

УДК 621.112.32:620.191.31

## ВПЛИВ ПАРАМЕТРІВ ДЕМПФУВАННЯ ТА СТОХАСТИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ВЛАСТИВОСТІ ПОЗДОВЖНІХ КОЛИВАНЬ СТРИЖНЯ З ТРИЩИНОЮ

І. Й. МАЦЬКО<sup>1</sup>, І. М. ЯВОРСЬКИЙ<sup>1,2</sup>, Р. М. ЮЗЕФОВИЧ<sup>1</sup>, З. ЗАКЖЕВСЬКІ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;

<sup>2</sup> Інститут телекомунікацій Технологічно-природничого університету, Бидгощ, Польща

Проаналізовано детерміновану та стохастичну складові реалізацій поздовжніх коливань стрижня з тріщиною, які знаходять за допомогою числових розв'язків нелінійного диференціального рівняння зі стохастичною вимушувальною силою. Показано, що коефіцієнт демпфування суттєво впливає на структуру вимушених коливань, що призводить до зміни діагностичних параметрів. Наведено результати аналізу залежностей характеристик коливань від частот несучої стохастичної вимушувальної сили, а також від швидкості зникання кореляційних зв'язків її огинаючої.

**Ключові слова:** поздовжні коливання стрижня з тріщиною, періодично корельовані випадкові процеси, діагностичні ознаки, коефіцієнт демпфування, швидкість зникання кореляційних зв'язків.

Дослідження коливань пружних тіл за пошкоджень дають змогу проаналізувати зміни вібраційного стану елементів конструкцій під час їх експлуатації і розробити на цій основі методи виявлення таких пошкоджень. Особливу увагу приділяють визначенню параметрів коливань за втомних тріщин, які упродовж циклу деформування закриваються і відкриваються. Це призводить до зміни пружно-інерційних характеристик елементів конструкції і є причиною нелінійності коливань. Відмічено [1–3], що ефективною моделлю для теоретичних досліджень зв'язку між довжиною втомної тріщини, яка “дихає”, і параметрами вимушених коливань є нелінійні диференціальні рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\beta\frac{d\xi}{dt} + \omega_s^2 \left[ 1 - \frac{\alpha}{2}(1 + \operatorname{sgn} \xi) \right] \xi = \eta(t). \quad (1)$$

Тут нелінійність зумовлена зміною жорсткості стрижня в напівциклах розтягу та стиску. Ця зміна характеризується відносною різницею між значеннями жорсткості деформованого елемента за стиску чи до порушення суцільності  $k_0$  і за розтягу  $k$ :  $\alpha = (k - k_0)/k_0$ . У рівнянні (1)  $\omega_s = \sqrt{k_0/m}$  – власна частота коливань непошкодженого тіла, а наявність в'язкого тертя характеризується коефіцієнтом демпфування  $\beta$ . Коливна система, яку описують рівнянням (1), належить до класу суттєво нелінійних. Дослідження, виконані за гармонічного збудження [1–4], показали, що якісною ознакою наявності втомної тріщини є виникнення так званих нелінійних резонансів – супер- та субгармонічного, а також нелінійність вібраційного відгуку на основному резонансі. Коливання за нелінійних резонансів суттєво негармонічні через появу гармоніки частоти, яка збігається з частотою основного резонансу. Тому як діагностичні ознаки для виявлення тріщи-

ни за гармонічного збудження використовують співвідношення між амплітудою цієї гармоніки і амплітудами перших резонансних гармонік.

У реальних умовах експлуатації вібраційні збудження суттєво відрізняються від гармонічних і, перш за все, характеризуються присутністю як детермінованої, так і стохастичної складової. Нелінійність механічної системи призводить до взаємодії цих складових, внаслідок чого в її вимушених коливаннях можуть проявлятися такі специфічні властивості, які є визначальними для встановлення її стану.

Раніше [5] досліджено структуру вимушених коливань стрижня з тріщиною, де вимушувальна сила описана квадратурною моделлю

$$\eta(t) = \eta_c(t) \cos \omega_0 t + \eta_s(t) \sin \omega_0 t . \quad (2)$$

При цьому частоту  $\omega$  вибрали у два рази меншою, ніж частота основного резонансу  $\omega_s$ , тобто аналізували у режимі суперрезонансу, за якого параметри вібраційного відгуку є найчутливішими до зміни розмірів малих тріщин. Для знаходження числових розв'язків рівняння (1) використали метод Ейлера. Реалізації вібраційного відгуку отримані для випадку, коли вимушувальну силу описують випадковим процесом, нестационарним тільки за математичним сподіванням, його кореляційна функція є незалежною від часу  $t$ . Фізичні та геометричні властивості стрижня у вібраційній моделі (1) описують коефіцієнтом демпфування  $\beta$ , частотою основного резонансу  $\omega_s$  та параметром  $\alpha$ , який визначає відносну зміну жорсткості за появи тріщини. Параметр  $\alpha$  залежить від довжини та розташування тріщини, висоти поперечного перерізу стрижня, видів коливань. Ці залежності описують формулами, отриманими на основі лінійної механіки руйнування [3]. Обчислення, виконані на основі цих формул [5], показують, що для малих тріщин ( $\gamma \leq 0,1$ ) прирости  $\alpha$  є меншими від приростів  $\gamma$ . Ситуація вирівнюється за середніх тріщин ( $0,1 < \gamma \leq 0,3$ ), а для великих тріщин ( $\gamma > 0,3$ ) відносна жорсткість тріщин зростає швидше, ніж відносна довжина.

Результати обробки сигналів методами кореляційно-спектрального аналізу періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП) показали [5], що з ростом тріщини суттєво змінюється імовірнісна структура вібраційного відгуку. В детермінованій складовій, яку описують математичним сподіванням ПКВП, такі зміни відбуваються за появи другої гармоніки й росту її амплітуди, а також появи та росту сталої складової. Амплітуда першої гармоніки при цьому змінюється мало. Важливим є те, що внаслідок нелінійних ефектів вібраційний сигнал набуває властивостей періодичної нестационарності другого порядку, яка проявляється вже за малих відносних довжин тріщин ( $\gamma < 0,05$ ). У часових змінах дисперсії, яка характеризує потужність флуктуаційних коливань, появляється перша гармоніка, амплітуда якої швидко росте зі збільшенням довжини тріщини. Із ростом тріщини суттєво збільшується й середня потужність флуктуаційних коливань, а також починає проявлятися друга гармоніка. Обчислення показали, що характеристики періодичної нестационарності другого порядку є чутливішими до змін відносної довжини тріщини, тому ознаки дефектності, сформовані на їх основі, мають переваги над тими, що формуються на основі амплітуд гармонік детермінованої складової. Нижче проаналізовано вплив характеристик матеріалів, з яких виготовлений стрижень (у прийнятій моделі їх описують параметрами  $\beta$  і  $\omega_s$ ), а також частоти несучої вимушувальної сили  $\omega_0$  та швидкості зникання кореляційних зв'язків її стохастичної складової на імовірнісну структуру вібраційного відгуку. У праці [5] числове значення логарифмічного декременту зникання  $\delta = \beta 2\pi / \omega_0 = 0,01$  може відповідати хромованим, вуглецевим сталям, алюмінієвим сплавам (див. таблицю) [6]. Для хромованих сталей цей коефіцієнт може бути в 4 рази більшим, для вуглецевих – у 5 разів меншим, а для алюмінієвих сплавів – у 10 разів меншим. Для латуні, бронзи, титанових сплавів логарифміч-

ний декремент зникання приймає значно менші значення, а для чавунів, кобальт-нікелевих сплавів – суттєво більші. Відомо [7], що зі збільшенням демпфувальної здатності матеріалу рівень нелінійності вимушених коливань стрижня зменшується, а це призводить до зниження ефективності виявлення втомної тріщини з використанням ознак, побудованих на основі параметрів детермінованої складової вібраційного відгуку. Такий результат насамперед можна пояснити зменшенням максимальних значень резонансних кривих. Але одночасно з цим збільшується ширина останніх, тому, коли ширина спектра стохастичної складової вимушувальної сили є більшою, ніж ширина основного резонансу, можна сподіватися на ріст параметрів, які описують структуру періодичної нестационарності.

#### Значення логарифмічного декременту зникання для різних металічних матеріалів [6]

Сплави	Коефіцієнт $\delta$	Матеріали	Коефіцієнт $\delta$
Магнієві	0,13...0,3	Титанові сплави	0,0005...0,0015
Марганцево-мідні	0,10...0,25	Чавуни з пластичним графітом	0,1...0,15
Мідно-алюмінієві	0,04...0,1	Чавуни з шароподібним графітом	0,02...0,05
Нікель-титанові	0,1...0,15	Сталі хромовані	0,01...0,04
Кобальт-нікелеві	0,06...0,12	Сталі вуглецеві	0,002...0,01
Алюмінієві	0,001...0,01	Латунь та бронза	0,001...0,005

Очевидно, що потрібний окремий аналіз впливу коефіцієнта демпфування, насамперед, на кореляційні компоненти  $B_k(u)$ , які суттєво відрізняються від нуля в розкладі ряду Фур'є кореляційної функції вібраційного відгуку, тобто

$$b_{\xi}(t, u) = B_0(u) + \sum_{k=1,2} B_k(u) e^{ik\omega_0 t} = B_0(u) + \sum_{k=1,2} [B_k^c(u) \cos k\omega_0 t + B_k^s(u) \sin k\omega_0 t].$$

На основі числових розв'язків рівняння (1) для різних коефіцієнтів загасання  $\beta$  отримані реалізації вимушених коливань, для обробки яких використані методи статистичного аналізу ПКВП [8–10].

На рис. 1 наведені графіки залежності оцінок сталої складової  $m_{\xi_0}$ , амплітуд першої  $|m_{\xi_1}| = \sqrt{(m_{\xi_1}^c)^2 + (m_{\xi_1}^s)^2}$  та другої  $|m_{\xi_2}| = \sqrt{(m_{\xi_2}^c)^2 + (m_{\xi_2}^s)^2}$  гармонік математичного сподівання від відносної довжини тріщини для різних коефіцієнтів демпфування  $\beta$ . З графіків видно, що всі ці значення зменшуються зі збільшенням  $\beta$ . Амплітуда першої гармоніки з ростом  $\beta$  знижується найменше. При цьому для  $\gamma = 0,5$ ,  $\beta = 0,005$  вона дорівнює 4,15, для  $\beta = 0,01$  і  $0,1$  вона становить 4,1 і 4,05, відповідно. Більших змін зазнає стала складова. Якщо при  $\beta = 0,005$  вона дорівнює 3,35, то при  $\beta = 0,1$  становить 1,8. Найістотніше зменшується амплітуда другої гармоніки. Із 3,65 при  $\beta = 0,005$  вона знижується до 0,4 при  $\beta = 0,1$ .

Така поведінка параметрів детермінованої складової призводить до того, що діагностична ознака

$$J_1 = \frac{m_{\xi_0} + |m_{\xi_2}|}{|m_{\xi_1}|}$$

монотонно зменшується з ростом коефіцієнта демпфування (рис. 2).

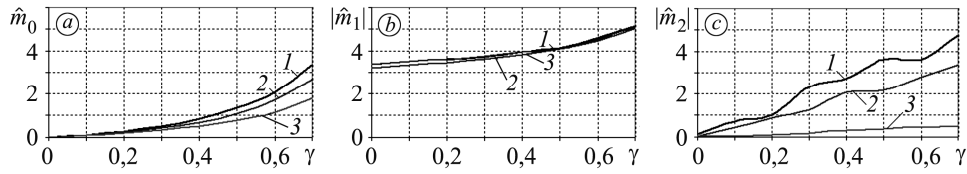
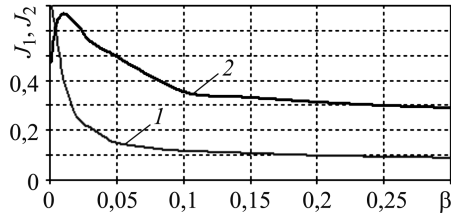


Рис. 1. Оцінки сталої складової  $\hat{m}_0$  (a), амплітуд першої  $|\hat{m}_1|$  (b) та другої  $|\hat{m}_2|$  (c) гармонік залежно від відносної довжини тріщини для різних коефіцієнтів демпфування: 1 –  $\beta = 0,005$ ; 2 –  $\beta = 0,01$ ; 3 –  $\beta = 0,1$ .

Fig. 1. Dependences of constant component  $\hat{m}_0$  (a), amplitudes of the first  $|\hat{m}_1|$  (b) and the second  $|\hat{m}_2|$  (c) harmonics estimators on crack size at different damping coefficients: 1 –  $\beta = 0.005$ ; 2 –  $\beta = 0.01$ ; 3 –  $\beta = 0.1$ .

Рис. 2. Діагностичні ознаки залежно від коефіцієнта демпфування ( $J_1 - J_2$ ) при  $\gamma = 0,25$ .

Fig. 2. Dependences of diagnostic criteria on damping coefficients ( $J_1 - J_2$ ) at  $\gamma = 0.25$ .



Поведінка оцінок кореляційних компонентів характеризується тим, що ріст їх абсолютних значень зі збільшенням довжини тріщини для низьких значень коефіцієнта демпфування сповільнюється за малих і середніх тріщин (рис. 3). Це призводить до того, що діагностична ознака

$$J_2 = \frac{\Delta \hat{B}_0(0) + |\hat{B}_1(0)| + |\hat{B}_2(0)|}{\hat{B}_0(0)},$$

де  $B_0(0)$  – значення нульового кореляційного компонента за відсутності тріщини, а  $\Delta B_0$  – приріст за появи тріщин, для таких значень  $\gamma$  спочатку росте, досягає максимального значення, а потім монотонно знижується (рис. 2). При цьому при  $\beta > 0,1$  вона вже змінюється несуттєво і є майже в три рази більшою, ніж  $J_1$ . Для великих тріщин  $J_2$  повільно спадає. Так, для  $\gamma = 0,6$  при  $\beta = 0,005$  величина  $J_2 = 4,0$ ; при  $\beta = 0,01$  та  $0,1$  вона становить 3,7 та 1,8, відповідно.

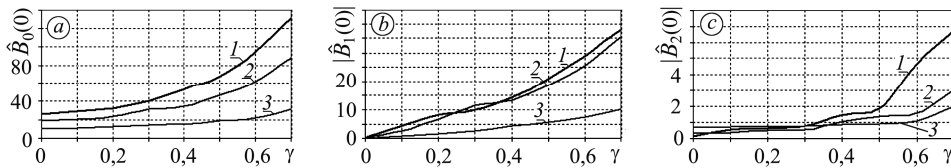


Рис. 3. Оцінки нульового (a), абсолютних значень першого (b) та другого (c) кореляційних компонентів при  $u = 0$  залежно від довжини тріщини для різних коефіцієнтів демпфування: 1 –  $\beta = 0,005$ ; 2 –  $\beta = 0,01$ ; 3 –  $\beta = 0,1$ .

Fig. 3. Dependences of the zero-th (a), absolute values of the first (b) and the second (c) covariance components estimators at  $u = 0$  on the crack size for different damping coefficients: 1 –  $\beta = 0.005$ ; 2 –  $\beta = 0.01$ ; 3 –  $\beta = 0.1$ .

Слід відмітити, що зі збільшенням коефіцієнта демпфування змінюється кореляційна структура вимушених коливань. Це проявляється як у зміні співвідношень між амплітудами гармонічних складових кореляційних компонентів, так і

фазових співвідношень. Такі зміни особливо виразно спостерігаємо на графіках оцінок спектральних компонентів ПКВП (рис. 4), що описують стохастичну складову вимушених коливань. Ці величини обчислили з використанням корелограмного методу Блекмана–Тьюкі [10, 11].

При  $\beta = 0,005$  пікове значення оцінки нульового спектрального компонента на частоті основного резонансу майже в чотири рази перевищує її пікове значення на частоті суперрезонансу, при  $\beta = 0,01$  ці значення практично вирівнюються, а при  $\beta = 0,1$  оцінка  $\hat{f}_0(\omega)$  має тільки один пік на частоті суперрезонансу. З графіків (рис. 4) видно, що цей пік з ростом  $\beta$  змінюється несуттєво. Величини  $\text{Re } \hat{f}_1(\omega)$  і  $\text{Im } \hat{f}_1(\omega)$  при  $\beta = 0,005$  практично однакові, при  $\beta = 0,01$  значення  $\text{Im } \hat{f}_1(\omega)$  майже у два рази перевищує значення  $\text{Re } \hat{f}_1(\omega)$ . Така ситуація зберігається і при  $\beta = 0,1$ , однак тут пікові значення величин  $\text{Re } \hat{f}_1(\omega)$  і  $\text{Im } \hat{f}_1(\omega)$  є значно меншими. З ростом  $\beta$  змінюється також співвідношення між оцінками  $\text{Re } \hat{f}_2(\omega)$  і  $\text{Im } \hat{f}_2(\omega)$ .

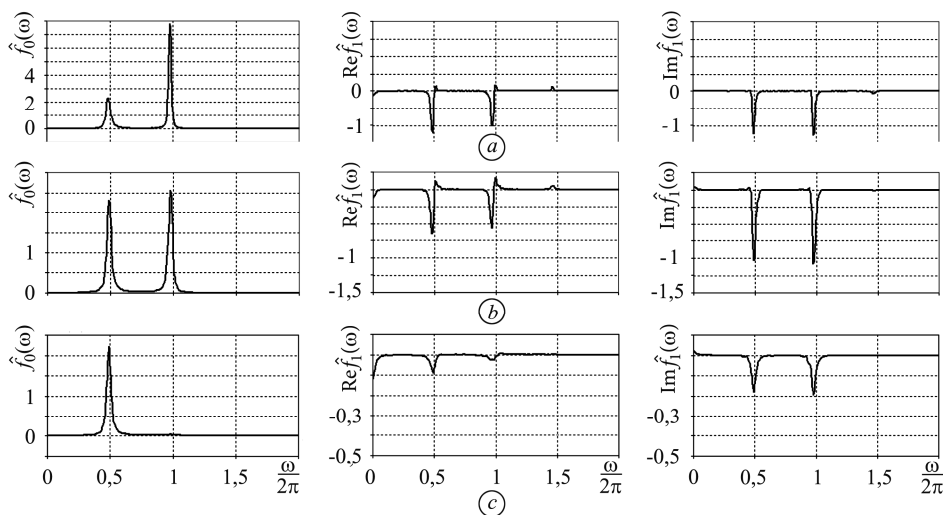


Рис. 4. Оцінки спектральних компонентів залежно від частоти при  $\gamma = 0,25$  для різних коефіцієнтів демпфування:  $a - \beta = 0,005$ ;  $b - \beta = 0,01$ ;  $c - \beta = 0,1$ .

Fig. 4. Dependences of spectral components estimators on frequency at  $\gamma = 0.25$  for different damping coefficients:  $a - \beta = 0.005$ ;  $b - \beta = 0.01$ ;  $c - \beta = 0.1$ .

Збільшення швидкості зникання кореляційних зв'язків стохастичної складової вимушувальної сили призводить до розширення її спектра. Тому слід очікувати, що за тієї самої потужності вхідного сигналу числові значення вібродіагностичних параметрів стохастичної складової зменшаться. Це й підтверджено результатами обробки (рис. 5). Як бачимо, при  $\alpha = 1,0$  суттєво зростають значення нульового кореляційного компонента за відсутності дефекту.

Однак самі прирости цієї величини, які доцільно використовувати для діагностики, мало відрізняються від тих, які є при  $\alpha = 0,01$  (див. рис. 3b). За малих і середніх тріщин амплітуди першої та другої гармонік зростають повільніше зі збільшенням  $\gamma$ . Їх ріст пришвидшується за великих тріщин, однак значення цих величин не досягають того рівня, який маємо за повільного зникання кореляційних зв'язків.

Суттєво змінюються значення діагностичних параметрів як детермінованої, так і стохастичних складових за зміни частоти несучої вимушувальної сили. На рис. 6 показані залежності сталої складової, а також амплітуд перших і других гармонік детермінованої та дисперсії стохастичної складових від відносної довжини тріщин, коли частота несучої вимушувальної сили є в 2 рази більшою за частоту основного резонансу, що відповідає режиму субрезонансу.

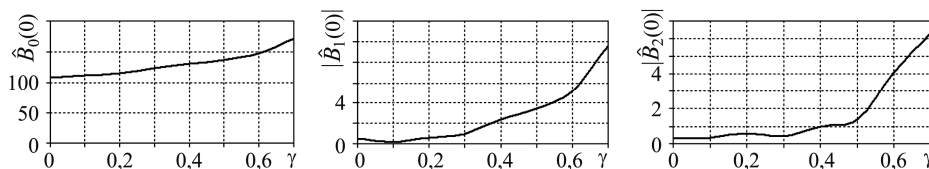


Рис. 5. Оцінки кореляційних компонентів залежно від відносної довжини тріщини при  $\alpha = 1$ ;  $\beta = 0,1$ .

Fig. 5. Dependences of covariance components estimators on crack size at  $\alpha = 1$ ;  $\beta = 0.1$ .

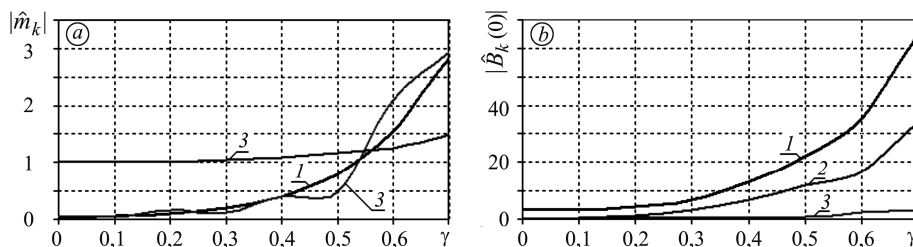


Рис. 6. Оцінки сталої складової (1) та амплітуд першої (2) та другої (3) гармонік математичного сподівання (a) та дисперсії (b) залежно від відносної довжини тріщини ( $\alpha = 0,01$ ;  $\beta = 0,01$ ) за частоти несучої вимушувальної сили в 2 рази більшої, ніж частота основного резонансу.

Fig. 6. Dependences of constant component (1), amplitudes of the first (2) and the second (3) harmonics estimators of mean function (a) and variance (b) on relative crack size ( $\alpha = 0.01$ ;  $\beta = 0.01$ ) for carrier frequency twice greater than a natural one.

Як видно (рис. 6), зміни сталої складової математичного сподівання несуттєво відрізняються від тих, якими вони є при суперрезонансі (див. рис. 1b). Значно повільніше зростає амплітуда другої гармоніки, а також амплітуда першої за малих і середніх тріщин, однак її значення є меншим, ніж за субрезонансу. Швидкість росту сталої складової оцінки дисперсії, а також амплітуд першої та другої гармонік для малих і середніх тріщин є меншою від тієї, яку спостерігаємо при субрезонансі. Вона збільшується для великих тріщин. При цьому амплітуди першої та другої гармонік досягають субрезонансних значень, а значення оцінки нульового кореляційного компонента є у 1,5 рази меншими.

У режимі основного резонансу значно зростають зміни сталої складової математичного сподівання (рис. 7), а також амплітуди першої гармоніки.

Зміни амплітуди другої гармоніки є практично такими ж, як за субрезонансу. Характерною особливістю режиму основного резонансу є суттєво більші зміни кореляційних компонентів, які спостерігаються на фоні значного початкового значення нульового кореляційного компонента за відсутності тріщини.

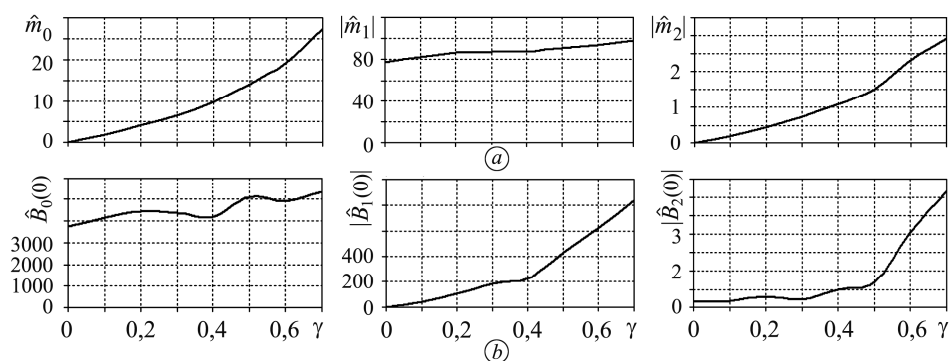


Рис. 7. Оцінки сталої складової та амплітуд першої та другої гармонік математичного сподівання (а) та дисперсії (б) залежно від відносної довжини тріщини ( $\alpha = 0,01$ ;  $\beta = 0,01$ ) за частоти несучої вимушувальної сили, яка дорівнює частоті основного резонансу.

Fig. 7. Dependences of constant component, amplitudes of the first and the second harmonics estimators of mean function (a) and variance (b) on relative crack size ( $\alpha = 0.01$ ;  $\beta = 0.01$ ) for carrier frequency that is equal to a natural one.

### ВИСНОВКИ

Дослідження показали, що значення діагностичних параметрів детермінованої та стохастичної складових вимушених коливань стержня суттєво залежать від коефіцієнта демпфування. Зі збільшенням цієї величини амплітуди гармонічних складових детермінованої складової, а також швидкість їх росту, зі зростанням довжини тріщини зменшуються, що призводить до монотонного зниження діагностичної ознаки  $J_1$ , сформованої на їх основі. При  $\beta > 0,1$  таке спадання вже несуттєве. Подібна поведінка за великих тріщин характерна і для діагностичної ознаки  $J_2$ , сформованої на основі параметрів стохастичної складової. За малих і середніх тріщин для невеликих  $\beta$  величина  $J_2$  є зростаючою функцією, яка за певних  $\beta$  досягає максимального значення, а потім знижується. Слід відмітити, що рівень, до якого знижується  $J_2$  є суттєво вищим від рівня  $J_1$ .

Результати обробки підтвердили, що за субгармонічного резонансу як детерміновані, так і ймовірнісні діагностичні ознаки є слабочутливими за малих і середніх тріщин. У режимі основного резонансу інформативними є стала складова математичного сподівання та амплітуда другої гармоніки, а також перший та другий кореляційні компоненти. Початкові значення нульового кореляційного компонента є набагато більшими, ніж за супер- і субгармонічного резонансів, а його зміни співмірні зі змінами першого кореляційного компонента.

**РЕЗЮМЕ.** Проанализировано детерминированную и стохастическую составляющие реализаций продольных колебаний стержня с трещиной, которые находят с помощью численных решений нелинейного дифференциального уравнения со стохастической вынуждающей силой. Показано, что коэффициент демпфирования существенно влияет на структуру вынужденных колебаний, что приводит к изменению диагностических параметров. Приведены результаты анализа зависимостей характеристик колебаний от частоты несущей стохастической вынуждающей силы, а также от скорости затухания корреляционных связей ее огибающей.

**SUMMARY.** The analysis of deterministic and stochastic parts of longitudinal oscillation of a cracked beam, obtained by the numerical solutions of nonlinear differential equation with stochastic loading, is provided. It is shown that damping coefficient significantly affects the forced oscillations structure, thus leading to the changes of diagnostic parameter values. The results of analysis of the dependences of oscillation characteristics on carrier frequency of stochastic loading and also on damping rapidity of envelope correlations are given.

1. *Матвеев В. В.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 1. Продольные колебания, аналитическое решение // Пробл. прочности. – 1997. – № 6. – С. 5–20.
2. *Ройтман А. Б., Александрова Н. Б., Христенко Т.А.* Вибрационная диагностика “дышащих” трещин в изделиях // Техн. диагностика и неразрушающий контроль. – 2000. – № 1. – С. 58–66.
3. *Матвеев В. В., Бовсуновский А. П.* Некоторые аспекты колебаний упругого тела с “дышащей” наплашностью материала // Пробл. прочности. – 2000. – № 5. – С. 44–60.
4. *Бовсуновский А. П.* Сравнительный анализ нелинейных резонансов механической системы с несимметричной кусочно-линейной характеристикой восстанавливающей силы // Пробл. прочности. – 2007. – № 2. – С. 72–87.
5. *Аналіз вібраційного стану стержня з тріщиною під впливом стохастичних циклічних навантажень / І. Й. Мацько, І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, Я. Маєвські // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2014. – 50, № 2. – С. 128–136.*  
(*Mats'ko I. I., Yavors'kyi I. M., Yuzefovych R. M., Majewski J.* Analysis of the vibration state of a rod containing a crack under the action of stochastic cyclic loads // *Materials Science. – 2014. – 50, № 2. – P. 303–313.*)
6. *Прочность материалов и конструкций / Ред. кол. В. Т. Трощенко (отв. ред.) и др. – К.: Академперіодика, 2005. – 1088 с.*
7. *Бовсуновский А. П., Бовсуновский О. А.* Использование нелинейных резонансов для диагностики закрывающихся трещин в стержневых элементах // Пробл. прочности. – 2010. – № 3. – С. 125–141.
8. *Coherent Covariance Analysis of Periodically Correlated Random Processes / I. Javorskyj, I. Isayev, Z. Zakrzewski, S.P. Brooks // Signal Proc. – 2007. – 87. – P. 13–32.*
9. *Component covariance analysis for periodically correlated random processes / I. Javorskyj, I. Isayev, J. Majewski, R. Yuzefovych // Signal Proc. – 2010. – 90. – P. 1083–1102.*
10. *Яворський І. М.* Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань / Під заг. ред. акад. НАН України З. Т. Назарчука. – Львів: Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2013. – 804 с.
11. *Methods of Periodically Correlated Random Processes and Their Generalizations / I. Yavorskyj, R. Yuzefovych, I. Kravets, I. Matsko // Cyclostationarity: Theory and Methods. Lecture Notes in Mechanical Engineering / Ed. F. Chaari, J. Leskow, A. Sanches-Ramirez. – New York: Springer, 2014. – P. 73–93.*

Одержано 27.11.2015