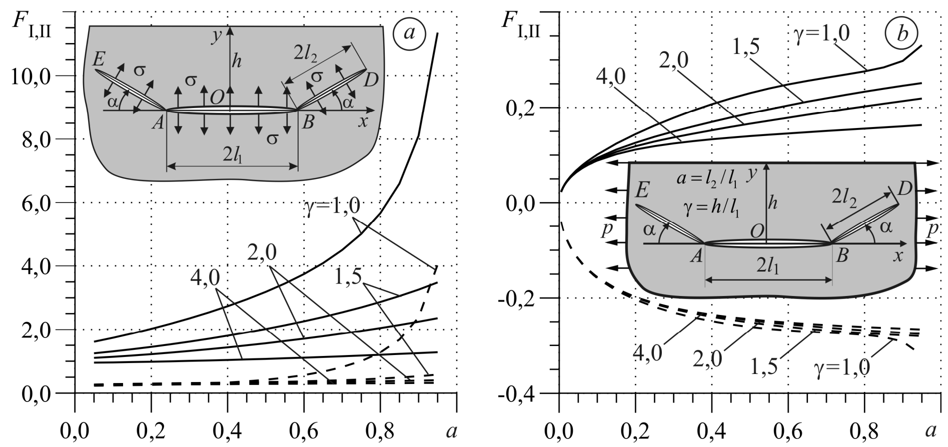

Рис. 2. Залежність відносних КІН у вершині D (F_{I} – суцільні лінії, F_{II} – штрихові) від параметра $a = l_2/l_1$ для $\alpha = \pi/6$ та різних значень $\gamma = h/l_1$ за внутрішнього тиску на тріщині L (a) та розтягу півплощини на нескінченності (b).

Fig. 2. Dependence of the relative stress intensity factors (SIF) at the tip D (F_{I} – solid lines, F_{II} – dashed lines) on parameter $a = l_2/l_1$ for $\alpha = \pi/6$ and different values of $\gamma = h/l_1$ for internal pressure at crack L (a) and tension of a half-plane at infinity (b).

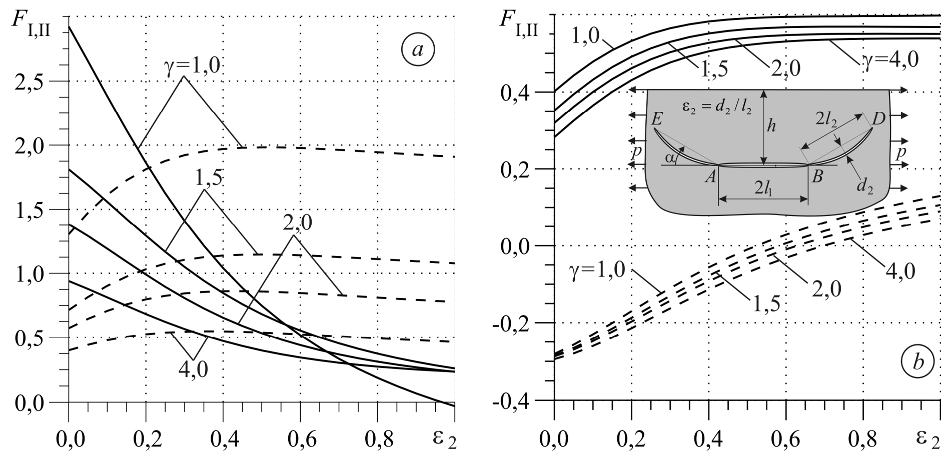

Рис. 3. Вплив параметра кривини $\varepsilon_2 = d_2/l_2$ параболічного контуру L_2 на КІН (F_{I} – суцільні лінії, F_{II} – штрихові) для $\alpha = \pi/6$ та різних значень $\gamma = h/l_1$ за внутрішнього тиску на тріщині L (a) та розтягу півплощини (b).

Fig. 3. Effect of parameters of curvature $\varepsilon_2 = d_2/l_2$ parabolic contour L_2 on SIF (F_{I} – solid lines, F_{II} – dashed lines) for $\alpha = \pi/6$ and different values of $\gamma = h/l_1$ for internal pressure at crack L (a) and tension of a half-plane (b).

Розглянули криволінійні форми контурів L_1, L_2 (5) вздовж дуги параболи

$$\omega_n(\xi) = \xi + i\varepsilon_n(\xi^2 - 1), \quad \xi \in [-1; +1], \quad n = 1;\, 2 \qquad (12)$$

у локальних системах координат $x_n O_n y_n$ (рис. 1). Тут $\varepsilon_n = d_n / l_n$, $n = 1;\, 2$ – відносні центральні прогини контурів L_1, L_2 (рис. 3b). Криволінійність контуру L_1 мало впливає на КІН (11). Для немалих довжин контурів L_2 (a > 0,1) зміна параметра $\varepsilon_1 = d_1 / l_1$ у межах [0; 1] призводить до відносних змін КІН, які не перевищують 5% (за незмінності форми та розташування контуру L_2). Визначили вплив криволінійності контуру L_2 на КІН (11) для різних відносних глибин $\gamma = h/l_1$ кусково-гладкої тріщини L (рис. 3). Розрахунки здійснили для $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 \in [0; 1]$, $\alpha = \pi/6$, $a = l_2/l_1 = 0,5$.

Дослідили вплив форми (12) та орієнтації (кута α) контуру L_2 відносно центральної прямолінійної ділянки L_1 на зміни КІН для різних глибин залягання тріщини L (параметр γ) за внутрішнього тиску на її берегах (рис. 4). Для прямолінійних контурів L_2 ($\varepsilon_2 = 0$) за a = 0,45 існують кути $\alpha \approx 0,5$ (28,6°), для яких $F_{II} = \text{const}$ незалежно від параметра γ (рис. 4*a*). За наближення вершини D відповідної параболічної тріщини L_2 ($\varepsilon_2 = 0,2$) до краю півплощини (γ = 1; $\alpha > 1,35$ (76°)) можливий контакт берегів тріщини біля вершини D ($F_I(D) < 0$, рис. 4*b*).

За відсутності контурів L_2, L_3 обчислені КІН для різних криволінійних тріщин L_1 та типів навантаження півплощини узгоджуються з відомими [2, 7].

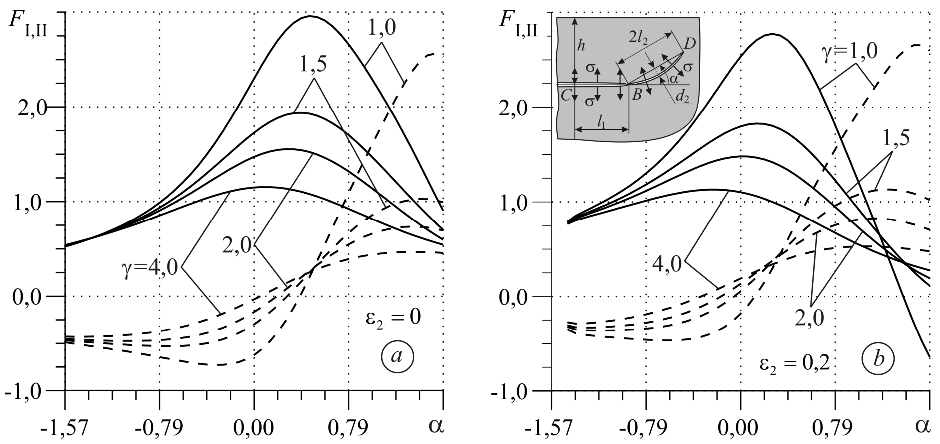

Рис. 4. Вплив кута нахилу прямолінійного (*a*) та параболічного (*b*) контуру L_2 на КІН (F_I – суцільні лінії, F_{II} – штрихові) для різних значень параметра $\gamma = h/l_1$ за внутрішнього тиску на тріщині L.

Fig. 4. Effect of inclination angle of rectilinear (*a*) and parabolic (*b*) crack contour on SIF (F_I – solid lines, F_{II} – dashed lines) for different values of parameter $\gamma = h/l_1$ for internal pressure at crack L.

Пружно-пластична задача в межах моделі смуг пластичності. У механіці руйнування набув поширення метод розв'язування плоских пружно-пластичних задач за припущення, що пластичні деформації локалізуються в тонких шарах (смугах пластичності), які виходять з вершин тріщини [4, 5, 10]. Ці шари моделювали розривами переміщень на лініях, де виконуються умови пластичності і поза якими тіло вважали пружним. Таким чином, задачу про розвиток смуг пластичності в тілі з тріщиною зводили до крайової задачі теорії пружності для області з тріщиною, з вершин якої виходили бічні розрізи, якими моделювали смуги пластичності. Їх розміри і орієнтації знаходили під час розв'язування задачі.

Розглянемо пружно-пластичну задачу для півнескінченної пластини S (плоский напружений стан) з криволінійною Oy-симетричною приповерхневою тріщиною L_1 за сталого внутрішнього тиску σ на її берегах за припущення, що з вершин тріщини A, B під деяким невідомим кутом α виходять дві симетричні прямолінійні пластичні смуги L_2, L_3 (рис. 5*a*). На цих відрізках зазнають розриву як нормальні, так і дотичні переміщення. Вважаємо, що матеріал півпластини ідеально пружно-пластичний, а на смугах L_2, L_3 виконуються умови текучості Треска–Сен-Венана (теорія максимального дотичного напруження). Тоді отримаємо плоску задачу теорії пружності для півпластини з вільним краєм L_0 (1) та розрізом $L = L_3 \bigcup L_1 \bigcup L_2$, на берегах якого задані крайові умови (2), у яких

$$p_1(t_1) = -\sigma,\ t_1 \in L_1;\quad p_n(t_n) = \sigma_Y,\ t_n \in L_n,\ n = 2; 3, \tag{13}$$

σ_Y – границя текучості матеріалу за розтягу. Крайову симетричну задачу (1), (2), (13) зведемо до розв’язування двох інтегральних рівнянь (6), (7) за умови (8) відносно невідомих функцій стрибків переміщень

$$g_k(t_k) = 2G\{(v_k^+(t_k) - v_k^-(t_k)) - i(u_k^+(t_k) - u_k^-(t_k))\}/(1+\kappa),\ t_k \in L_k,\ k = 1; 2. \tag{14}$$

Для визначення довжини $2l_2$ смуги пластичності L_2 та кута її орієнтації α використали умови обмеженості напружень у вершині D смуги L_2, які еквівалентні умові рівності нулю відносних КІН (11) $F_{\mathrm{I}}(l_2,\alpha) - iF_{\mathrm{II}}(l_2,\alpha) = 0$. Із розглянутих кутів α знаходимо такий ($\alpha = \alpha_*$), за якого довжина $2l_2$ смуги пластичності L_2 максимальна. Відносна довжина $2a = 2l_2/l_1$ та кут орієнтації α_* смуги пластичності суттєво залежать від глибини залягання тріщини L_1 відносно краю півплощини та рівня навантаження берегів тріщини (рис. 5). Форма тріщини L_1 (відносний прогин $\varepsilon_1 = d_1/l_1$) має суттєвий вплив на параметри смуги пластичності a і α_* лише за неглибокого розміщення тріщини L_1 ($\gamma = h/l_1 \le 1$).

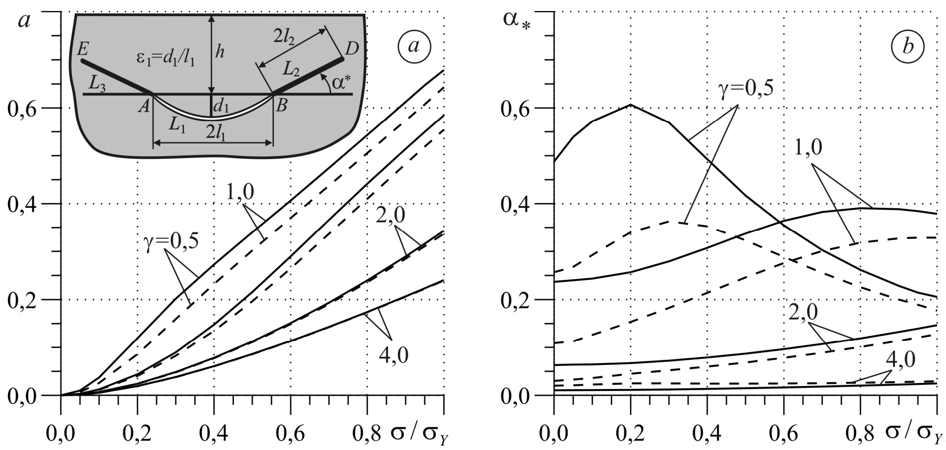

Рис. 5. Вплив рівня навантаження берегів прямолінійної (суцільні лінії) та параболічної $\varepsilon_1 = 0{,}25$ (штрихові) тріщин L_1 на відносну підвожину $a = l_2/l_1$ смуги пластичності (a) та кут її орієнтації α_* (b) для різних значень параметра $\gamma = h/l_1$.

Fig. 5. Influence of load level at rectilinear (solid lines) and parabolic $\varepsilon_1 = 0.25$ (dashed lines) crack faces on the relative half-length $a = l_2/l_1$ of plastic band (a) and the angle of orientation α_* (b) for different values of parameter $\gamma = h/l_1$.

Для великих глибин залягання прямолінійної тріщини L_1 ($h/l_1 \ge 100$) знайдені довжини смуг пластичності узгоджуються з відомими [4, 10] для нескінченної пластини за різних рівнів навантажень берегів тріщини.

Зауважимо, що для малих навантажень ($\sigma/\sigma_Y < 0{,}05$) тріщини L_1 кут нахилу смуги пластичності $\alpha_* \to \theta_* + \theta_B$ (рис. 5b), де θ_B – кут між додатною дотичною до контуру L_1 у точці *B* та віссю *Ox*, $\theta_* = 2\operatorname{arctg}\{(K_{\mathrm{I}} - \sqrt{K_{\mathrm{I}}^2 + 8K_{\mathrm{II}}^2})/(4K_{\mathrm{II}})\}$ – кут початкового поширення тріщини L_1 з вершини *B* (відносно дотичної у точці *B*), знайдений за σ_θ-критерієм поширення тріщини L_1 [2, 6]. Тут K_{I}, K_{II} – КІН у вершині *B* тріщини L_1.

Використовуючи вираз (14), компоненти вектора стрибка переміщень у вершинах *A*, *B* криволінійної тріщини L_1 (розкриття у вершинах тріщини) знаходимо за формулою

$$\begin{aligned} \delta_{\mathrm{I}}(\pm l_1) - i\delta_{\mathrm{II}}(\pm l_1) &\equiv \left(v_1^+(\pm l_1) - v_1^-(\pm l_1)\right) - i\left(u_1^+(\pm l_1) - u_1^-(\pm l_1)\right) = \\ &= (1+\kappa)g_1(\pm l_1)/(2G). \end{aligned} \tag{15}$$

Нормальна δ_{I} та дотична δ_{II} компоненти розкриття тріщини у її вершинах належать до основних параметрів нелінійної механіки руйнування. З їх допомогою визначають гранично-рівноважний стан тіл з тріщинами [4, 11].

Стрибки переміщень (15) у вершині *B* криволінійної тріщини L_1 пов'язані зі стрибками переміщень на початку бічного прямолінійного розрізу L_2 залежністю [4]

$$g_1(+l_1)\frac{\omega_1'(+1)}{|\omega_1'(+1)|} = g_2(-l_2)e^{i\alpha}, \tag{16}$$

де $$\frac{\omega_1'(+1)}{|\omega_1'(+1)|} = \frac{dt_1}{|dt_1|} = e^{i\theta_B}, \quad g_2(-l_2) = -\int_{-l_2}^{+l_2} g_2'(t)dt, \; g_2(+l_2) = 0.$$

Використавши вирази (9), (10), (15), (16), відносне розкриття у вершині *B* криволінійної тріщини L_1 обчислювали за формулою

$$(\Delta_{\mathrm{I}} - i\Delta_{\mathrm{II}})(B) \equiv \frac{G}{l_1\sigma_T}\{\delta_{\mathrm{I}}(B) - i\delta_{\mathrm{II}}(B)\} = -\frac{(1+\kappa)l_2}{2l_1}e^{i(\alpha-\theta_B)}\frac{\pi}{N_2}\sum_{k=1}^{N_2} w_2(\xi_{2k}). \tag{17}$$

Враховуючи симетрію задачі, для вершини *A* отримаємо:

$$(\Delta_{\mathrm{I}} - i\Delta_{\mathrm{II}})(A) = (\Delta_{\mathrm{I}} + i\Delta_{\mathrm{II}})(B).$$

Характер зміни відносних розкриттів Δ_{I}, Δ_{II} (17) у вершині *B* від прогину криволінійної тріщини L_1 (параметра $\varepsilon_1 = d_1/l_1$) для різних глибин *h* є подібним для всього діапазону зміни навантаження ($0 < \sigma/\sigma_Y < 1$), однак кількісно він суттєво залежить від рівня навантаження берегів тріщини L_1 (рис. 6). Для великих глибин *h* прямолінійної тріщини L_1 ($h/l_1 \geq 100$, $\varepsilon_1 = 0$) знайдені розкриття Δ_{I} ($\Delta_{\mathrm{II}} \to 0$) узгоджуються з відомими [4, 10] для нескінченної пластини за різних рівнів навантаження берегів прямолінійної тріщини.

Розглянуту модель смуг пластичності можна застосувати і для визначення іншого типу зон передруйнування (послаблених зв'язків, розрихлення тощо) різних матеріалів з тріщинами, коли замість величини σ_Y використати відповідні (визначені експериментально) характеристики цих зон [11].

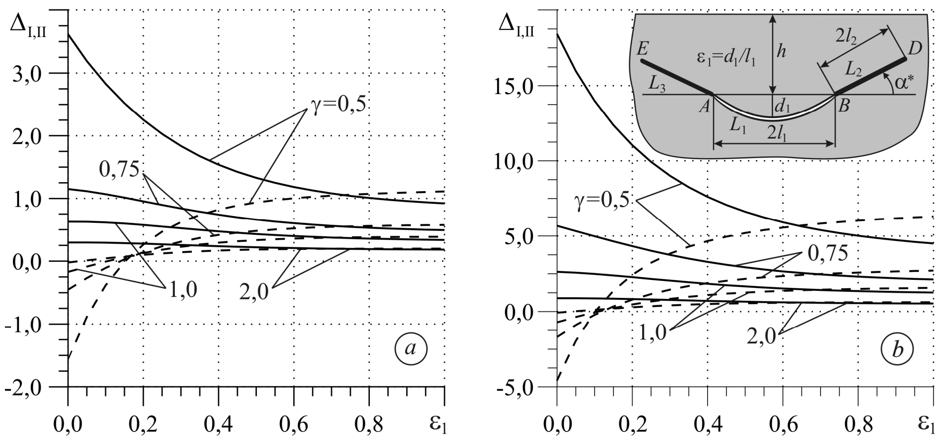

Рис. 6. Вплив параметра ε_1 параболічної тріщини L_1 на відносні розкриття тріщини (Δ_{I} – суцільні лінії, Δ_{II} – штрихові) у вершині B для різних значень $\gamma = h/l_1$ за внутрішнього тиску $\sigma/\sigma_Y = 0{,}5$ (a) та $\sigma/\sigma_Y = 0{,}9$ (b) на тріщині.

Fig. 6. Effect of parameter ε_1 of parabolic crack L_1 on the relative crack opening (Δ_{I} – solid lines, Δ_{II} – dashed lines) at the tip B for different values of $\gamma = h/l_1$ for internal pressure $\sigma/\sigma_Y = 0.5$ (a) and $\sigma/\sigma_Y = 0.9$ (b) at crack.

ВИСНОВКИ

Розв’язано плоскі задачі теорії пружності та механіки руйнування для півплощини з внутрішніми гладкими та кусково-гладкими криволінійними тріщинами. Для тонкої півпластини розглянуто пружно-пластичну задачу в межах моделі смуг пластичності, коли пластичні деформації локалізовані вздовж вузьких смуг, які виходять з вершин тріщини. Розв’язки побудованих систем сингулярних інтегральних рівнянь отримано методом механічних квадратур. Обчислено коефіцієнти інтенсивності напружень у вершинах кусково-гладких приповерхневих тріщин залежно від геометричних параметрів задачі за сталого внутрішнього тиску на берегах тріщини та розтягу півплощини на нескінченності. Визначено параметри (довжини та кути орієнтації) смуг пластичності, які виходять з вершин горизонтальної прямолінійної або параболічної тріщин для низки глибин їх залягання відносно краю півпластини та різних внутрішніх тисків на берегах тріщин. Виявлено, що характер поведінки розкриття у вершинах криволінійної тріщини в основному залежить від рівня її навантаження, форми та глибини залягання. Для глибоких тріщин обчислені величини (коефіцієнти інтенсивності напружень, розкриття у вершинах тріщини, довжини та орієнтації смуг пластичності) узгоджуються з відомими для нескінченної площини з відповідними тріщинами.

РЕЗЮМЕ. Методом сингулярных интегральных уравнений решены упругая и упруго-пластическая (в рамках модели полос пластичности) задачи теории упругости и механики разрушения для полуплоскости с внутренними гладкими и кусочно-гладкими трещинами. Численные решения интегральных уравнений получены методом механических квадратур. Определены коэффициенты интенсивности напряжений в вершинах кусочно-гладких приповерхностных трещин, исследованы их зависимости от геометрических параметров задачи при внутреннем давлении на берегах трещины и растяжения полуплоскости на бесконечности. В упруго-пластической задаче исследовано влияние свободного края полуплоскости, уровня нагрузки и формы трещины на раскрытия в ее вершинах, длины и углы ориентации прямолинейных полос пластичности, которые выходят из вершин трещины.

SUMMARY. The elastic and elastoplastic (in the model of plasticity bands) problems of elasticity theory and fracture mechanics for a half-plane with internal smooth and piecewise-smooth cracks are solved by the method of singular integral equations. The numerical solutions

of the integral equations are obtained by a quadrature technique. The stress intensity factors at the tips of piecewise smooth near-surface cracks are obtained and their dependences on the geometric parameters of the problem are identified at an internal pressure at the crack faces and half-plane tension at infinity. For elastoplastic problem we have investigated the influence of the free edge of the half-plate, level of loading and crack form on the crack tip opening, length and orientation angles of the rectilinear plasticity bands that come out of the crack tip.

1. *Саврук М. П.* Система криволинейных трещин в упругом теле при различных граничных условиях на их берегах // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1978. – **14**, № 6. – С. 74–84.

   (*Savruk M. P.* System of curved cracks in an elastic body under different boundary conditions on their lips // Materials Science. – 1978. – **14**, № 6. – P. 641–649.)
2. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
3. *Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В.* Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – К.: Наук. думка, 1989. – 248 с.
4. *Панасюк В. В., Саврук М. П.* Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – **28**, № 1. – С. 49–68.

   (*Panasyuk V. V. and Savruk M. P.* Model for plasticity bands in elastoplastic failure mechanics // Materials Science. – 1992. – **28**, № 1. – P. 41–57.)
5. *Саврук М. П., Данилович А. М.* Розвиток смуги пластичності біля вершини довільно орієнтованої тріщини у напівнескінченній тонкій пластині // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – **28**, № 3. – С. 25–31.

   (*Savruk M. P. and Danilovich A. M.* Growth of plasticity bands around the tip of an arbitrarily oriented crack in a semifinite thin plate // Materials Science. – 1992. – **28**, № 3. – P. 228–233.)
6. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
7. *Дацышин А. П., Марченко Г. П.* Взаимодействие криволинейных трещин с границей упругой полуплоскости // Физ.-хим. механика материалов. – 1984. – **20**, № 5. – С. 64–71.

   (*Datsyshin A. P. and Marchenko G. P.* Interaction of curvilinear cracks with the boundary of an elastic half-plane // Materials Science. – **20**, № 5. – P. 466–473.)
8. *Трибологічна* поведінка електролітично наводнених армко заліза та титанового сплаву ОТ-4 / В. І. Похмурський, Х. Б. Василів, В. А. Винар, М. Я. Головчук, Н. Б. Рацька // Наукові нотатки: Міжвуз. зб. – 2011. – № 31. – С. 270–276.
9. *Мирзаев Д. А., Мирзоев А. А.* Термодинамический аспект выделения растворенного водорода в микропорах металла // Вестник ЮУрГУ “Математика, физика, химия”. – 2006. – № 7. – С. 117–123.
10. *Саврук М. П., Казберук А.* Концентрація напружень у твердих тілах з вирізами // Механіка руйнування та міцність матеріалів: Довідн. посіб. / За заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Сполом, 2012. – Т. 14. – 384 с.
11. *Міцність* і довговічність авіаційних матеріалів та елементів конструкцій / О. П. Осташ, В. М. Федірко, В. М. Учанін, С. А. Бичков, О. Г. Моляр, О. І. Семенець, В. С. Кравець, В. Я. Дереча // Механіка руйнування та міцність матеріалів: Довідн. посіб. / За заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Сполом, 2007. – **9**. – 1068 с.

Одержано 16.06.2015