

ВИЗНАЧЕННЯ РОЗМІРУ ПЛАСТИЧНОЇ ЗОНИ В ОРТОТРОПНІЙ ОБОЛОНЦІ ДВОЯКОЇ КРИВИНИ З ПОВЕРХНЕВОЮ ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ ЗМІЦНЕННЯ МАТЕРІАЛУ

К. М. ДОВБНЯ, Н. Д. ЄРЬОМІНА

Донецький національний університет

З використанням δ_c -моделі розглянуто задачу про поверхневу тріщину в ортотропній оболонці, виготовленій із матеріалу зі зміцненням. Подано аналітичне та числове розв'язання задачі, а також проаналізовано вплив зміцнення, кривини оболонки, навантаження та довжини тріщини на розмір пластичних зон.

Ключові слова: зміцнення, поверхнева тріщина, ортотропна оболонка, δ_c -модель.

Сьогодні постійно зростають вимоги до конструкційних матеріалів, найважливішою з яких є міцність, тобто здатність протистояти руйнуванню. Тріщини суттєво зменшують несучу здатність оболонкових конструкцій, тому багато дослідників вивчають напруження в їх околі у межах теорії крихкого руйнування. Однак у більшості матеріалів на продовженні тріщини вузькою смугою поширюються зони пластичних деформацій. Використовуючи аналог δ_c -моделі, розглядали ізотропні оболонки [1–3]. Тут зону пластичної деформації моделюють лініями розриву переміщень та кутів повороту. Пізніше з її допомогою розглядали ортотропні оболонки довільної кривини з тріщинами різноманітної конфігурації [4–6] (наскрізні, поверхневі, внутрішні). Але досліджували ідеально пружно-пластичний матеріал. Однак на практиці матеріали можуть деформуватися за межу пластичності, тобто зміцнюватися. Запропонували [7–9] узагальнену δ_c -модель Леонова–Панасюка–Дагдейла, яка враховує таке зміцнення [10, 11]. Вивчали також [10] ізотропні оболонки. Розглянемо поверхневу тріщину в ортотропній оболонці, змодельовану за допомогою аналога δ_c -моделі, узагальненого для таких матеріалів.

Формулювання задачі. Дослідимо поверхневу тріщину, розташовану в пологій пружно-пластичній ортотропній оболонці сталої товщини h (рис. 1). Тріщина орієнтована вздовж однієї з ліній головних кривин серединної поверхні оболонки, виготовленої з матеріалу, що

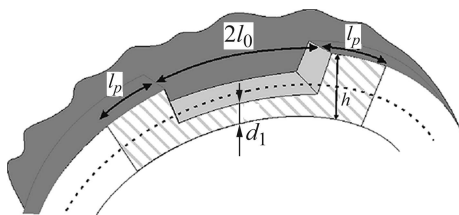


Рис. 1. Оболонка з поверхневою тріщиною.

Fig. 1. A shell with a surface crack.

лінійно зміцнюється під час деформації. Вважаємо, що глибина тріщини d , $d_1 = h - d$, де d_1 – товщина оболонки під тріщиною, береги її не контактують та навантажені симетричними відносно лінії тріщини моментами та зусиллями. Припустимо, що розміри тріщини великі проти товщини оболонки та малі порівняно з іншими її лінійними розмірами. Тому розглядаємо задачу, використовуючи двовимірну теорію оболонок та моделюючи тріщину математичним розрізом серединної поверхні оболонки. Вивчимо поведінку пласт-

ичної зони, використовуючи двовимірну теорію оболонок та моделюючи тріщину математичним розрізом серединної поверхні оболонки. Вивчимо поведінку пласт-

тичних зон на кінцях тріщини в різних ортотропних матеріалах за різних умов (залежно від довжини тріщини, навантаження та кривини оболонки).

Під дією зовнішнього розтягального навантаження на подовженні тріщини виникають зони пластичних деформацій, які згідно з узагальненим аналогом δ_c -моделі замінюємо математичними розрізами невідомої довжини l_p . Для пластичної зони невідомі нормальне зусилля T та згинальний момент M вважаємо розподіленими за лінійним законом:

$$T(lx) = Pb(x), \quad M(lx) = Hb(x),$$

де $b(x) = \frac{1}{2} \left((1 - m^*) \frac{|x| - \tau^*}{1 - \tau^*} + m^* + 1 \right)$, $\tau^* \leq |x| \leq 1$, $m^* = \sigma_B / \sigma_\tau$ – параметр зміц-

нення матеріалу, σ_B та σ_τ – границі міцності та пластичності матеріалу; x – координата на осі Ox , вздовж якої розташована тріщина. Невідомі сталі P та H повинні задовольняти умову пластичності Треска

$$\frac{P}{h\sigma_\tau} + \left| \frac{6H}{h^2\sigma_\tau} \right| = 1.$$

Отже, використовуючи δ_c -модель, реальну тріщину завдовжки $2l_0$ замінюємо на фіктивну невідомої довжини $2l$, де $l = l_0 + l_p$, на берегах якої виконуються умови

$$T_2(lx) = \begin{cases} T(lx) - T_2^*, & \tau^* \leq |x| \leq 1, \\ T^l - T_2^*, & |x| \leq \tau^*; \end{cases} \quad M_2(lx) = \begin{cases} M(lx) - M_2^*, & \tau^* \leq |x| \leq 1, \\ M^l - M_2^*, & |x| \leq \tau^*, \end{cases} \quad (1)$$

де T_2^* , M_2^* – характеристики зовнішнього навантаження; T^l , M^l – невідомі мембранні зусилля та згинальний момент:

$T^l = \sigma'_\tau d_1$, $M^l = -\frac{\sigma'_\tau}{2} d_1 (h - d_1)$, $\sigma'_\tau = \frac{\sigma_\tau + \sigma_B}{2}$, $\tau^* = 1 - \frac{l_0}{l}$ – відносний розмір пластичної зони.

Аналітичний розв'язок. Зведемо задачу до системи сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) типу Коші

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 K_{11}(x-t)\psi_1(t)dt + \int_{-1}^1 K_{13}(x-t)\psi_3(t)dt = -\pi T_2(x), \\ \int_{-1}^1 K_{31}(x-t)\psi_1(t)dt + \int_{-1}^1 K_{33}(x-t)\psi_3(t)dt = -\pi c^2 R_2 M_2(x), \end{cases} \quad (2)$$

ядра якої мають вигляд [4, 8]

$$K_{11}(x-t) = \frac{1}{(x-t)} - 2\sqrt{\frac{1-\mu}{a}}\beta^2\chi^{-2}(x-t)\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)}(\beta\chi^{-1}|x-t|),$$

$$K_{31}(x-t) = 2\frac{\beta^2(x-t)}{\chi^2\sqrt{a}}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(2)}(\beta\chi^{-1}|x-t|),$$

$$K_{13}(x-t) = \frac{K_{31}(x-t)\sqrt{1-\mu}}{(1-\nu)(3+\nu-2\mu)},$$

$$K_{33}(x-t) = \frac{1}{x-t} + \frac{2\beta^2(x-t)}{\chi^2(1-\nu)(3+\nu-2\mu)\sqrt{a}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(3)}(\beta\chi^{-1}|x-t|),$$

$$a_n^{(1)}(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |d^2| l_2^{-2} \cos^3 \vartheta \cos(2n-1)\vartheta \cdot \text{Im} G_{n,n-1}(s|d|\sqrt{i}) d\vartheta,$$

$$a_n^{(2)}(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |d^2| (l_1 l_2)^{-1} \cos \vartheta (\nu \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) \cos(2n-1)\vartheta \cdot \text{Im} G_{n,n-1}(s|d|\sqrt{i}) d\vartheta,$$

$$a_n^{(3)}(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |d^2| l_1^{-2} (\nu \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta)^2 \frac{\cos(2n-1)\vartheta}{\cos \vartheta} \text{Im} G_{n,n-1}(s|d|\sqrt{i}) d\vartheta,$$

$$\nu = \sqrt{\nu_1 \nu_2}, \quad \chi^2 = \sqrt{E_1/E_2}, \quad \mu = 1 - 2(1+\nu)G_{12}/E, \quad a = \frac{2a - \mu + \mu\nu}{2},$$

$$d^2 = \frac{\sqrt{1-\mu} \cos^2 \vartheta + \lambda \sin^2 \vartheta}{a l_2}, \quad l_1^2 = 1 - 4\bar{\mu}(1+\nu)\cos^2(2\vartheta),$$

$$l_2^2 = 1 + 4\bar{\mu}(1-\nu)\cos^2(2\vartheta), \quad \bar{\mu} = \mu/8a, \quad c^4 = 12(1-\nu^2)/R_2 h^2, \quad \lambda = R_2/R_1,$$

де E_1, E_2 – модулі Юнга; ν_1, ν_2 – коефіцієнти Пуассона; G_{12} – модуль зсуву для поверхонь, паралельних до серединної поверхні оболонки; R_1, R_2 – радіуси головних кривин серединної поверхні оболонки; λ – параметр, який характеризує її кривину; β – параметр, що відповідає за орієнтацію тріщини (поздовжня або поперечна); $G_{n,\nu}(z)$ – спеціальна функція [9].

Розв'язання системи СІР (2) ускладнене через розривність правих її частин та вигляд ядер, тому невідомі функції $\psi_1(t)$ та $\psi_3(t)$ запишемо як суму двох функцій:

$$\psi_i(t) = g_i(t) + h_i(t), \quad i = 1, 3, \quad (3)$$

де $h_1(t)$ та $h_3(t)$ – розв'язки рівнянь з розривною правою частиною

$$\int_{-1}^1 \frac{h_i(t)}{t-x} dt = \pi f_i(x), \quad f_i(x) = \begin{cases} -a_i + b(x), & \tau^* < |x| < 1, \\ -a_i, & |x| < \tau^*, \end{cases} \quad i = 1, 3, \quad (4)$$

які мають вигляд

$$h_1(t) = P h_n(t) - T^l h_s(t), \quad h_3(t) = c^2 R_2 H h_n(t) - c^2 R_2 M^l h_s(t),$$

$$\text{де} \quad h_s(t) = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{\tau^* - t}{\tau^* + t} \cdot \frac{1 + t\tau^* + \sqrt{(1-(\tau^*)^2)(1-t^2)}}{1 - t\tau^* + \sqrt{(1-(\tau^*)^2)(1-t^2)}} \right|,$$

$$h_n(t) = \frac{m^* + 1 - 2\tau^*}{2(1-\tau^*)} h_s(t) + \frac{t}{\pi} \frac{m^* - 1}{2(1-\tau^*)} \ln \left| \frac{1 - \left(t\tau^* + \sqrt{(1-(\tau^*)^2)(1-t^2)} \right)^2}{(\tau^* - t)(\tau^* + t)} \right|.$$

Сталі $a_i, i = 1, 3$, знайдемо з умови існування розв'язку рівнянь (4):

$$a_1 = t a' + \frac{2}{\pi} t^l \arcsin \tau^*, \quad a_3 = m a' + \frac{2}{\pi} m^l \arcsin \tau^*,$$

$$a' = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1-m^*}{1-\tau^*} \sqrt{1-(\tau^*)^2} + \frac{m^*+1-2\tau^*}{1-\tau^*} \arccos \tau^* \right],$$

$$t = \frac{P}{T_2^*}, \quad t^l = \frac{T^l}{T_2^*}, \quad m = \frac{c^2 R_2 H}{T_2^*}, \quad m^l = \frac{c^2 R_2 M^l}{T_2^*}.$$

де

Отже, функції (3) можемо переписати так:

$$\Psi_1(t) = g_1(t) + t h_n(t) - t^l h_s(t), \quad \Psi_3(t) = g_3(t) + m h_n(t) - m^l h_s(t).$$

Враховуючи новий вигляд функцій $\Psi_i(t)$ та констант a_i , $i=1,3$, після відповідних перетворень систему запишемо у вигляді

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{-1}^1 K_{11}(x-t) g_1(t) dt + t \left[\int_{-1}^1 K_{11}^r(x-t) h_n(t) dt + \pi a' \right] + \int_{-1}^1 K_{13}(x-t) g_3(t) dt + \\ & \quad + m \int_{-1}^1 K_{13}(x-t) h_n(t) dt = \\ & = \pi + t^l \left[\int_{-1}^1 K_{11}^r(x-t) h_s(t) dt - 2 \arcsin(\tau^*) \right] + m^l \int_{-1}^1 K_{13}(x-t) h_s(t) dt, \\ & \int_{-1}^1 K_{31}(x-t) g_1(t) dt + t \int_{-1}^1 K_{31}(x-t) h_n(t) dt + \int_{-1}^1 K_{33}(x-t) g_3(t) dt + \\ & \quad + m \left[\int_{-1}^1 K_{33}^r(x-t) h_n(t) dt + \pi a' \right] = \\ & = t^l \int_{-1}^1 K_{31}(x-t) h_s(t) dt + m^l \left[\int_{-1}^1 K_{33}^r(x-t) h_s(t) dt - 2 \arcsin(\tau^*) \right]. \end{aligned} \right.$$

Застосовуючи метод механічних квадратур для функцій, обмежених на кінцях проміжку інтегрування, отримали СІР з неперервними правими частинами для невідомих m , t , $g_1(t)$, $g_3(t)$, а отже, звели задачу до системи лінійних алгебричних рівнянь, яку розв'язали методом Гауса. Відносний розмір пластичної зони $\tau^* = l_0/l$ отримали методом послідовних наближень.

Числові результати. Параметри ортотропних матеріалів псевдосферичної, циліндричної та сферичної оболонок з поверхневою тріщиною з урахуванням зміцнення матеріалу такі: склопластик (I) – $E_1 = 2,1 \cdot 10^4$ Па, $E_2 = 1,6 \cdot 10^4$ Па, $G_{12} = 0,41 \cdot 10^4$ Па, $\nu = 0,07$; композиційний матеріал на епоксидній основі, армований однонаправленими волокнами з S-скла (II) – $E_1 = 6,25 \cdot 10^4$ Па, $E_2 = 2,12 \cdot 10^4$ Па, $G_{12} = 0,9 \cdot 10^4$ Па, $\nu = 0,25$. Значення параметра зміцнення $m^* = 1$ відповідає ідеально пружно-пластичному матеріалу.

Побудовано та порівняно (рис. 2 і 3) залежності розміру пластичної зони від відносної довжини тріщини для різних оболонок з поверхневою тріщиною глибиною $d_1/h = 0,2$ за навантаження $\sigma_0/\sigma_\tau = 0,3$, де $\sigma_0 = T_2^*/h$.

Подана (рис. 4) залежність параметра τ^* від глибини тріщини d_1/h за навантаження $\sigma_0/\sigma_\tau = 0,5$ та довжини тріщини $l_0/R_2 = 0,15$ для ідеально пружно-пластичної ($m^* = 1$) та зміцнених оболонок ($m^* = 1,5; 2$).

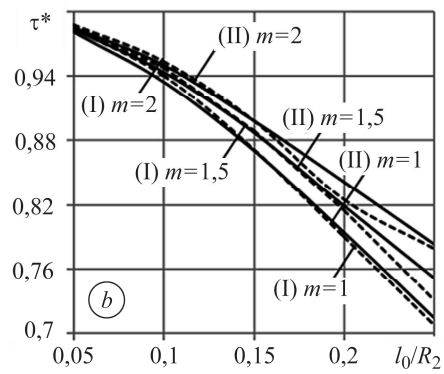
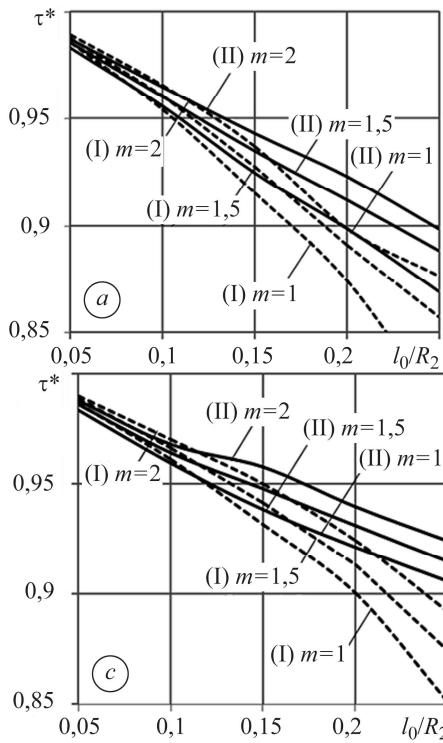


Рис. 2. Залежність розміру пластичної зони τ^* від відносної довжини тріщини l_0/R_2 для сферичної (а), циліндричної (б) оболонок, а також оболонок від'ємної кривини (с).

Fig. 2. Dependence of the size of the plastic zone τ^* on relative crack length l_0/R_2 for spherical (a), cylindrical (b) shells, and also for shells of negative curvature (c).

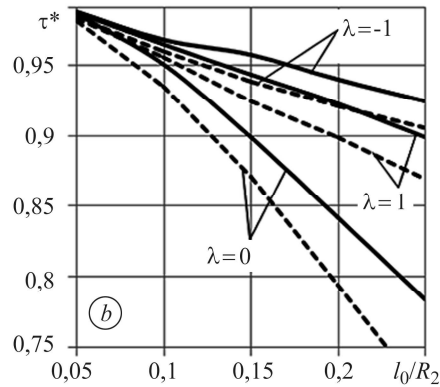
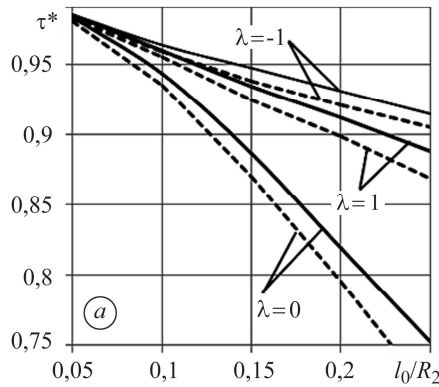


Рис. 3. Залежність розміру пластичної зони τ^* від відносної довжини тріщини l_0/R_2 (а: суцільні лінії – $m^* = 1$, штрихові – 1,5; б: суцільні лінії – $m^* = 1$, штрихові – 2).

Fig. 3. Dependence of the size of the plastic zone τ^* on relative crack length l_0/R_2 (a: solid line – $m^* = 1$, dashed – 1.5; b: solid line – $m^* = 1$, dashed – 2).

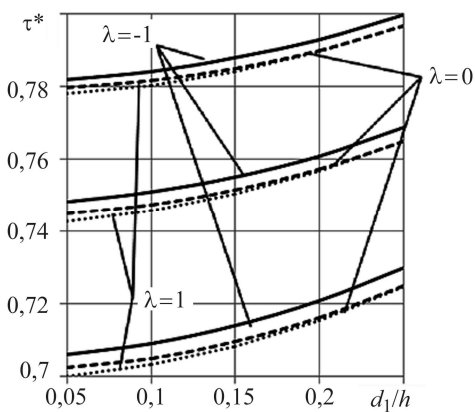


Рис. 4. Залежність розміру пластичної зони τ^* від глибини тріщини d_1/h : суцільні лінії – псевдосферичні оболонки; штрихові – циліндричні та пунктирні – сферичні.

Fig. 4. Dependence of the size of the plastic zone τ^* on crack depth d_1/h : solid line – pseudospherical shells; dashed – cylindrical and dotted – spherical.

ВИСНОВКИ

Встановлено, що зі збільшенням зміцнення матеріалу розмір пластичних зон на кінцях тріщини зменшується порівняно з ідеально-пружним матеріалом ($m^* = 1$). Таку закономірність виявлено і зі збільшенням довжини тріщини для матеріалів, що перебувають в однакових умовах (навантаження, довжина та глибина тріщини), й для будь-якої з розглянутих оболонок. З ростом глибини тріщини параметр τ^* зменшується, тобто розмір пластичних зон зростає. Найменша пластична зона в оболонці від'ємної кривини (для всіх значень параметра m^*), найбільша – у сферичній. Описано методику дослідження напруженого стану тонких пружно-пластичних ортотропних оболонок двоякої кривини з однією позовжною поверхневою тріщиною, матеріал пластичних зон яких зміцнюється під час деформування.

РЕЗЮМЕ. Рассмотрена задача о поверхностной трещине в ортотропной оболочке, изготовленной из материала с упрочнением, в рамках δ_c -модели. Описаны методы аналитического и числового ее решения, а также проанализировано влияние упрочнения, кривизны оболочки, нагрузки и длины трещины на размер пластических зон.

SUMMARY. The problem of surface cracks in an orthotropic shell made of hardened material is considered within the δ_c -model. The methods of solving the problem are described. The analytical and numerical solution of the problem, also the analysis of the effect of shell curvature hardening, load and crack length on the plastic zones size are presented.

1. *Осадчук В. А., Николишин М. М., Кирьянов В. И.* Применение аналога δ_c -модели для определения раскрытия несквозной трещины в замкнутой цилиндрической оболочке // Физ.-хим. механика материалов. – 1986. – 22, № 1. – С. 88–92.
2. *Николишин М. М., Маселко Т. Е.* Придельное равновесие несквозной трещины в замкнутой цилиндрической оболочке // Мат. методы и физ.-хим. поля. – 1986. – Вып 23. – С. 80–84.
3. *Николишин М. М., Шабо А. Г.* Аналог δ_c -модели для цилиндрической оболочки с продольной трещиной // Прочность материалов и элементов конструкций при сложном напряженном состоянии. – К.: Наук. думка, 1989. – Ч. 2. – С. 33–34.
4. *Довбня К. М., Гордіснюк М. М.* Визначення пружно-деформованого стану ортотропної оболонки з системою поверхневих тріщин // Тези доп. конф. молодих учених зі сучасних проблем механіки і математики ім. акад. Я. С. Підстригача. – Львів, 2009. – С. 55–56.
5. *Николишин М. М., Осадчук В. А.* Вплив залишкових напружень на граничний стан ортотропної циліндричної оболонки з поверхневою тріщиною // Зб. матеріалів 7-ої Міжнар. наук. конф. “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур” (Львів 20–23 вересня 2006). – Т. 2. – С. 90–92.
6. *Шевченко В. П., Довбня Е. Н., Цванг В. А.* Ортотропные оболочки с трещинами (разрезами) // Механика композитов: в 12-ти т. / Под ред. А. Н. Гузя, А. С. Космодамианского, В. П. Шевченко. – К.: А.С.К., 1998. – Т. 7. – 388 с.
7. *Каминский А. А., Галатенко В. Г.* Исследование роста усталостных трещин в материалах с упрочнением // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 4. – С. 54–60.
8. *Довбня Е. Н., Яртемик В. В., Гурьева И. В.* Напряженное состояние упруго-пластической изотропной оболочки с поверхностной трещиной с учетом упрочнения материала // Тр. ИПММ. – 2009. – 19. – С. 65–71.
9. *Шевченко В. П., Довбня К. М., Гур'єва І. В.* Застосування методу граничних інтегральних рівнянь для дослідження пружно-пластичних оболонок з тріщиною з урахуванням зміцнення матеріалу // Вісник Дніпропетровськ. ун-ту. Сер. Механіка. – 2011. – 2, № 5. – С. 225–263.
10. *Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А.* Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
11. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1968. – 246 с.

Одержано 20.09.2013