УДК 539.3

ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ НУЛЬОВИХ РАДІАЛЬНИХ НАПРУЖЕНЬ У ДОВГОМУ ПОРОЖНИСТОМУ ЦИЛІНДРІ НЕОДНОРІДНІСТЮ МАТЕРІАЛУ

Б. М. КАЛИНЯК

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Запропоновано метод визначення термомеханічних характеристик функціонально-градієнтного матеріалу, які забезпечують нульові радіальні напруження по товщині довгого порожнистого неоднорідного вздовж радіуса циліндра за нульових масових сил. Записано точний аналітичний вираз, який за заданих теплових навантажень на поверхнях є умовою відсутності колових та радіальних напружень у циліндрі й пов'язує тепловий коефіцієнт лінійного розширення, коефіцієнти теплопровідності, Пуассона матеріалу, осьові навантаження та температурне поле. Розраховано відповідні термомеханічні характеристики реально існуючого двокомпонентного матеріалу з використанням моделі простої суміші Фойгта.

Ключові слова: *порожнистий циліндр, функціонально-градієнтний матеріал, нульові напруження, стаціонарне температурне поле, термопружність, обернена задача термопружності, термомехнічні характеристики.*

Композити та функціонально-градієнтні матеріали зі заданими неперервними розподілами їх характеристик [1–3] призводять до збільшення терміну експлуатації виготовлених з них виробів за теплових та силових навантажень.

Тому виникає необхідність підбору такого розподілу термомеханічних характеристик матеріалу за заданого теплового навантаження, яке б мінімізувало або забезпечувало відсутність однієї зі складових напружень чи переміщень. Зрозуміло, що через неоднорідність теплофізичних характеристик матеріалу вони впливатимуть на температурне поле.

Нижче отримано умови відсутності радіальних та колових напружень за заданих стаціонарних теплових навантажень. Одержано точний аналітичний вираз зв'язку між температурним коефіцієнтом лінійного розширення матеріалу та його коефіцієнтом теплопровідності, який призводить до нульових значень компонент тензора напружень за стаціонарного температурного поля, яке моделюється законом теплопровідності Фур'є. Оскільки виготовлення матеріалів з потрібними механічними та тепловими характеристиками є окремим технологічним і науковим завданням, то розглянули матеріали, теплофізичні та механічні характеристики яких описують через характеристики їх двох складових моделлю простої суміші [4]. У цьому випадку отримані точні аналітичні вирази для відповідних концентрацій однієї складової матеріалу в іншій, а отже, і вирази для фізико-механічних характеристик матеріалу. Слід згадати праці, які спонукали досліджувати згадану задачу, а саме: умови відсутності термонапружень в однорідних оболонках [5], визначення температурних полів, які не призводять до напружень в однорідних тілах [6], обернені задачі термопружності, які виникають під час розв'язання задач ідентифікації термопружних полів за неповної інформації про теплові навантаження на поверхнях або задач оптимального за швидкодією нагрівання за обмежень на напруження чи температуру [7, 8].

Контактна особа: Б. М. КАЛИНЯК, e-mail: b-kalynyak@litech.net

Формулювання задачі. Розглянемо довгий неоднорідний вздовж радіальної змінної r порожнистий циліндр з внутрішнім R_1 та зовнішнім R_2 радіусами. У циліндрі з рівномірно розподіленими сталими силовими нульовими навантаженнями на його внутрішній та зовнішній поверхнях ($p_1 = p_2 = 0$) та сталою осьовою деформацією (e_z = const) наявне залежне від радіальної координати температурне поле $\overline{T}(r)$, яке визначене як розв'язок стаціонарної задачі теплопровідності, записаної у змінних $\rho = r / R_2$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\lambda(\rho)\frac{dT(\rho)}{d\rho}\right)+q_v(\rho)=0\,, \tag{1}$$

де $T(\rho)=\overline{T}(\rho R_2)$ з умовами на поверхнях $\rho=\rho_1=R_1/R_2$ і $\rho=R_2/R_2=1$, наприклад

$$\lambda(\rho_1)\frac{dT(\rho_1)}{d\rho}+\beta_1\left[T(\rho_1)-T_1\right]=0\,,\qquad \lambda(1)\frac{dT(1)}{d\rho}+\beta_2\left[T(1)-T_2\right]=0\,. \tag{2}$$

Подібні простіші формули можна записати для умов теплообміну першого і другого роду на межах циліндра: задані сталі температури $T(\rho_1)=T_1$, $T(1)=T_2$; перша з умов (2) і $\dfrac{dT(1)}{d\rho}=q_2$, де q_2 – інтенсивність потоку тепла віднесена до коефіцієнта теплопровідності. У формулах (1)–(2) T_1 , T_2 – температури середовищ біля внутрішньої та зовнішньої поверхонь циліндра; $\lambda(\rho)$ – коефіцієнт теплопровідності; $q_v(\rho)$ – густина теплових джерел у циліндрі; β_1 , β_2 – коефіцієнти теплообміну внутрішньої та зовнішньої поверхонь циліндра з середовищем.

Показано [9], що умовою відсутності радіальних, а отже, і колових напружень у довгому неоднорідному порожнистому циліндрі за нульових масових сил є

$$T(\rho)=\tilde{C}\frac{1}{\alpha(\rho)\left[V(1)+W(1)\right]}-p\frac{W(1)-V(1)\nu(\rho)}{\alpha(\rho)[V^2(1)-W^2(1)](1+\nu(\rho))}+T_0\,, \tag{3}$$

де $\tilde{C}$ – довільна стала; T_0 – відлікова температура, за якої відсутні напруження і переміщення; p – стале осьове навантаження; $\nu(\rho)$ – коефіцієнт Пуассона; $\alpha(\rho)$ – лінійний коефіцієнт теплового розширення; $V(\rho)=\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{\eta E(\eta)}{1-\nu^2(\eta)}d\eta$, $W(\rho)=\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\frac{\eta E(\eta)\nu(\eta)}{1-\nu^2(\eta)}d\eta$. Зв'язок між температурою і характеристиками матеріалу (3) отримано раніше [9] з запропонованого інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду [10] відносно радіального напруження, для розв'язування якого зведено класичну задачу квазістаціонарної незв'язної термопружності у напруженнях для неоднорідного довгого порожнистого циліндра зі сталими осьовими деформаціями. За відсутності силових навантажень вздовж осі циліндра (p = 0) або сталого коефіцієнта Пуассона ($\nu(\rho)=\mathrm{const}$) вираз (3) набуде простішого вигляду

$$T(\rho)=\frac{C}{\alpha(\rho)}+T_0\,, \tag{4}$$

де

$$C=\frac{\tilde{C}}{\left[V(1)+W(1)\right]}\,.$$

Потрібно визначити характеристики матеріалу $\alpha(\rho)$, $\lambda(\rho)$, $\nu(\rho)$ за заданого температурного поля $T(\rho)$, коли задовольняються рівняння (1)–(3).

Характеристики функціонально-градієнтного матеріалу, які призводять до відсутності радіальних напружень. Оскільки розподіли температури (3) або (4) повинні бути розв'язком неоднорідного рівняння теплопровідності (1), то з рівняння (1) отримаємо такий вираз для інтенсивності теплових джерел:

$$q_v(\rho) = -\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\lambda(\rho)\frac{dT(\rho)}{d\rho}\right). \tag{5}$$

Якщо формулу (3) підставити у формулу (5), то отримаємо вираз для густини теплових джерел, які забезпечать нульові напруження за заданих характеристик матеріалу при наявності осьових навантажень

$$q_v(\rho) = A(\rho)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\lambda(\rho)\right] + D(\rho)\rho\lambda(\rho), \tag{6}$$

де

$$A(\rho) = -\frac{C}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{\alpha(\rho)}\right] + \frac{pW(1)}{V^2(1)-W^2(1)}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left\{\frac{1}{\alpha(\rho)[1+\nu(\rho)]}\right\} -$$
$$-\frac{pV(1)}{V^2(1)-W^2(1)}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left\{\frac{\nu(\rho)}{\alpha(\rho)[1+\nu(\rho)]}\right\},$$

$$D(\rho) = -C\frac{1}{\rho}\frac{d^2}{d\rho^2}\left[\frac{1}{\alpha(\rho)}\right] + \frac{pW(1)}{V^2(1)-W^2(1)}\frac{1}{\rho}\frac{d^2}{d\rho^2}\left\{\frac{1}{\alpha(\rho)[1+\nu(\rho)]}\right\} -$$
$$-\frac{pV(1)}{V^2(1)-W^2(1)}\frac{1}{\rho}\frac{d^2}{d\rho^2}\left\{\frac{\nu(\rho)}{\alpha(\rho)[1+\nu(\rho)]}\right\}.$$

Оскільки технічно важко забезпечити потрібний розподіл теплових джерел у тілі, то важливим є їх відсутність ($q_v(\rho)=0$). З цієї точки зору вирази (5) і (6) можна трактувати як диференціальні рівняння, які пов'язують характеристики матеріалу, що призводять до нульових напружень у тілі. З диференціального рівняння (5) при $q_v(\rho)=0$ отримаємо:

$$\rho\lambda(\rho)\frac{dT(\rho)}{d\rho} = \overline{B}, \tag{7}$$

де $\overline{B}$ – довільна стала. З рівняння (7) отримаємо такий вираз, який пов'язує коефіцієнт теплопровідності $\lambda(\rho)$ з іншими термомеханічними характеристиками матеріалу

$$\lambda(\rho) =$$
$$= \frac{\overline{B}}{\rho}\frac{1}{C\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\alpha(\rho)}\right) - p\frac{W(1)}{V^2(1)-W^2(1)}\frac{d}{d\rho}\left\{\frac{1}{\alpha(\rho)[1+\nu(\rho)]}\right\} + p\frac{V(1)}{V^2(1)-W^2(1)}\frac{d}{d\rho}\left\{\frac{\nu(\rho)}{\alpha(\rho)[1+\nu(\rho)]}\right\}}. \tag{8}$$

За нульових осьових навантажень або сталого коефіцієнта Пуассона матимемо:

$$\lambda(\rho) = \frac{\overline{B}}{\rho}\frac{1}{C\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\alpha(\rho)}\right)}. \tag{9}$$

Зрозуміло, що диференціальні рівняння (8) або (9) можна розв'язати точно для коефіцієнтів теплового лінійного розширення або Пуассона, відповідно. Однак такий підхід, хоча він і дає зв'язок між характеристиками матеріалу, який забезпечує нульові радіальні та колові напруження, не можна вважати задовільним через технологічні труднощі виготовлення матеріалів з наперед заданими довільними теплофізичними та механічними характеристиками.

Тому розглянемо двокомпонентні функціонально-градієнтні матеріали, характеристики яких визначають через характеристики складових моделлю простої суміші [4] (модель Фойгта)

$$P(\rho) = P_1\, S_1(\rho) + P_2\, S_2(\rho)\,, \tag{10}$$

де P_1, P_2 – характеристики складових матеріалу; $S_1(\rho)$ – концентрація першого матеріалу в другому; $S_2(\rho)$ – концентрація другого матеріалу в першому, $S_1(\rho)+$ $+S_2(\rho)=1$ і $S_i(\rho)>0, i=1, 2$. З формул (9) і (10) отримаємо:

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\alpha_2+(\alpha_1-\alpha_2)S_1(\rho)}\right)=\frac{B}{\rho}\frac{1}{\lambda_2+(\lambda_1-\lambda_2)S_1(\rho)}\text{ , де } B=\frac{\overline{B}}{C}. \tag{11}$$

Розв'язок нелінійного диференціального рівняння (11) такий:

$$S_1(\rho)=\frac{\alpha 1\lambda_2-\alpha_2\lambda_1-\alpha_2(\lambda_1-\lambda_2)W_L(z(\rho))}{(\lambda_1-\lambda_2)(\alpha_1-\alpha_2)W_L(z(\rho))}\,, \tag{12}$$

де $z(\rho)=\dfrac{(\alpha_1\lambda_2-\alpha_2\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)}\rho^{Ba_l}\exp(a_l BB_1)$; $a_l=\dfrac{(\alpha_1-\alpha_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)}$; B_1 – довільна стала; $W_L(z)$ – W або Ω функція Лямберта [11]. Вираз (12) виражає закон зміни концентрації складової 1-го матеріалу по товщині циліндра, який призводить до нульового радіального напруження. Температурні навантаження, коефіцієнти теплопровідності, теплового розширення, концентрації складових, пов'язані виразами (4), (9), (12) через сталі $\overline{B}$, B_1, C. Це накладає обмеження на температурні навантаження, характеристики матеріалів складових і їх концентрації, а тому є різні можливості формулювання технічно здійсненних умов отримання нульових радіальних та колових напружень по товщині циліндра. Розглянемо одну з них, яка може мати найширше практичне застосування.

Приклад. Потрібно підібрати такий двокомпонентний функціонально-градієнтний матеріал, який можна описати моделлю простої суміші так, щоб за заданого перепаду температур отримати нульовий розподіл колових і радіальних напружень по товщині циліндра.

Задання максимального значення температури на одній із поверхонь і перепаду температур між ними призводить до визначення сталої C з виразу (4) за одним із значень лінійного коефіцієнта теплового розширення на поверхні $\alpha(1)$ або $\alpha(\rho_1)$, якщо задані умови $T(\rho_1)=T_1$ (або $T(1)=T_2$) і $T_2-T_1=\Delta T_{21}$, та зі значень $\alpha(1)$ або $\alpha(\rho_1)$ з інтервалу $[\alpha_1;\alpha_2]$ характеристик вибраних матеріалів з виразу

$$C\left(\frac{1}{\alpha(1)}-\frac{1}{\alpha(\rho_1)}\right)=\Delta T_{21}\,. \tag{13}$$

З формули (10) можна визначити граничні значення концентрації $S_1=S(\rho_1)$ та $S_2=S(1)$, які відповідають значенням $\alpha(\rho_1)$ та $\alpha(1)$ за вибраних характеристик матеріалів складових. Якщо невід'ємних розв'язків менших або рівних одиниці для S_1 та S_2 не існує, то це значить, що вибрали не ті матеріали або в межах заданого перепаду температур для них нульових напружень у циліндрі не можна забезпечити. У вираз для концентрації входять дві сталі B і B_1, для визначення яких використаємо рівняння, отримані з формули (12)

$$S_i = \frac{\alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_1 - \alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2)W_L(z_i)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\alpha_1 - \alpha_2)W_L(z_i)}, \; z_1 = z(\rho_1), \; z_2 = z(1) \;\; i = 1,2 . \qquad (14)$$

Ці рівняння мають точні розв'язки для z_1 і z_2

$$z_1 = \frac{(\alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_1)\exp\left\{\dfrac{\alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)\left[\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2)S_1\right]}\right\}}{(\lambda_1 - \lambda_2)\left[\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2)S_1\right]},$$

$$z_2 = \frac{(\alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_1)\exp\left\{\dfrac{\alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)\left[\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2)S_2\right]}\right\}}{(\lambda_1 - \lambda_2)\left[\alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2)S_2\right]}. \qquad (15)$$

З виразів (15) після використання рівнянь для $z(\rho)$ отримано такі формули для сталих B і B_1:

$$B = \frac{\ln\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)(\lambda_1 - \lambda_2)}{\ln(\rho_1)(\alpha_1 - \alpha_2)}, \quad B_1 = \frac{\ln\left[\dfrac{z_2(\lambda_1 - \lambda_2)}{\alpha_1\lambda_2 - \alpha_2\lambda_1}\right]\ln(\rho_1)}{\ln\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}. \qquad (16)$$

Отже, для двокомпонентного матеріалу задачу зводять до визначення виразу для концентрації (12) і сталих (16).

Підберемо двокомпонентний (силіцид кремнію і нержавіюча сталь [4]) металокерамічний матеріал для забезпечення у циліндрі нульових радіальних та колових напружень за таких температур на поверхнях – $T_1 = 900$ K, $\Delta T_{21} = 300$ K та $T_0 = 300$ K і характеристик складових $\lambda_1 = 13,72$ W/(m·K), $\lambda_2 = 15,78$ W/(m·K), $\alpha_1 = 5,83\text{e}-6\ \text{K}^{-1}$, $\alpha_2 = 12,872\text{e}-6\ \text{K}^{-1}$. Модуль пружності та коефіцієнт Пуассона не подаємо, оскільки в цій моделі їх значення входять у сталу C у вигляді означених інтегралів по товщині циліндра, а тому не впливають на остаточні результати. За цих характеристик і температур на поверхні $C = 0,003480$, $S_1 = 1,0$, $S_2 = 0,1765$. Відповідні розподіли температури, концентрації складової S_1 і характеристик матеріалу зображені на рис. 1, 2.

Вираз для поздовжніх деформацій [9] за відсутності силових навантажень та масових сил $e_z = \dfrac{d_2V(1) - d_1W(1)}{V^2(1) - W^2(1)}$, де $d_1 = -f(1)$, $d_2 = \displaystyle\int_{\rho_1}^{1} \frac{\eta E\Phi(\eta)}{1 - \nu(\eta)} d\eta$, $f(1) = -\displaystyle\int_{\rho_1}^{1} \frac{E\eta}{1-\nu}\Phi(T(\eta))d\eta$, $\Phi(\rho) = \alpha(\rho)\left[T(\rho) - T_0\right] = C$ отримали зі зв'язків між деформаціями та напруженнями. Отже, за відсутності радіальних і колових напружень $e_z = C = 0,003480$, а зі зв'язків між деформаціями та напруженнями матимемо: $e_r = e_\varphi = C$ та $\sigma_z = 0$. З рівності Коші $e_\varphi = u_r / \rho$, отримаємо: $u_r = \rho e_\varphi =$

$= \rho C$. Це означає, що стала C у формулах (4) та (9) в умовах відсутності силових навантажень та масових сил і є осьовою деформацією.

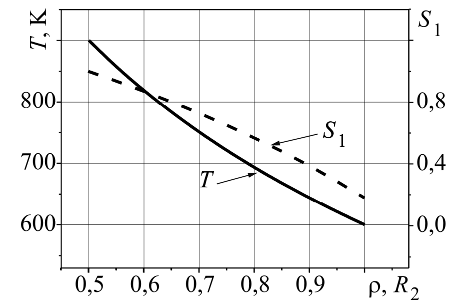

Рис. 1. Fig. 1.

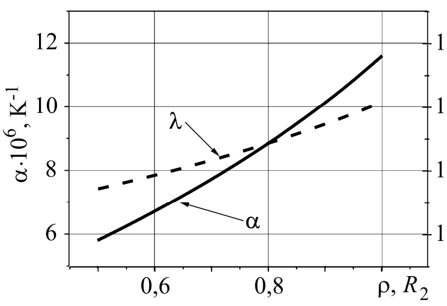

Рис. 2. Fig. 2.

Рис. 1. Залежності розподілу температури $T(\rho)$ і концентрації матеріалу $S_1(\rho)$ від радіальної координати.

Fig. 1. Dependences of the temperature distribution $T(\rho)$ and material concentration $S_1(\rho)$ on the radial coordinate.

Рис. 2. Залежності коефіцієнтів теплового лінійного розширення $\alpha(\rho)$ і теплопровідності $\lambda(\rho)$ від радіальної координати.

Fig. 2. Dependences of the coefficients of thermal linear expansion $\alpha(\rho)$ and thermal conductivity $\lambda(\rho)$ on the radial coordinate.

ВИСНОВКИ

Отримано точний аналітичний вираз, який пов'язує температурне поле – розв'язок стаціонарної задачі теплопровідності, силові осьові навантаження, характеристики матеріалу, і є умовою відсутності радіальних і колових напружень у циліндрі, що слідує з рівняння рівноваги, а також осьового напруження. Для функціонально-градієнтного матеріалу, який описують моделлю простої суміші, отримано точні аналітичні вирази для концентрації складових, яка забезпечує нульові компоненти тензора напружень. Адекватність підходу підтверджена обчисленими концентраціями складових у реально існуючому функціонально-градієнтному матеріалі, які повинні забезпечити відсутність радіальних та колових напружень у неоднорідному довгому циліндрі.

У межах моделі простої суміші за відсутності осьових навантажень або за сталого по товщині циліндра коефіцієнта Пуассона, модуль пружності і коефіцієнт Пуассона не впливають на розподіл температури та визначення інших характеристик матеріалу, які призводять до відсутності радіальних та колових напружень, а за осьових навантажень слід брати до уваги залежність коефіцієнта Пуассона від радіальної координати.

РЕЗЮМЕ. Предложен метод определения термомеханических характеристик функционально-градиентного материала, обеспечивающего нулевые радиальные напряжения по толщине длинного полого неоднородного вдоль радиуса цилиндра при нулевых массовых силах. Получено точное аналитическое выражение, являющееся при заданных тепловых нагрузках условием отсутствия окружных и радиальных напряжений и связывающее тепловой коэффициент линейного расширения, коэффициенты теплопроводности и Пуассона материала, осевые нагрузки и температурное поле. Проведены расчеты соответствующих термомеханических характеристик для реально существующего двухкомпонентного материала с использованием модели простой смеси Фойгта.

SUMMARY. The method to determine the thermomechanical characteristics of a functionally graded material ensuring along a radius the zero radial and circumferential stresses in the

inhomogeneous long hollow cylinder for zero mass forces are proposed. The exact analytical relation under thermal linear expansion coefficient, thermal conductivity coefficient, Poisson's ratio of the material, force loading and temperature field providing the absence of radial and circumferential stresses is obtained. The numerical calculations of the thermo-mechanical characteristics for real existing material using the simple mixed Voigt model are carried out.

1. *New* Analysis for The FGM Thick Cylinders Under Combined Pressure and Temperature Loading / K. Abrinia, H. Naee, F. Sadeghi, and F. Djavanroodi // American J. Appl. Sci. – 2008. – **5**, № 7. – C. 852–859.
2. *Bohidar S. K., Sharma R., and Mishra P. R.* Functionally graded materials: A critical review // Int. J. Research. – 2014. – **1**, № 7. – P. 289–301.
3. *Functionally* graded materials in the 21st century: a workshop on trends and forecasts / Ed.: Kiyoshi Ichikawa. – US: Springer, 2001. – **XVI**. – 242 p.
4. *Shen H.-S.* Functionally graded materials: Nonlineal analysis of plates and shells. – CRC Press, 2009. – 280 p.
5. *Підстригач Я. С.* Вибрані праці. – К.: Наук. думка, 1995. – 460 с.
6. *Melan H. and Parkus H.* Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. – Wien: Springer-Verlag, 1953. – 114 s.
7. *Вигак В. М.* Управление температурными напряжениями и перемещениями. – К.: Наук. думка, 1988. – 312 с.
8. *Кушнір Р. М., Попович В. С., Ясінський А. В.* Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл // Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра. – Львів: Сполом, 2011. – **5**. – 256 с.
9. *Калиняк Б. М.* Забезпечення нульових радіальних напружень у неоднорідному довгому порожнистому циліндрі стаціонарним температурним полем // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2016. – № 1. – С. 91–97.
10. *Калиняк Б. М.* Рівняння Фредгольма 2-го роду відносно радіальних напружень для визначення термопружного стану неоднорідного порожнистого довгого циліндра // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 3. – С. 141–147.
11. *On the Lambert* W function / R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. G. Hare, D. J. Jeffrey, and D. E. Knuth // Advances in Computational Mathematics. – 1996. – **5**. – P. 329–359.

Одержано 26.05.2015