УДК 539.3

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ БАГАТОЗВ'ЯЗНОГО КВАЗІОРТОТРОПНОГО ТІЛА

М. П. САВРУК [1], *А. КАЗБЕРУК* [2], *А. Б. ЧОРНЕНЬКИЙ* [1]

[1] *Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;*
[2] *Білостоцька політехніка, Польща*

Побудовано систему сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) першої основної задачі плоскої теорії пружності для квазіортотропного тіла, що містить отвори та тріщини. Для цього використано відомі інтегральні рівняння для системи криволінійних тріщин-розрізів у квазіортотропній площині. Інтегральні рівняння для багатозв'язної області з отворами побудовано за допомогою переходу від розімкнених розрізів у нескінченній пружній площині до замкнених. Отримані так СІР першого роду на замкнених контурах (межі тіла) доповнено відповідними регуляризувальними функціоналами, які забезпечують єдиний розв'язок інтегральних рівнянь для довільної правої частини.

Ключові слова: *плоска задача теорії пружності, квазіортотропне тіло, багатозв'язна область, отвори та криволінійні тріщини, метод сингулярних інтегральних рівнянь.*

У сучасній техніці широко використовують композитні матеріали, напружено-деформований стан яких описує теорія пружності ортотропного тіла. Вироджений ортотропний матеріал, модуль зсуву якого зв'язаний з іншими характеристиками матеріалу залежністю, що призводить до кратних коренів характеристичного рівняння, називають квазіортотропним [1–6]. Це клас матеріалів, до якого належать і ізотропні тіла. У літературі їх називають також спеціально-ортотропними [7–10], виродженими ортотропними [11, 12] та псевдоізотропними [13, 14]. Виявлено [2, 6], що відношення модулів пружності в ортотропному матеріалі є основним механічним параметром, тобто велику кількість ортотропних матеріалів можна наближено розглядати як квазіортотропні з таким самим відношенням пружних модулів.

Нижче побудовано систему сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) плоскої задачі теорії пружності для скінченної багатозв'язної квазіортотропної області з криволінійними отворами та тріщинами, коли на межі тіла задані напруження. Використано відомі [4] інтегральні рівняння для системи криволінійних тріщин у квазіортотропній площині. Тріщини-розрізи прийнято замкненими і побудовано інтегральні рівняння для багатозв'язної області з отворами. Отримані так рівняння розв'язно лише за додаткових умов (умов рівноваги), які повинні задовольняти їх праві частини. Для безумовної розв'язуваності до лівих частин таких рівнянь додано певні функціонали, які рівні нулю за виконання умов рівноваги. Модифіковані так інтегральні рівняння мають єдиний розв'язок для довільної правої частини, що дає змогу знаходити їх розв'язок числовими методами [15].

Основні співвідношення теорії пружності квазіортотропного тіла. Лінійні залежності між компонентами тензорів напружень σ_x, σ_y, τ_{xy} та деформацій

Контактна особа: М. П. САВРУК, e-mail: savruk@ipm.lviv.ua

ε_x, ε_y, ε_{xy} (закон Гука) за плоского напруженого стану для ортотропного тіла, коли координатні осі x і y вибрано вздовж головних осей ортотропії, мають вигляд [16]

$$\varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y,\ \varepsilon_y = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y,\ 2\varepsilon_{xy} = a_{66}\tau_{xy}. \qquad (1)$$

Тут $a_{11} = 1/E_x$, $a_{22} = 1/E_y$, $a_{66} = 1/G$, $a_{12} = -/E_x$; $E_x = E_1$ і $E_y = E_2$ ($E_x = E_2$ і $E_y = E_1$) – модулі пружності вздовж осей x і y, $\nu_{xy} = \nu_{12}$ ($\nu_{xy} = \nu_{21} = \nu_{12}E_2/E_1$) – коефіцієнт Пуассона; G – модуль зсуву.

Для плоскої деформації пружні сталі a_{ij} у законі Гука (1) необхідно замінити на величини $a'_{ij} = a_{ij} - (a_{i3}a_{j3})/a_{33}$, де $a_{13} = -\nu_{13}/E_1$, $a_{23} = -\nu_{23}/E_2$, $a_{33} = 1/E_3$ – відповідні пружні характеристики ортотропного матеріалу.

У квазіортотропному матеріалі сталі a_{ij} зв'язані залежністю

$$a_{66} = 2(\sqrt{a_{11}a_{22}} - a_{12}),$$

яка для плоского напруженного стану набуває вигляду

$$G = E_1 \Big/ [2(\sqrt{E_1/E_2} + \nu_{12})].$$

Введемо функцію напружень $F(x, y)$ залежностями [16]

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\ \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \qquad (2)$$

З умови сумісності деформацій за відсутності масових сил для функції напружень $F(x, y)$ для квазіортотропного тіла отримуємо еліптичне диференційне рівняння четвертого порядку

$$\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + 2\gamma^2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \gamma^4 \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = 0, \qquad (3)$$

характеристичне рівняння якого має вигляд

$$\mu^4 + 2\gamma^2\mu^2 + \gamma^4 = 0. \qquad (4)$$

Тут $\gamma = \sqrt[4]{a_{22}/a_{11}}$ – параметр ортотропії (для плоского напруженого стану $\gamma = \sqrt[4]{E_x/E_y}$). Рівняння (4) має комплексно спряжені кратні корені $\mu_1 = \mu_2 = i\gamma$, $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = -i\gamma$. Коли параметр $\gamma = 1$, приходимо до ізотропного матеріалу.

Загальний розв'язок рівняння (3) для квазіортотропного тіла можна подати через аналітичні функції $\varphi_1(z_1)$ і $\chi_1(z_1)$ від комплексного аргументу $z_1 = x + i\gamma y$ у вигляді [16]

$$F(x, y) = \mathrm{Re}[\bar{z}_1\varphi_1(z_1) + \chi_1(z_1)]. \qquad (5)$$

Зі співвідношень (2) і (5) отримаємо компоненти напружень через комплексні потенціали $\Phi_1(z_1) = \varphi'_1(z_1)$ і $\Psi_1(z_1) = \psi'_1(z_1) = \chi''_1(z_1)$:

$$\begin{cases} \sigma_y + \gamma^{-2}\sigma_x = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi_1(z_1), \\ \sigma_y - \gamma^{-2}\sigma_x + 2i\gamma^{-1}\tau_{xy} = 2[\bar{z}_1\Phi'_1(z_1) + \Psi_1(z_1)]. \end{cases}$$

Компоненти вектора переміщення u і v можна також виразити через комплексні потенціали $\varphi_1(z_1)$ та $\psi_1(z_1) = \chi'_1(z_1)$ [17]:

$$2G[u+(i/\gamma)\nu]=\kappa\varphi_1(z_1)-z_1\overline{\varphi_1'(z_1)}-\overline{\psi_1(z_1)}\,, \tag{6}$$

де $\kappa=(3\sqrt{a_{22}/a_{11}}+a_{12}/a_{22})\Big/(\sqrt{a_{22}/a_{11}}-a_{12}/a_{22})$ ($\kappa=(3\gamma^2-\nu_{xy})\Big/(\gamma^2+\nu_{xy})$ – для плоского напруженого стану).

З рівності (6) знаходимо похідні переміщень [4]:

$$2G\frac{d}{dt_1}\big(u+(i/\gamma)v\big)=\kappa\Phi_1(t_1)-\overline{\Phi_1(t_1)}-\frac{d\overline{t_1}}{dt_1}\Big(t_1\overline{\Phi_1'(t_1)}+\overline{\Psi_1(t_1)}\Big),\ t_1\in L_1\,, \tag{7}$$

де L_1 – контур у допоміжній площині $z_1=x+i\gamma y$, що відповідає криволінійному контуру L у комплексній площині $z=x+iy$.

Нехай X_n і Y_n – декартові компоненти вектора напружень, що діють від додатної нормалі n на криволінійному контурі L. Вони пов’язані з нормальною і дотичною компонентами напружень N і T залежністю [18]

$$X_n+iY_n=-i\frac{dt}{ds}(N+iT)=\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial y}-i\frac{\partial F}{\partial x}\right), \tag{8}$$

де s – дугова абсциса точки $t=x+iy\in L$.

Використовуючи подання (5) і (8), знаходимо [4]:

$$\big((i/\gamma)X_n-Y_n\big)\frac{ds}{dt_1}=\Phi_1(t_1)+\overline{\Phi_1(t_1)}+\frac{d\overline{t_1}}{dt_1}\Big(t_1\overline{\Phi_1'(t_1)}+\overline{\Psi_1(t_1)}\Big),\ t_1\in L_1\,. \tag{9}$$

Співвідношення (6), (7) і (9) дають змогу зводити основні задачі теорії пружності для багатозв’язних квазіортотропних тіл до крайових задач теорії функції комплексної змінної.

З формули (9) знайдемо компоненти головного вектора X і Y зусиль, що діють на контурі L:

$$(i/\gamma)X-Y=\int_L\Big((i/\gamma)X_n-Y_n\Big)ds=\int_{L_1}\left[\Phi_1(t_1)+\overline{\Phi_1(t_1)}+\frac{d\overline{t}}{dt_1}\Big(t_1\overline{\Phi_1'(t_1)}+\overline{\Psi_1(t_1)}\Big)\right]dt_1\,. \tag{10}$$

Аналогічний вираз для головного моменту M цих зусиль відносно початку координат має вигляд

$$\begin{aligned}M&=\int_L(xY_n-yX_n)ds=-\operatorname{Re}\int_{L_1}\left\{[\Phi_1(t_1)+\overline{\Phi_1(t_1)}+\frac{d\overline{t_1}}{dt_1}[t_1\overline{\Phi_1'(t_1)}+\overline{\Psi_1(t_1)}]\right\}\overline{t_1}dt_1=\\&=-\operatorname{Re}\int_{L_1}t_1\Psi_1(t_1)dt_1.\end{aligned} \tag{11}$$

Тоді поворот ε точки z пружної області знайдемо за формулою

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\gamma(\kappa+1)}{2G}\operatorname{Im}[\Phi_1(z_1)]\,. \tag{12}$$

Коли пружна квазіортотропна площина на нескінченності знаходиться під дією двовісного розтягу напруженнями $\sigma_y^\infty=p,\ \sigma_x^\infty=q$ та зсуву $\tau_{xy}^\infty=\tau$, то однорідний напружений стан у ній описують потенціали

$$\Phi_1^0(z_1)=(p+\gamma^{-2}q)/4,\qquad \Psi_1^0(z_1)=(p-\gamma^{-2}q)/2+i\gamma^{-1}\tau\,, \tag{13}$$

а вектор нормальних (N) і дотичних (T) напружень на криволінійному контурі L визначає співвідношення

$$N(t)+iT(t)=p_0(t)=\frac{1}{2}(p+q)+\frac{1}{2}(q-p-2i\tau)\frac{d\bar{t}}{dt},\ t=x+iy\in L\,,$$

яке не залежить від пружних сталих матеріалу і залишається таким самим, як для ізотропної площини.

Криволінійна тріщина [4]. Розглянемо першу основну задачу плоскої теорії пружності для квазіортотропного тіла з криволінійною тріщиною-розрізом уздовж гладкого контуру L, коли на берегах розрізу задані зрівноважені напруження

$$N^{+}+iT^{+}=N^{-}+iT^{-}=p(t),\quad t\in L\,, \tag{14}$$

а на нескінченності вони зникають. Тут і надалі верхні індекси "+" і "–" вказують на граничне значення відповідних величин, коли $z\to t\in L$ відповідно зліва (+) або справа (–) щодо вибраного додатного напряму обходу контуру L.

Скористаємось інтегральними зображеннями комплексних потенціалів

$$\Phi_1(z_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{L_1}\frac{g_1'(t_1)dt_1}{t_1-z_1},\ \Psi_1(z_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{L_1}\left[\frac{\overline{g_1'(t_1)}d\bar{t}_1}{t_1-z_1}-\frac{\bar{t}_1 g_1'(t_1)dt_1}{\left(t_1-z_1\right)^2}\right], \tag{15}$$

де невідому функцію

$$g_1'(t_1)=\frac{E_x}{4i\gamma^2}\frac{d}{dt_1}\left[\left(u+(i/\gamma)v\right)^{+}-\left(u+(i/\gamma)v\right)^{-}\right]$$

виражено через стрибок переміщень на контурі L.

Крайову умову (14) запишемо у вигляді

$$\left[(i/\gamma)X_n^{\pm}-Y_n^{\pm}\right]\frac{ds}{dt_1}=\tilde{P}(t)=\tilde{P}_1(t_1)=\frac{1}{2\gamma}\left[(1+\gamma)p(t)-(1-\gamma)\overline{p(t)}\frac{d\bar{t}}{dt}\right]\frac{dt}{dt_1}\,. \tag{16}$$

Задовольнивши її за допомогою потенціалів (15), для визначення невідомої функції $g_1'(t_1)$ отримаємо СІР

$$\frac{1}{\pi}\int_{L_1}[K_1(\tau_1,t_1)g_1'(\tau_1)d\tau_1+L_1(\tau_1,t_1)\overline{g_1'(\tau_1)}d\bar{\tau}_1]=\tilde{P}_1(t_1)\,, \tag{17}$$

де

$$\begin{aligned}K_1(\tau_1,t_1)&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\tau_1-t_1}+\frac{1}{\bar{\tau}_1-\bar{t}_1}\frac{d\bar{t}_1}{dt_1}\right];\\ L_1(\tau_1,t_1)&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\bar{\tau}_1-\bar{t}_1}-\frac{\tau_1-t_1}{(\bar{\tau}_1-\bar{t}_1)^2}\frac{d\bar{t}_1}{dt_1}\right].\end{aligned} \tag{18}$$

Розв'язок рівняння (17) повинен задовольняти умову

$$\int_{L_1}g_1'(t_1)dt_1=0\,, \tag{19}$$

яка забезпечує однозначність переміщень за обходу контуру тріщини L.

Комплексні потенціали напружень (15) та СІР (17) справедливі також і для системи криволінійних тріщин у квазіортотропній площині, коли символ L позначає сукупність контурів тріщин, проте додаткова умова однозначності переміщень (19) повинна виконуватися для кожної тріщини окремо.

Замкнений криволінійний розріз. Вважатимемо розріз L у квазіортотропній площині замкненим, на берегах якого задане самозрівноважене навантаження (14). Зі співвідношень (15) і (17) дістанемо інтегральні зображення і СІР як для внут-

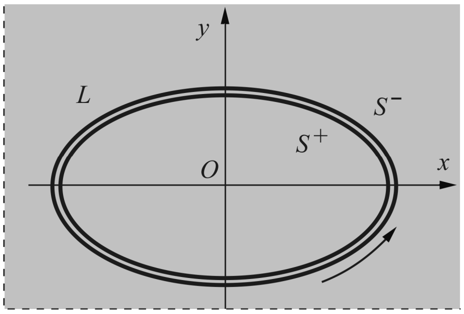

Рис. 1. Замкнений криволінійний розріз у пружній квазіортотропній площині.

Fig. 1. A closed curvilinear cut in an elastic quasi-orthotropic plane.

рішньої (область S^+ – криволінійний диск), так і зовнішньої (область S^- – нескінченна площина з криволінійним отвором) перших основних задач теорії пружності (рис. 1).

Використовуючи співвідношення (16), з формул (10) та (11) знайдемо компоненти головного вектора

$$(i/\gamma)X - Y = \int_{L_1} \tilde{P}_1(t_1)dt_1 = \int_{L} p(t)dt \quad (20)$$

та головний момент

$$M = -\operatorname{Re}\int_{L_1} \tilde{P}_1(t_1)\bar{t}_1 dt_1 = -\operatorname{Re}\int_{L} p(t)\bar{t}dt \quad (21)$$

зусиль, що діють з боку додатної (зовнішньої) нормалі n на контурі L.

Порівнюючи комплексні потенціали (15), інтегральне рівняння (17) та його ядра (18), а також вирази для головних вектора (20) та моменту (21), з відповідними співвідношеннями в ізотропному випадку [15, 19], легко побачити аналогію між цими задачами: щоб з рівнянь для ізотропного тіла отримати відповідні співвідношення для квазіортотропної пружної області, потрібно замінити функцію $p(t)$ на $\tilde{P}_1(t_1)$ та додати індекс “1” у відповідних позначеннях. Нижче скористаємося цією аналогією, щоб побудувати модифіковані інтегральні рівняння для багатозв’язної області з отворами та тріщинами.

Підставивши потенціали (15) у формули (10) і (11), прийдемо до умов

$$\int_{L_1} \tilde{P}_1(t_1)dt_1 = 0, \ \operatorname{Re}\int_{L_1} \tilde{P}_1(t_1)\bar{t}_1 dt_1 = 0\,,$$

тобто ці потенціали визначають напружено-деформований стан в областях S^+ і S^-, коли на межовому контурі L діє зрівноважене навантаження. Отже, й інтегральне рівняння (17) на замкненому контурі має розв’язок лише тоді, коли його права частина задовольняє умови рівноваги. Для ефективного числового розв’язування необхідно це рівняння змінити так, щоб модифіковане рівняння мало єдиний розв’язок для довільної правої частини.

Додавши до лівої частини рівняння (17) певні оператори (рівні нулю за виконання умов рівноваги), дістанемо модифіковане СІР на замкненому контурі

$$\int_{L_1} [K_1(\tau_1,t_1)g_1'(\tau_1)d\tau_1 + L_1(\tau_1,t_1)\overline{g_1'(\tau_1)}d\bar{\tau}_1] - \frac{M^{(1)}}{2i\bar{t}_1^2}\frac{d\bar{t}_1}{dt_1} + \frac{a_0}{l}\frac{ds_1}{dt_1} = \pi\tilde{P}_1(t_1), \quad t_1 \in L_1\,, \quad (22)$$

яке має єдиний розв’язок для довільної правої частини [15]. Тут s_1 – дугова абсциса, що відповідає точці t_1, l – довільний параметр розмірності довжини,

$$M^{(1)} = i\int_{L_1}\left[g_1'(t_1)\bar{t}_1 dt_1 - \overline{g_1'(t_1)}t_1 d\bar{t}_1\right], \quad a_0 = \int_{L_1} g_1'(t_1)dt_1\,.$$

Тут прийняли, що початок координат належить до області S^+. Момент $M^{(1)}$ у рівнянні (22) можна виразити через шукану функцію і інакше, зокрема, замінити на величину

$$M^{(0)} = il^2\int_{L_1}\left[g_1'(t_1)\frac{dt_1}{t_1} - \overline{g_1'(t_1)}\frac{d\bar{t}_1}{\bar{t}_1}\right],$$

яка пропорційна повороту початку координат (див. формулу (12)).

Система криволінійних отворів в обмеженому тілі. Перейдемо до загального розгляду першої основної задачі теорії пружності для багатозв'язної квазіортотропної області з криволінійними отворами. Нехай область S, що зайнята пружним тілом, обмежена одним або декількома замкненими контурами $L^{(1)}, L^{(2)}, \ldots, L^{(M)}, L^{(0)}$, де перші M контурів розміщені один поза одного, а останній охоплює решта контурів. Додатним напрямом обходу контурів $L(k)$ ($k = 1, 2, \ldots, M$) вважатимемо той, за якого область S залишається зліва (рис. 2).

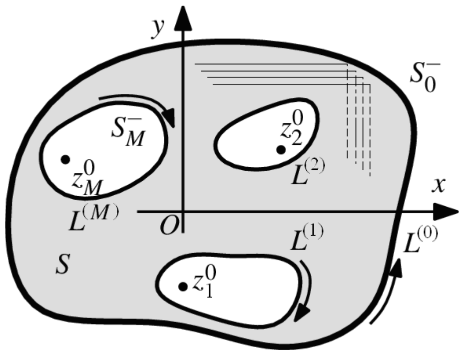

Рис. 2. Скінченна пружна квазіортотропна область з отворами.

Fig. 2. Finite elastic quasi-orthotropic region with holes.

Розглянемо першу основну задачу, коли на контурах $L^{(k)}$ задані напруження

$$N + iT = p(t),\ t \in L = \cup L^{(k)}\ (k = \overline{0, M}) ,\qquad (23)$$

які задовольняють умови рівноваги, тобто головні вектор і момент зовнішніх зусиль, що діють на межі тіла, рівні нулю:

$$\sum_{k=0}^{M} \int_{L^{(k)}} p(t)dt = 0, \quad \sum_{k=0}^{M} \int_{L^{(k)}} \overline{t}p(t)dt = 0 . \qquad (24)$$

Комплексні потенціали для несамозрівноваженого навантаження на внутрішніх контурах $L^{(k)}\ (k = \overline{0, M})$ можна подати так:

$$\Phi_1^*(z_1) = -\frac{1}{2\pi\gamma(1+\kappa)} \sum_{k=1}^{M} \frac{X_k + i\gamma Y_k}{z_1 - \tilde{z}_k^0} + \Phi_1(z_1);$$

$$\Psi_1^*(z_1) = \frac{1}{2\pi\gamma(1+\kappa)} \sum_{k=1}^{M} \left[\frac{\kappa(X_k - i\gamma Y_k)}{z_1 - \tilde{z}_k^0} - \frac{\overline{\tilde{z}}_k^0 (X_k + i\gamma Y_k)}{(z_1 - \tilde{z}_k^0)^2} \right] + \Psi_1(z_1),$$

де X_k, Y_k – компоненти головного вектора зовнішніх зусиль, що діють на контурі $L^{(k)}$; $\tilde{z}_k^0 = [(1+\gamma)z_k^0 + (1-\gamma)\overline{z}_k^0]/2$, z_k^0 – довільна точка всередині контуру $L^{(k)}$; аналітичні в області S функції $\Phi_1(z_1)$ і $\Psi_1(z_1)$ відповідають такому напруженому стану, коли головні вектори зовнішніх зусиль, що діють на контурах $L^{(k)}(k = \overline{0, M})$, рівні нулю. Тоді для багатозв'язної області, що містить M отворів з межовими контурами $L^{(k)}(k = \overline{0, M})$, комплексні потенціали $\Phi_1(z_1)$ і $\Psi_1(z_1)$ шукатимемо у вигляді

$$\Phi_1(z_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \frac{g_1'(t_1)dt_1}{t_1 - z_1},$$

$$\Psi_1(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{M} \frac{M^{(k)}}{(z_1 - \tilde{z}_k^0)^2} + \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \left[\frac{\overline{g_1'(t_1)}d\overline{t_1}}{t_1 - z_1} - \frac{\overline{t_1} g_1'(t_1)dt_1}{\left(t_1 - z_1\right)^2} \right], \qquad (25)$$

де $L_1 = \cup L_1^{(k)} (k = \overline{0, M})$; величини $M^{(k)}$ визначає співвідношення

$$M^{(k)} = i\int\limits_{L_1^{(k)}}\left[g_1'(t_1)\bar{t}_1 dt_1 - \overline{g_1'(t_1)} t_1 d\bar{t}_1\right] (k = 1,2,...,M)\,.$$

Підставивши потенціали (25) у крайові умови (23), отримаємо систему $M+1$ СІР

$$\int\limits_{L_1}[K_1(\tau_1,t_1)g_1'(\tau_1)d\tau_1 + L_1(\tau_1,t_1)\overline{g_1'(\tau_1)}d\bar{\tau}_1] - \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{M}\frac{M^{(k)}}{(\bar{t}_1-\bar{\tilde{z}}_k^0)^2}\frac{d\bar{t}_1}{dt_1} + \frac{a_n^0}{l}\frac{ds_1}{dt_1} = \tag{26}$$
$$= \pi\tilde{P}_1(t_1), \quad t_1 \in L_1^{(n)},\ n = \overline{0,M}$$

для визначення $M+1$ невідомих функцій $g_1'(t_1)$ $(t_1 \in L_1^{(k)}, k = 0,1,...,M)$. Тут ядра $K_1(\tau_1,t_1)$, $L_1(\tau_1,t_1)$ визначають за формулами (18); $\tilde{z}_0^0 = z_0^0 = 0 \in S$ (рис. 2). До лівої частини системи (26) додано функціонали

$$M^{(0)} = il^2\sum_{k=0}^{M}\int\limits_{L_1^{(k)}}\left[g_1'(t_1)\frac{dt_1}{t_1} - \overline{g_1'(t_1)}\frac{d\bar{t}_1}{\bar{t}_1}\right],\quad a_n^0 = \int\limits_{L_1^{(n)}} g_1'(t_1)dt_1, n = 0.1,...,M\,, \tag{27}$$

рівні нулю за виконання умов рівноваги (24) і які забезпечують рівність нулю повороту в точці $z = 0$ та однозначність переміщень за обходу контурів отворів. Система інтегральних рівнянь (26) має єдиний розв'язок для довільної правої частини $\tilde{P}_1(t_1)$.

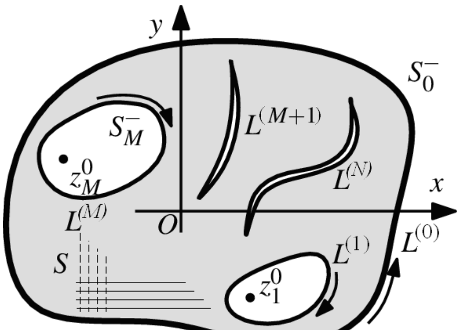

Рис. 3. Пружна квазіортотропна область з отворами та тріщинами.

Fig. 3. Elastic quasi-orthotropic region with holes and cracks.

Багатозв'язна квазіортотропна пружна область з отворами та тріщинами. Нехай пружна квазіортотропна область *S*, обмежена зовнішнім замкненим контуром $L^{(0)}$, містить *M* отворів з контурами $L^{(1)}, L^{(2)}, \ldots, L^{(M)}$ та *N–M* внутрішніх криволінійних тріщин $L^{(n)}$ ($n = M+1, \ldots, N$). Уважатимемо, що контури $L^{(n)}$, $n = 0, \ldots, N$ гладкі та не мають спільних точок (рис. 3).

На кожному з контурів $L^{(n)}$, $n = 0, \ldots, N$ задане самозрівноважене навантаження:

$$\begin{aligned} &N_n + iT_n = p(t),\ \ t \in L^{(n)}, \quad n = \overline{0,M}, \\ &N_n^+ + iT_n^+ = N_n^- + iT_n^- = p(t),\ \ t \in L^{(n)}, \quad n = \overline{M+1,N}. \end{aligned} \tag{28}$$

Комплексні потенціали $\Phi_1(z_1)$ і $\Psi_1(z_1)$ шукатимемо у вигляді (25), де $L_1 = \cup L_1^{(k)} (k = \overline{0,N})$. Підставивши функції (25) в крайові умови (28), отримаємо систему СІР

$$\int\limits_{L_1}[K_1(\tau_1,t_1)g_1'(\tau_1)d\tau_1 + L_1(\tau_1,t_1)\overline{g_1'(\tau_1)}d\bar{\tau}_1] - \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{M}\frac{\Delta_{kn}M^{(k)}}{(\bar{t}_1-\bar{\tilde{z}}_k^0)^2}\frac{d\bar{t}_1}{dt_1} + \frac{\delta_n a_n^0}{l}\frac{ds_1}{dt_1} = \tag{29}$$
$$= \pi\tilde{P}_1(t_1), \quad t_1 \in L_1^{(n)},\ n = 0,...,N$$

для визначення $N+1$ невідомих функцій $g_1'(t_1)$ $(t_1 \in L_1^{(k)},\ k = 0, 1, ..., N)$. Тут $\tilde{z}_0^0 = z_0^0 = 0 \in S$ (рис. 3); ядра $K_1(\tau_1, t_1)$, $L_1(\tau_1, t_1)$ визначили за формулами (18), а символи Δ_{kn}, δ_n – зі співвідношень

$$\Delta_{kn} = 1 + (\delta_n - 1)\delta_{k0};\ \delta_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \ldots, M, \\ 0, & n = M+1, \ldots, N; \end{cases} \quad \delta_{kn} = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

До лівих частин рівнянь (29) також додано функціонали (27), рівні нулю за виконання умов рівноваги. Тоді система інтегральних рівнянь (29) для довільної правої частини має єдиний розв'язок за додаткових умов

$$\int_{L_1^{(n)}} g_1'(\tau_1) d\tau_1 = 0, \quad n = M+1, \ldots, N,$$

які випливають з однозначності переміщень за обходу контурів тріщин.

Поклавши у вищенаведених співвідношеннях параметр $\gamma = 1$, отримаємо відомі результати для ізотропного тіла [15, 19, 20].

Числові результати. Розглянемо задачу про одновісний розтяг квазіортотропної пластини з вільним від навантаження еліптичним отвором (плоский напружений стан, $\gamma = \sqrt[4]{E_x / E_y}$). Осі еліпса паралельні до осей ортотропії (рис. 4).

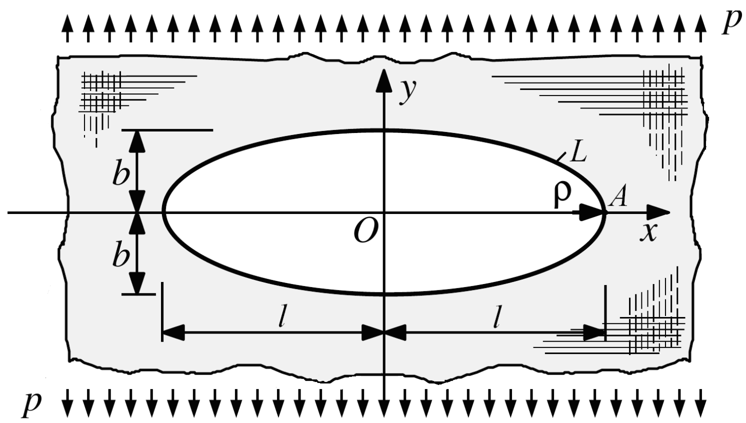

Рис. 4. Еліптичний отвір у квазіортотропній пластині під дією розтягу вздовж осі *Oy* на нескінченності.

Fig. 4. Elliptic hole in the orthotropic plate under tension along the *Oy* axis at infinity.

Скориставшись суперпозицією потенціалів (13) ($q = \tau = 0$) та (25) ($M = 1$), прийдемо до інтегрального рівняння (22), числовий розв'язок якого знайдено квадратурним методом без урахування симетрії задачі [15]. Для порівняння навели числові значення коефіцієнта концентрації напружень, отримані за використання різної кількості квадратурних вузлів $\tilde{n}$ (див. таблицю) та з аналітичного виразу ($\tilde{n} = \infty$) [21]

$$k_A = \sigma_y(l, 0) / p = 1 + (2/\gamma)\sqrt{l/\rho}\ ,$$

де $\rho = b^2 / l$ – радіус кривини у вершині еліптичного отвору (рис. 4). Результати таблиці ілюструють швидкість збіжності числового розв'язку до точного за використання регуляризувального функціоналу $M^{(1)}$. Замінивши у рівнянні (22) функціонал $M^{(1)}$ на $M^{(0)}$, отримаємо практично той самий числовий розв'язок. Хоча самі функціонали $M^{(1)}$ та $M^{(0)}$ рівні нулю для всіх чисел $\tilde{n}$, вони забезпечують збіжність числового розв'язку для довільного гладкого контуру L.

Значення коефіцієнта концентрації напружень k_A у вершині еліптичного отвору для відносного радіуса кривини $\varepsilon = \rho / l = 1/64$

$\tilde{n}$ / γ	6	8	10	12	14	16	32	64	∞
$\frac{1}{2}$	39,358	42,725	44,186	43,692	41,924	39,693	31,893	32,901	33
1	16,723	16,350	15,943	15,762	15,800	15,969	16,941	17,000	17
2	7,777	8,195	8,566	8,794	8,909	8,961	9,000	9,000	9

За геометричної та пружної симетрії відносно осей Ox ($g_1'(\bar{t}_1) = -\overline{g_1'(t_1)}$) або Oy ($g_1'(-\bar{t}_1) = -\overline{g_1'(t_1)}$) ефективність числового методу можна суттєво підвищити. Щоб врахувати симетрію відносно двох осей Ox і Oy, слід дещо модифікувати рівняння (22) [15, 19, 20].

ВИСНОВКИ

Записано сингулярні інтегральні рівняння першої основної задачі плоскої теорії пружності квазіортотропного тіла для багатозв'язної області, що містить отвори та криволінійні тріщини. Для безумовної розв'язуваності до рівнянь додано регуляризувальні функціонали, рівні нулю за виконання умов рівноваги. Ефективність їх числового розв'язування проілюстровано на задачі про одновісний розтяг квазіортотропної пластини з еліптичним отвором, для якої відомий замкнений аналітичний розв'язок.

РЕЗЮМЕ. Построена система сингулярных интегральных уравнений (СИУ) первой основной задачи плоской теории упругости для квазиортотропного тела, содержащего отверстия и трещины. При этом использованы известные интегральные уравнения для системы криволинейных трещин-разрезов в квазиортотропной плоскости. Интегральные уравнения для многосвязной области построены с помощью предельного перехода от разомкнутых разрезов в бесконечной упругой плоскости к замкнутым. Полученные так СИУ первого рода на замкнутых контурах (границе тела) дополнены соответствующими регуляризирующими функционалами, обеспечивающими единственное решение интегральных уравнений при произвольной правой части.

SUMMARY. The system of singular integral equations of the first fundamental problem of plane elasticity theory for quasi-orthotropic body containing holes and cracks is constructed. For this purpose the known integral equations for a system of curvilinear cracks (cuts) in a quasi-orthotropic plane are used. Integral equations for multiply connected region are constructed using limiting transition from open cuts in an infinite elastic plane to closed ones. These singular integral equations of the first kind on closed contours (boundary of the body) are supplemented with corresponding regularizing functionals providing a unique solution of the integral equations for arbitrary right-hand side.

1. *Hasebe N. and Sato M.* Stress analysis of quasi-orthotropic elastic plane // Int. J. Solids Struct. – 2013. – **50**. – P. 209–216.
2. *Саврук М. П., Казберук А.* Плоскі задачі теорії пружності на власні значення для ортотропного та квазіортотропного клинів // Фіз.-хім. механіка матеріалів – 2014. – **50**, № 6. – С. 7–14.

   (*Savruk M. P. and Kazberuk A.* Plane eigenvalue problems of the theory of elasticity for orthotropic and quasiorthotropic wedges // Materials Science. – 2015. – **50**, № 6. – P. 771–781.)
3. *Hasebe N. and Sato M.* Mixed boundary value problem for quasi-orthotropic elastic plane // Acta Mech. – 2015. – **226**. – P. 527–545.

4. *Саврук М. П., Чорненький А. Б.* Плоска задача теорії пружності для квазіортотропного тіла з тріщинами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2015. – **51**, № 3. – С. 17–24.

(*Savruk M.P. and Chornenkyi A.B.* Plane problem of the theory of elasticity for a quasiorthotropic body with cracks // Mater. Sci. – 2015. – **51**, № 3. – P. 311–321.)

5. *Kazberuk A., Savruk M. P., and Chornenkyi A. B.* Stress distribution at sharp and rounded V-notches in quasi-orthotropic plane // Int. J. Solids Struct. – 2016. – **85**. – P. 134 –143.
6. *Savruk M. P. and Kazberuk A.* Stress concentration near sharp and rounded V-notches in orthotropic and quasi-orthotropic bodies // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2016. – **84**. – P. 166–176.
7. *Erdogan F. E., Ratwani M., and Yuceoglu U.* On the effect of orthotropy in a cracked cylindrical shell // Int. J. Fract. – 1974. – **10**, № 3. – P. 369–374.
8. *Krenk S.* Influence of transverse shear on an axial crack in a cylindrical shell // Int. J. Fract. – 1978. – **14**, № 2. – P. 123–145.
9. *Костенко И. С.* Упругое равновесие замкнутой ортотропной цилиндрической оболочки с продольними разрезами // Физ.-хим. механика материалов. – 1980. – **16**, № 5. – С. 67–70.

(*Kostenko I. S.* Elastic equilibrium of a closed orthotropic cylindrical shell with longitudinal notches // Materials Science. – 1980. – **16**, № 5. – P. 447–450.)

10. *Шевченко В. П., Довбня Е. Н., Цванг В. А.* Ортотропные оболочки с трещинами (разрезами) // Концентрация напряжений (Механика композитов в 12-ти т.). – К.: А.С.К., 1998. – Т. 7. – С. 212–249.
11. *Orthotropy* rescaling and implications for fracture in composites / Z. Suo, G. Bao, B. Fan, and T. C. Wang // Int. J. Solids Struct. – 1991. – **28**, № 2. – P. 235–248.
12. *Zhang W. and Deng X.* Asymptotic stress field in a degenerate orthotropic material containing a cohesive zone ahead of a crack tip // J. Elast. – 2008. – **90**, № 3. – P. 271–282.
13. *Cho S.-B. and Kim J.-K.* A study on stress singularities for V-notched cracks in anisotropic and/or pseudo-isotropic dissimilar materials // Int. J. Korean Soc. Prec. Eng. – 2002. – **3**, № 2. – P. 22–32.
14. *Kim J.-K. and Cho S.-B.* An analysis of eigenvalues and eigenvectors for V-notched cracks in pseudo-isotropic dissimilar materials // Int. J. Korean Soc. Prec. Eng. – 2002. – **3**, № 2. – P. 33–44.
15. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
16. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 464 с.
17. *Прусов И. А., Лунская Л. И.* Упругое состояние кусочно-однородной ортотропной плоскости с разрезами // Прикл. механика. – 1969. – **5**, № 8. – С. 77–83.
18. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
19. *Саврук М. П., Казберук А.* Концентрація напружень у твердих тілах з вирізами // Механіка руйнування та міцність матеріалів: Довідн. пос. / За заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Сполом, 2012. – **14**. – 384 с.
20. *Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В.* Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – К.: Наук. думка, 1989. – 248 с.
21. *Казберук А., Саврук М. П., Чорненький А. Б.* Концентрація напружень біля еліптичного отвору чи параболічного вирізу у квазіортотропній площині // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2016. – **52**, № 3. – С. 7–14.

Одержано 09.02.2016