

УДК 539.3

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ЕЛІПТИЧНОГО ОТВОРУ ЧИ ПАРАБОЛІЧНОГО ВИРІЗУ У КВАЗІОРТОТРОПНІЙ ПЛОЩИНІ

А. КАЗБЕРУК¹, М. П. САВРУК^{1,2}, А. Б. ЧОРНЕНЬКИЙ²

¹ Білостоцька політехніка, Польща;

² Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Розглянуто задачу про розподіл напружень у нескінченній квазіортотропній площині з еліптичним отвором, контур якого вільний від зовнішніх зусиль, а на нескінченності задано однорідний напружений стан. Розв’язок задачі отримано за допомогою граничного переходу з відомого аналітичного розв’язку для еліптичного отвору в ортотропній площині, коли корені характеристичного рівняння прямують один до одного. З цих результатів у граничному випадку, коли більша піввісь еліпса прямує до нескінченності, знайдено розподіл напружень у площині з параболічним вирізом за двох основних типів деформації (симетричний розтяг та поперечний зсув).

Ключові слова: коефіцієнт інтенсивності напружень, теорія пружності, квазіортотропний матеріал, еліптичний отвір, параболічний виріз.

Квазіортотропним називають вироджений ортотропний матеріал, коли корені характеристичного рівняння кратні [1–3]. Це великий клас матеріалів, до якого належать ізотропні тіла, а також композитні матеріали на основі кераміки, волокнисті та шаруваті композити [4]. У літературі можна зустріти різне найменування таких матеріалів. Наприклад, у задачах теорії ортотропних оболонок з прямолінійними тріщинами їх називають спеціально-ортотропними [5–8]. Трапляється також назва – псевдоізотропний матеріал [9]. Називатимемо такі матеріали квазіортотропними, оскільки розв’язки плоских задач теорії пружності для квазіортотропного та ортотропного тіл з таким самим відношенням основних модулів пружності близькі між собою.

Симетричне навантаження.

Розглянемо ортотропну площину з еліптичним отвором в декартовій системі координат xOy , осі якого розташовані вздовж головних напрямків ортотропії. Край отвору вільний від зовнішнього навантаження, а на нескінченності задані напруження $\sigma_y^\infty = p$ (рис. 1).

Аналітичний розв’язок задачі можна подати через комплексні потенціали $\Phi_j(z_j)$ ($j = 1, 2$) [10]

$$\Phi_1(z_1) = \frac{p\gamma_2}{2(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[-\frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} + \frac{a}{a - \gamma_1 b} \left(1 - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - (a^2 - \gamma_1^2 b^2)}} \right) \right],$$

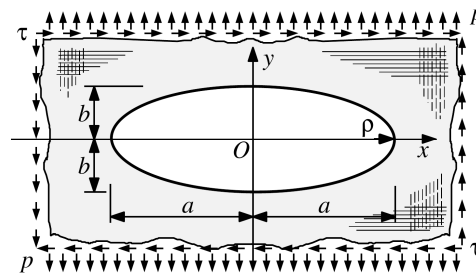


Рис. 1. Еліптичний отвір в ортотропній площині під дією розтягу та зсуву на нескінченності.

Fig. 1. An elliptic hole in the orthotropic plane under tension and shear at infinity.

$$\Phi_2(z_2) = \frac{p\gamma_1}{2(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[\frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} - \frac{a}{a - \gamma_2 b} \left(1 - \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 - (a^2 - \gamma_2^2 b^2)}} \right) \right].$$

де a, b – відповідно велика та мала півосі еліпса.

Користуючись формулами [10]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -2 \operatorname{Re}[\gamma_1^2 \Phi_1(z_1) + \gamma_2^2 \Phi_2(z_2)], \quad \sigma_y = 2 \operatorname{Re}[\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)], \\ \tau_{xy} &= 2 \operatorname{Im}[\gamma_1 \Phi_1(z_1) + \gamma_2 \Phi_2(z_2)], \end{aligned}$$

знайдемо компоненти тензора напружень

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{pa}{\gamma_1 - \gamma_2} \times \\ &\times \operatorname{Re} \left[\frac{\gamma_1^2 \gamma_2}{a - \gamma_1 b} \left(1 - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - (a^2 - \gamma_1^2 b^2)}} \right) - \frac{\gamma_2^2 \gamma_1}{a - \gamma_2 b} \left(1 - \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 - (a^2 - \gamma_2^2 b^2)}} \right) \right], \\ \sigma_y &= p + \frac{pa}{\gamma_1 - \gamma_2} \times \\ &\times \operatorname{Re} \left[\frac{\gamma_2}{a - \gamma_1 b} \left(1 - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - (a^2 - \gamma_1^2 b^2)}} \right) - \frac{\gamma_1}{a - \gamma_2 b} \left(1 - \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 - (a^2 - \gamma_2^2 b^2)}} \right) \right], \quad (1) \\ \tau_{xy} &= -\frac{pa}{\gamma_1 - \gamma_2} \times \\ &\times \operatorname{Re} \left[\frac{i\gamma_1 \gamma_2}{a - \gamma_1 b} \left(1 - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - (a^2 - \gamma_1^2 b^2)}} \right) - \frac{i\gamma_2 \gamma_1}{a - \gamma_2 b} \left(1 - \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 - (a^2 - \gamma_2^2 b^2)}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Перейшовши тут до границі, коли $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1 = \gamma$, отримаємо компоненти напружень у квазіортотропній площині з еліптичним отвором

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{pa\gamma^2}{a - \gamma b} \times \\ &\times \operatorname{Re} \left[\frac{a}{a - \gamma b} - \frac{1}{\sqrt{z_1^2 - (a^2 - \gamma^2 b^2)}} \left(z_1 + \frac{1}{2}(z_1 - \bar{z}_1) + \frac{\gamma b z_1}{a - \gamma b} - \frac{z_1^2 (z_1 - \bar{z}_1)/2 + \gamma^2 b^2 z_1}{z_1^2 - (a^2 - \gamma^2 b^2)} \right) \right], \\ \sigma_y &= p - \frac{pa}{a - \gamma b} \times \\ &\times \operatorname{Re} \left[\frac{a - 2b\gamma}{a - \gamma b} + \frac{1}{\sqrt{z_1^2 - (a^2 - \gamma^2 b^2)}} \left(-\frac{1}{2}(z_1 + \bar{z}_1) + \frac{\gamma b z_1}{a - \gamma b} - \frac{z_1^2 (z_1 - \bar{z}_1)/2 + \gamma^2 b^2 z_1}{z_1^2 - (a^2 - \gamma^2 b^2)} \right) \right], \\ \tau_{xy} &= \frac{pa\gamma}{a - \gamma b} \times \\ &\times \operatorname{Im} \left[\frac{b\gamma}{a - \gamma b} + \frac{1}{\sqrt{z_1^2 - (a^2 - \gamma^2 b^2)}} \left(z_1 + \frac{1}{2}(z_1 - \bar{z}_1) + \frac{\gamma b z_1}{a - \gamma b} - \frac{z_1^2 (z_1 - \bar{z}_1)/2 + \gamma^2 b^2 z_1}{z_1^2 - (a^2 - \gamma^2 b^2)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Звідси, зокрема, впливає співвідношення для нормальних напружень у вершині еліптичного отвору на осі Ox

$$\sigma_y(a,0) = p[1 + (2/\gamma)(a/b)] = p[1 + (2/\gamma)\sqrt{a/\rho}].$$

Тепер, використавши рівності [3]

$$\sigma_x + \gamma^2 \sigma_y = 4\gamma^2 \operatorname{Re} \Phi_1(z_1), \quad \sigma_x - \gamma^2 \sigma_y = -2\gamma^2 \operatorname{Re}[\bar{z}_1 \Phi_1'(z_1) + \Psi_1(z_1)],$$

отримаємо комплексні потенціали напружень для квазіортотропної площини з еліптичним отвором

$$\begin{aligned} \Phi_1(z_1) = & \frac{p}{4} - \frac{pa}{2(a-\gamma b)} \left(1 - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - (a^2 - \gamma^2 b^2)}} \right), \quad \Psi_1(z_1) = \frac{p}{2} + \\ & + \frac{pa}{2(a-\gamma b)} \left[\frac{2b\gamma}{a-\gamma b} - \frac{a+\gamma b}{a-\gamma b} \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - (a^2 - \gamma^2 b^2)}} + \frac{z_1(z_1^2 + 2\gamma^2 b^2)}{\sqrt{[z_1^2 - (a^2 - \gamma^2 b^2)]^3}} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Поклавши у співвідношенні (2) параметр $b = a$, прийдемо до комплексних потенціалів для кругового отвору радіуса a :

$$\begin{aligned} \Phi_1(z_1) = & \frac{p}{4} - \frac{p}{2(1-\gamma)} \left(1 - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - a^2(1-\gamma^2)}} \right), \\ \Psi_1(z_1) = & \frac{p}{2} + \frac{p}{2(1-\gamma)} \left[\frac{2\gamma}{1-\gamma} - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - a^2(1-\gamma^2)}} \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma} - \frac{z_1^2 + 2\gamma^2 a^2}{z_1^2 - a^2(1-\gamma^2)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Спрямувавши у формулі (3) параметр γ до одиниці, отримаємо відомий розв'язок для ізотропної площини з круговим отвором [11]:

$$\Phi_1(z) = \frac{p}{4} \left(1 + \frac{2a^2}{z^2} \right), \quad \Psi_1(z) = \frac{p}{2} \left(1 + \frac{a^2}{z^2} + \frac{3a^4}{z^4} \right).$$

Зробимо паралельне перенесення системи координат xOy , помістивши її початок у фокусі еліпса $x = d$ ($d = a - \rho/2$, $\rho = b^2/a$), де ρ – радіус кривини у вершині отвору на осі Ox . Функції $\Phi_1(z_1)$ і $\bar{z}_1 \Phi_1'(z_1) + \Psi_1(z_1)$ при цьому залишаються інваріантними. Записавши їх у нових координатах, перейдемо до границі ($a \rightarrow \infty$) за таких умов:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (p\sqrt{\pi a}) = K_I, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} (b^2/a) = \rho = \text{const},$$

де K_I – коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) у вершині відповідної напівнескінченної тріщини ($\rho = 0$).

У результаті отримаємо комплексні потенціали для квазіортотропної площини з вільним від навантажень параболічним вирізом (рис. 2):

$$\Phi_1(z_1) = \frac{K_I}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2z_1 - \rho(1-\gamma^2)}}, \quad \Psi_1(z_1) = \frac{K_I}{2\sqrt{\pi}} \frac{z_1 + 2\rho\gamma^2}{[2z_1 - \rho(1-\gamma^2)]^{3/2}}, \quad (4)$$

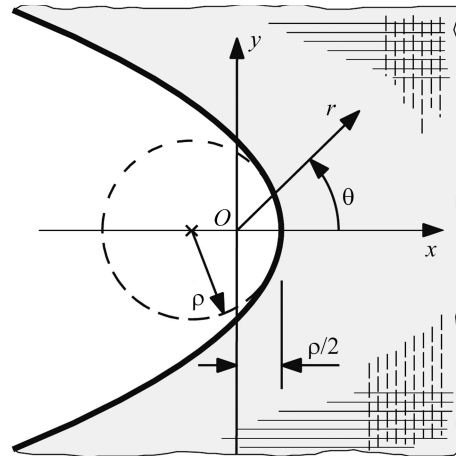


Рис. 2. Параболічний виріз у квазіортотропній площині.

Fig. 2. A parabolic notch in a quasi-orthotropic plane.

коли на нескінченності задано асимптотику поля напружень, яку визначають потенціали

$$\Phi_1(z_1) = K_I / (2\sqrt{2\pi z_1}), \quad \Psi_1(z_1) = K_I / (4\sqrt{2\pi z_1}). \quad (5)$$

Функції (5) описують симетричний розподіл сингулярних напружень у квазіортотропній площині з напівнескінченною тріщиною. Поклавши у співвідношеннях (4) параметр $\gamma = 1$, прийдемо до комплексних потенціалів для ізотропної площини [11].

За формулами [3]

$$\begin{cases} \sigma_x = -\gamma^2 \operatorname{Re}\{\bar{z}_1 \Phi_1'(z_1) - 2\Phi_1(z_1) + \Psi_1(z_1)\}, \\ \sigma_y = \operatorname{Re}\{\bar{z}_1 \Phi_1'(z_1) + 2\Phi_1(z_1) + \Psi_1(z_1)\}, \\ \tau_{xy} = \gamma \operatorname{Im}\{\bar{z}_1 \Phi_1'(z_1) + \Psi_1(z_1)\}, \end{cases} \quad (6)$$

отримаємо напруження у квазіортотропній площині з напівнескінченим параболічним вирізом:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\gamma^2 K_I}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2z_1 - \rho(1 - \gamma^2)}} \left[1 - \frac{(z_1 - \bar{z}_1)/2 + \rho\gamma^2}{2z_1 - \rho(1 - \gamma^2)} \right] \right\}, \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2z_1 - \rho(1 - \gamma^2)}} \left[1 + \frac{(z_1 - \bar{z}_1)/2 + \rho\gamma^2}{2z_1 - \rho(1 - \gamma^2)} \right] \right\}, \\ \tau_{xy} &= \frac{\gamma K_I}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Im} \frac{(z_1 - \bar{z}_1)/2 + \rho\gamma^2}{[2z_1 - \rho(1 - \gamma^2)]^{3/2}}. \end{aligned}$$

При цьому компоненти напружень на контурі параболічного вирізу можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{\pi\rho}} \frac{\gamma^2}{2\beta_1^5} \left[a_1(2\gamma^2 - b_1) \sin \alpha_1 - (2b_1\gamma^2 - 2b_1^2 - a_1^2) \cos \alpha_1 \right], \\ \sigma_y &= -\frac{K_I}{\sqrt{\pi\rho}} \frac{1}{2\beta_1^5} \left[a_1(2\gamma^2 - b_1) \sin \alpha_1 - (2b_1\gamma^2 + 2b_1^2 + 3a_1^2) \cos \alpha_1 \right], \\ \tau_{xy} &= -\frac{K_I}{\sqrt{\pi\rho}} \frac{\gamma}{2\beta_1^5} \left[(2b_1\gamma^2 + a_1^2) \sin \alpha_1 + a_1(2\gamma^2 - b_1) \cos \alpha_1 \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Тут

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_1(\theta) &= \frac{1}{2} \operatorname{atan2}(a_1, b_1), \quad \beta_1 = \beta_1(\theta) = \sqrt[4]{a_1^2 + b_1^2}, \\ a_1 &= 2\gamma \operatorname{tg}(\theta/2), \quad b_1 = \gamma^2 - \operatorname{tg}^2(\theta/2), \end{aligned}$$

де θ – полярний кут (рис. 2); $\operatorname{atan2}(y, x) = \operatorname{Arg}(x + iy) \in (-\pi, \pi]$.

Зі співвідношень (6) знайдемо нормальні напруження вздовж контуру вирізу

$$\sigma_s(\theta) = \sigma_x(\theta) + \sigma_y(\theta) = K_I R_1(\theta) / \sqrt{2\pi\rho}, \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} R_1(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\beta_1^5}} \left[a_1(\gamma^2 - 1)(2\gamma^2 - b_1) \sin \alpha_1 - \right. \\ &\quad \left. - (2b_1\gamma^4 - 2b_1^2\gamma^2 - 2b_1\gamma^2 - a_1^2\gamma^2 - 2b_1^2 - 3a_1^2) \cos \alpha_1 \right]. \end{aligned}$$

З аналізу функції (8) випливає, що нормальне напруження у вершині вирізу

$$\sigma_s(0) = (2/\gamma)(K_I/\sqrt{\pi\rho})$$

є максимальним лише за умови $\gamma^2 < 2$.

Зі співвідношень (7), (8), коли $\gamma=1$, $\alpha_1(\theta) = \theta/2$, $\beta_1(\theta) = 1/\cos\theta$, одержимо вирази компонент напружень на контурі параболічного вирізу для ізотропного матеріалу

$$\sigma_x = -\frac{K_I}{\sqrt{\pi\rho}} \frac{\cos(\theta/2)}{2} \left(\cos \frac{3\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \right), \quad \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{\pi\rho}} \frac{\cos(\theta/2)}{2} \left(\cos \frac{3\theta}{2} + 3 \cos \frac{\theta}{2} \right),$$

$$\tau_{xy} = -\frac{K_I}{\sqrt{\pi\rho}} \frac{\cos(\theta/2)}{2} \left(\sin \frac{3\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \right); \quad \sigma_s(\theta) = \frac{K_I}{\sqrt{\pi\rho}} (1 + \cos \theta).$$

Отримали розподіл безрозмірного нормального напруження $R_I(\theta)$ вздовж контуру параболічного вирізу за симетричного навантаження (рис. 3a). Для ізотропного матеріалу ($\gamma=1$) та матеріалів, для яких параметр $\gamma < \sqrt{2}$, напруження досягають максимуму у вершині вирізу. Коли параметр $\gamma > \sqrt{2}$, максимальні напруження досягаються на деякій віддалі від вершини, а в самій вершині є локальний мінімум.

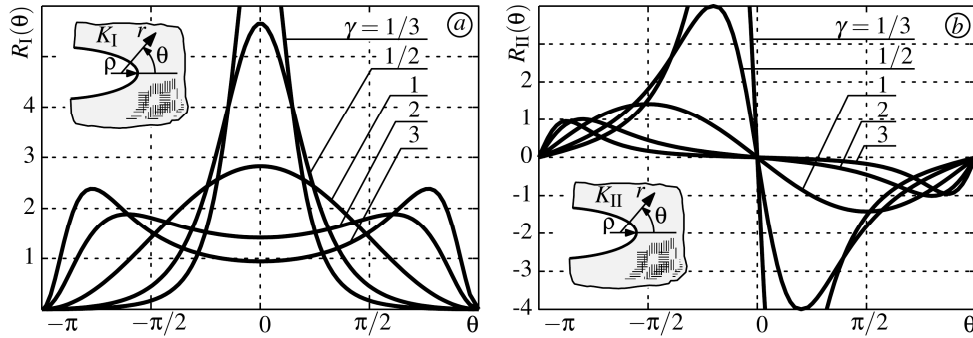


Рис. 3. Залежність безрозмірного нормального напруження $R_I(\theta)$ (a) та $R_{II}(\theta)$ (b) від полярного кута θ на контурі параболічного вирізу в квазіортотропній площині для різних значень параметра ортотропії γ .

Fig. 3. Dependence of dimensionless normal stress $R_I(\theta)$ (a) and $R_{II}(\theta)$ (b) on the polar angle θ on the contour of a parabolic notch in a quasi-orthotropic plane for different values of orthotropic parameter γ .

Антисиметричне навантаження. Розглянемо ортотропну площину з еліптичним отвором. Край отвору вільний від навантаження, а на нескінченності задані напруження зсуву $\tau_{xy}^\infty = \tau$ (див. рис. 1). Аналітичний розв'язок задачі можна подати через комплексні потенціали $\Phi_j(z_j)$ ($j=1, 2$) [10]

$$\Phi_1(z_1) = \frac{\tau}{2i} \frac{a + \gamma_1 b}{\gamma_1 - \gamma_2} \frac{a + \gamma_2 b}{a^2 - \gamma_1^2 b^2} R_1(z_1), \quad \Phi_2(z_2) = -\frac{\tau}{2i\gamma_2} - \frac{\tau}{2i} \frac{a + \gamma_1 b}{\gamma_1 - \gamma_2} \frac{a + \gamma_2 b}{a^2 - \gamma_2^2 b^2} R_2(z_2),$$

$$R_k(\gamma_k) = 1 - \frac{z_k}{\sqrt{z_k^2 - (a^2 - \gamma_k^2 b^2)}}, \quad k=1, 2.$$

Аналогічно до симетричного випадку отримаємо комплексні потенціали для квазіортотропної площини з еліптичним отвором за антисиметричного навантаження

$$\Phi_1(z_1) = \frac{i\tau}{2\gamma} \frac{a + \gamma b}{a - \gamma b} \left[1 - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - (a^2 - \gamma^2 b^2)}} \right], \quad \Psi_1(z_1) = \frac{i\tau}{\gamma} - \frac{i\tau}{\gamma(a - \gamma b)} \left[\frac{a^2 + \gamma^2 b^2}{a - \gamma b} - \frac{\gamma(a + \gamma b)}{\sqrt{z_1^2 - (a^2 - \gamma^2 b^2)}} \left(\frac{3z_1}{2\gamma} + \frac{2\gamma z_1 b^2}{a^2 - \gamma^2 b^2} - \frac{(z_1^3/2\gamma) + \gamma b^2 z_1}{z_1^2 - (a^2 - \gamma^2 b^2)} \right) \right]. \quad (9)$$

Поклавши тут параметр $b = a$, прийдемо до комплексних потенціалів для задачі про круговий отвір у квазіортотропній площині:

$$\Phi_1(z_1) = \frac{i\tau}{2\gamma} \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} \left[1 - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - a^2(1 - \gamma^2)}} \right], \quad \Psi_1(z_1) = \frac{i\tau}{\gamma} - \frac{i\tau}{\gamma(1 - \gamma)} \left[\frac{1 + \gamma^2}{1 - \gamma} - \frac{\gamma(1 + \gamma)}{\sqrt{z_1^2 - a^2(1 - \gamma^2)}} \left(\frac{3z_1}{2\gamma} + \frac{2\gamma z_1}{1 - \gamma^2} - \frac{(z_1^3/2\gamma) + \gamma a^2 z_1}{z_1^2 - a^2(1 - \gamma^2)} \right) \right]. \quad (10)$$

Спрямувавши тут параметр γ до одиниці, отримаємо відомий розв'язок в ізотропному випадку [10]:

$$\Phi_1(z) = -\frac{i\tau a^2}{z^2}, \quad \Psi_1(z_1) = i\tau \left(1 - \frac{3a^4}{z^4} \right).$$

На основі співвідношень (6), (9) знайдемо компоненти напружень у квазіортотропній площині з еліптичним отвором за антисиметричного навантаження

$$\sigma_x = -\tau \operatorname{Im} \left[\frac{2\gamma a^2}{(a - \gamma b)^2} - \frac{a + \gamma b}{a - \gamma b} \frac{\gamma^2}{\sqrt{z_1^2 - a^2 + \gamma^2 b^2}} \left(\frac{2z_1}{\gamma} + L(z_1, \bar{z}_1) \right) \right],$$

$$\sigma_y = \tau \operatorname{Im} \left[\frac{2\gamma b^2}{(a - \gamma b)^2} - \frac{a + \gamma b}{a - \gamma b} \frac{1}{\sqrt{z_1^2 - a^2 + \gamma^2 b^2}} L(z_1, \bar{z}_1) \right],$$

$$\tau_{xy} = \tau - \tau \operatorname{Re} \left[\frac{a^2 + b^2 \gamma^2}{(a - \gamma b)^2} - \frac{a + \gamma b}{a - \gamma b} \frac{\gamma}{\sqrt{z_1^2 - (a^2 - \gamma^2 b^2)}} \left(\frac{z_1}{\gamma} + L(z_1, \bar{z}_1) \right) \right],$$

$$L(z_1, \bar{z}_1) = \frac{z_1 - \bar{z}_1}{2\gamma} + \frac{2\gamma z_1 b^2}{a^2 - \gamma^2 b^2} - \frac{(z_1 - \bar{z}_1) z_1^2 / 2\gamma + \gamma b^2 z_1}{z_1^2 - (a^2 - \gamma^2 b^2)}.$$

У формулах (10) перенесемо початок нової системи координат у фокус еліпса ($x = d$) та перейдемо до границі ($a \rightarrow \infty$), за умов

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (\tau \sqrt{\pi a}) = K_{II}, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} (b^2 / a) = \rho = \text{const},$$

де K_{II} – КІН у вершині відповідної напівнескінченної тріщини ($\rho = 0$).

У результаті отримаємо комплексні потенціали

$$\Phi_1(z_1) = -\frac{iK_{II}}{2\gamma\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2z_1 - \rho(1 - \gamma^2)}},$$

$$\Psi_1(z_1) = \frac{iK_{II}}{2\gamma\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2z_1 - \rho(1 - \gamma^2)}} \left(2 - \frac{z_1 + 2\gamma^2 \rho}{2z_1 - \rho + \gamma^2 \rho} \right), \quad (11)$$

які дають розв'язок плоскої задачі теорії пружності для квазіортотропної площини з вільним від навантажень параболічним вирізом (див. рис. 2), коли на нескінченності задано асимптотику поля напружень, яку визначають потенціали

$$\Phi_1(z_1) = -iK_{II}/(2\gamma\sqrt{2\pi z_1}), \quad \Psi_1(z_1) = 3iK_{II}/(4\gamma\sqrt{2\pi z_1}). \quad (12)$$

За формулами (6), (11) отримаємо напруження у квазіортотропній площині з напівнескінченим параболічним вирізом:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_{II}}{2\sqrt{\pi}} \operatorname{Im} \left[\frac{\gamma}{\sqrt{2z_1 - \rho(1 - \gamma^2)}} \left(4 - \frac{z_1 - \bar{z}_1 + 2\gamma^2\rho}{2z_1 - \rho + \gamma^2\rho} \right) \right], \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{2\gamma\sqrt{\pi}} \operatorname{Im} \frac{z_1 - \bar{z}_1 + 2\gamma^2\rho}{[2z_1 - \rho + \gamma^2\rho]^{3/2}}, \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{2\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\sqrt{2z_1 - \rho(1 - \gamma^2)}} \left(2 - \frac{z_1 - \bar{z}_1 + 2\gamma^2\rho}{2z_1 - \rho + \gamma^2\rho} \right) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Компоненти напружень на контурі параболічного вирізу в квазіортотропній площині можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi\rho}} \frac{\gamma}{2\beta_1^5} \left[(2b_1\gamma^2 - 4b_1^2 - 3a_1^2) \sin \alpha_1 + a_1(2\gamma^2 - b_1) \cos \alpha_1 \right], \\ \sigma_y &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{\pi\rho}} \frac{1}{2\gamma\beta_1^5} \left[(2b_1\gamma^2 + a_1^2) \sin \alpha_1 + a_1(2\gamma^2 - b_1) \cos \alpha_1 \right], \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi\rho}} \frac{1}{2\beta_1^5} \left[a_1(2\gamma^2 - b_1) \sin \alpha_1 - (2b_1\gamma^2 - 2b_1^2 - a_1^2) \cos \alpha_1 \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Зі співвідношень (13) знайдемо нормальні напруження вздовж контуру вирізу

$$\sigma_s(\theta) = \sigma_x(\theta) + \sigma_y(\theta) = K_{II}R_{II}(\theta)/\sqrt{2\pi\rho}, \quad (15)$$

де

$$\begin{aligned} R_{II}(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\gamma\beta_1^5}} \left[(2b_1\gamma^4 - 4b_1^2\gamma^2 - 2b_1\gamma^2 - 3a_1^2\gamma^2 - a_1^2) \sin \alpha_1 + \right. \\ &\quad \left. + a_1(\gamma^2 - 1)(2\gamma^2 - b_1) \cos \alpha_1 \right]. \end{aligned}$$

За формулами (14), (15) отримаємо компоненти напружень на контурі параболічного вирізу в ізотропній площині

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi\rho}} \frac{\cos(\theta/2)}{2} \left(\sin \frac{3\theta}{2} - 3\sin \frac{\theta}{2} \right), \quad \sigma_y = -\frac{K_{II}}{\sqrt{\pi\rho}} \frac{\cos(\theta/2)}{2} \left(\sin \frac{3\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{\pi\rho}} \frac{\cos(\theta/2)}{2} \left(\cos \frac{3\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right); \quad \sigma_s(\theta) = -\frac{K_I}{\sqrt{\pi\rho}} \sin \theta. \end{aligned}$$

Наведено розподіл безрозмірного нормального напруження $R_{II}(\theta)$ вздовж контуру параболічного вирізу (рис. 3b). Якщо функція $R_{II}(\theta)$ для ізотропного матеріалу ($\gamma = 1$) має екстремум для кутів $\theta = \pm\pi/2$, то для квазіортотропних матеріалів, для яких параметр $\gamma < 1$, екстремальні напруження досягаються в точках, ближчих до вершини вирізу ($\theta = 0$), та навпаки, коли параметр $\gamma > 1$, екстремальні напруження досягаються в точках, віддаленіших від вершини вирізу.

ВИСНОВКИ

Отримано розв'язок плоскої задачі теорії пружності для квазіортотропної площини з еліптичним отвором за допомогою граничного переходу з відомого аналітичного розв'язку для ортотропної площини. Досліджено розподіл напружень на контурі параболічного вирізу у нескінченній квазіортотропній площині за двох основних типів деформації – симетричний розтяг та поперечний зсув.

РЕЗЮМЕ. Рассмотрена задача о распределении напряжений в бесконечной квазиортотропной плоскости с эллиптическим отверстием, контур которого свободен от внешних усилий, а на бесконечности задано однородное напряженное состояние. Решение задачи получено с помощью предельного перехода из известного аналитического решения для эллиптического отверстия в ортотропной плоскости, когда корни характеристического уравнения стремятся друг к другу. Из этих результатов в предельном случае найдено решение задачи о распределении напряжений в бесконечной квазиортотропной плоскости с параболическим вырезом для двух основных типов деформации (симметричное растяжение и поперечный сдвиг).

SUMMARY. The problem of stress distribution in an infinite quasi-orthotropic plane with an elliptic hole with traction-free boundary under tension and shear at infinity is considered. Solution of the problem is obtained using limit transition from a known analytical solution for an elliptic hole in the orthotropic plane, when the roots of the characteristic equation approach to each other. From these results in the case of limiting case the solution of the problem of stress distribution in an infinite quasi-orthotropic plane with a parabolic notch is found for two main types of deformation (symmetric tension and transverse shear).

Робота виконана за проектом № 2011/03/B/ST8/06456, який фінансується Національним центром науки (Польща).

1. Hasebe N. and Sato M. Stress analysis of quasi-orthotropic elastic plane // Int. J. Solids Struct. – 2013. – **50**. – P. 209–216.
2. Hasebe N. and Sato M. Mixed boundary value problem for quasi-orthotropic elastic plane // Acta Mech. – 2015. – **226**. – P. 527–545.
3. Саврук М. П., Чорненький А. Б. Плоска задача теорії пружності для квазіортотропного тіла з тріщинами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2015. – **51**, № 3. – С. 17–24.
(Savruk M. P., Chornen'kyi A. B. Plane problem of the theory of elasticity for a quasiorthotropic body with cracks // Materials Science. – 2015. – **51**, № 3. – P. 311–321.)
4. Orthotropy rescaling and implications for fracture in composites // Z. Suo, G. Bao, B. Fan, and T. C. Wang // Int. J. Solids Struct. – 1991. – **28**, № 2. – P. 235–248.
5. Erdogan F. E., Ratwani M., and Yuceoglu U. On the effect of orthotropy in a cracked cylindrical shell // Int. J. Fract. – 1974. – **10**, № 3. – P. 369–374.
6. Krenk S. Influence of transverse shear on an axial crack in a cylindrical shell // Int. J. Fract. – 1978. – **14**, № 2. – P. 123–145.
7. Костенко И. С. Упругое равновесие замкнутой ортотропной цилиндрической оболочки с продольными разрезами // Физ.-хим. механика материалов. – 1980. – **16**, № 5. – С. 67–70.
(Kostenko I. S. Elastic equilibrium of a closed orthotropic cylindrical shell with longitudinal notches // Materials Science. – 1980. – **16**, № 5. – P. 447–450.)
8. Шевченко В. П., Довбня Е. Н., Цванг В. А. Ортотропные оболочки с трещинами (разрезами) // Концентрация напряжений (Механика композитов) в 12-ти т. – К.: А.С.К, 1998. – **7**. – С. 212–249.
9. Cho S. B., Lee K. R., and Choy Y. S. A further study of two-dimensional boundary element crack analysis in anisotropic or orthotropic materials // Eng. Fract. Mech. – 1992. – **43**, № 4. – P. 589–601.
10. Лехницький С. Г. Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 464 с.
11. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.

Одержано 21.10.2015