

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ПЛОСКОДЕФОРМИРУЕМЫХ УПРУГИХ СРЕД С ПРОТЯЖЕННЫМИ ЭЛЛИПСООБРАЗНЫМИ И ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

В. С. ГУДРАМОВИЧ¹, Э. Л. ГАРТ², К. А. СТРУНИН³

¹ Институт технической механики НАН Украины и ГКА Украины, Днепр;

² Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара;

³ Государственное предприятие “Конструкторское Бюро “Южное” им. М. К. Янгеля”, Днепр

Численно смоделировано напряженно-деформированное состояние плоского элемента упругой неоднородной среды с протяженными эллипсообразными и прямоугольными включениями при использовании стандартного пакета конечноэлементного анализа ANSYS. Исследовано взаимовлияние включений в зависимости от их ориентации, формы, размеров и жесткости. Установлены наиболее безопасные варианты их взаиморасположения.

Ключевые слова: *плоский элемент упругой среды, протяженные эллипсообразные и прямоугольные включения, метод конечных элементов, компьютерное моделирование, напряженно-деформированное состояние.*

Изучение напряженно-деформированного состояния (НДС) тел с включениями важно для оптимизации технологических процессов изготовления материалов (порошковая металлургия, керамическое производство, литье и др.) [1–4]. Включениями могут моделироваться полосчатые образования в микроструктуре металлов, возникающие при предварительном пластическом деформировании [5]. Одно из направлений исследований НДС элементов конструкций с особого вида включениями – дискретное упрочнение материала [6].

Включения существенно влияют на процессы деформирования, приводят к концентрации напряжений и появлению дефектов формы или вызывают локальные разрушения [7–9]. При деформировании в материалах возможны фазовые превращения, например, формирование мартенситных структур [10]. Особенно важно изучить образование трещин при фазовых превращениях, определяющих начало разрушения материала [11, 12]. Протяженные включения могут моделировать также подкрепляющие элементы тонкостенных конструкций.

Включения и нарушения сплошности в виде трещин и пор являются локальными концентраторами напряжений. При исследовании НДС сред, содержащих их, целесообразны численные методы. Они достаточно универсальны и пригодны для объектов разных формы, размеров, а также видов нагружения, в отличие от зачастую громоздких и в некоторых случаях (неканонические формы включений, усложненные схемы деформирования и пр.) неприемлемых аналитических методов. Среди них наиболее распространены методы конечных разностей, граничных элементов, метод конечных элементов (МКЭ) [13–15]. Отметим актуальность разработки проекционно-итерационных схем реализации сеточных методов, существенно сокращающих компьютерный расчет для многих задач механики деформируемого твердого тела [16–18]. Такие схемы на основе МКЭ использовали также для сред с включениями [19–22]. Укажем на возможность их построения для метода локальных вариаций – численного метода решения вариационных задач [23].

В проектных организациях используют МКЭ в составе различных пакетов прикладных программ, в частности ANSYS, NASTRAN, ABAQUS и др. В настоящей работе с помощью программы ANSYS [24] проанализировано влияние на НДС формы, параметров и взаимного расположения протяженных эллипсообразных и прямоугольных включений в плоском элементе упругой среды, моделирующем ее поведение в указанных выше технологических процессах изготовления элементов конструкций или при эксплуатации. Исследовали два включения, что позволило выявить основные особенности их взаимодействия.

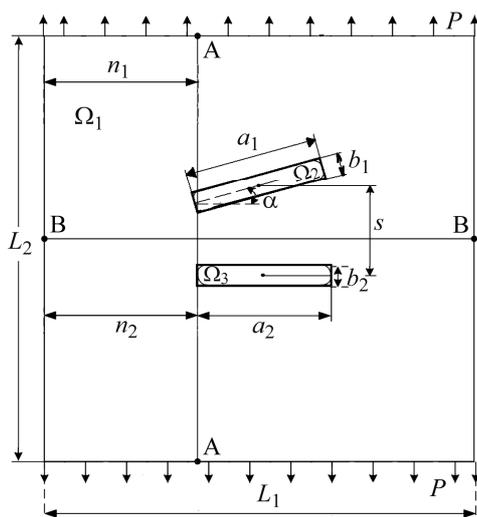


Рис. 1. Плоский элемент, моделирующий поведение среды с включениями.

Fig. 1. A plane element, modeling behavior of the medium with inclusions.

Расчетная модель. Рассмотрим неоднородный плоский элемент Ω упругой среды с двумя произвольно ориентированными упругими включениями Ω_2, Ω_3 ($\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$) (рис. 1). Размеры элемента таковы, что граничные условия не влияют на НДС вблизи включений. Через L_1, L_2 обозначены длины сторон плоского элемента; a_i, b_i – размеры сторон i -го включения; s – расстояние между центрами включений; α – угол поворота одного включения относительно другого; n_i – расстояние от края плоского элемента до i -го включения; А–А, В–В – сечения элемента, в которых анализировали НДС. На границе γ области Ω ($y = 0, 0 \leq x \leq L_1$ и $y = L_2, 0 \leq x \leq L_1$) заданы растягивающие усилия $P(x, y) = (P_x(x, y), P_y(x, y))^T$ ($P_x(x, y) = 0, P_y(x, y) = \text{const}$). На остальной ее части ($x = 0, 0 \leq y \leq L_2$ и $x = L_1, 0 \leq y \leq L_2$) они отсутствуют.

Необходимо найти поля перемещений и напряжений в элементе (матрице) с включениями при их различной ориентации друг относительно друга; исследовать влияние механических характеристик и геометрических параметров включений на НДС элемента; определить наиболее безопасные конфигурации их взаиморасположения. Как известно, с помощью моделей плоских задач можно выявить главные особенности НДС, в частности при деформировании сред, с учетом их взаимодействия с включениями разной формы [9, 12, 20–22].

В вариационной постановке исходная задача приводит к минимизации функционала потенциальной энергии деформации [25]. При изучении полей деформаций и напряжений вблизи включений рассматривают задачи, в которых области возмущения НДС значительно меньше, чем характерные размеры тела. При численном анализе размеры тела считают бесконечными. Классические вариационные принципы разработаны для конечных областей, и чтобы их распространить на бесконечные, необходимо изменить формулировку [21, 26].

Задачу решали МКЭ с использованием стандартного пакета прикладных программ ANSYS (лицензионной версии) [24]. Как известно [14, 15], основная идея МКЭ – дискретизация области непрерывного изменения аргументов искомой функции (перемещение, температура, давление и т. п.) совокупностью конечного числа подобластей – конечных элементов и аппроксимация непрерывной функции в пределах каждого конечного элемента некоторым полиномом. В ре-

зультате исходную вариационную задачу заменяют дискретной моделью – системой линейных или нелинейных алгебраических уравнений с неизвестными значениями искомой функции в узлах конечноэлементной сетки.

При расчетах использовали треугольные (шестиузловые) лагранжевые конечные элементы второй степени, при этом неизвестные функции перемещений внутри каждого конечного элемента аппроксимировали квадратичным полиномом.

Результаты численного анализа. Расчет выполняли для плоского элемента размерами $0,4 \times 0,4$ м с двумя протяженными эллипсообразными и прямоугольными включениями $a_1 \times b_1$ и $a_2 \times b_2$ из одинакового материала; относительную жесткость включений $k = G_2/G_1$ (G_1, G_2 – модули сдвига материалов матрицы и включений соответственно) выбирали больше, либо меньше единицы. Расстояние между включениями $s = 0,02$ м, внешняя растягивающая нагрузка $P = 10$ МПа. В качестве материала для включений и среды (матрицы) можно использовать алюминий, различные стали, в частности, для упрочняющих покрытий – стали Ст3, Р6М5 и др. Более “мягкие” в сравнении с матрицей включения целесообразны для придания некоторых функциональных свойств бинарным системам (проводимость, порообразование).

Рассчитывали на ПК Intel Inside с тактовой частотой Dual-Core 2.10 GHz, оперативной памятью 3 GB, разрядностью системы X32. Количество конечных элементов 67308. Время расчета в среднем 18 с.

Рис. 2 и 3 иллюстрируют распределение относительной интенсивности напряжений σ_i/P в плоском элементе в зависимости от угла поворота одного включения относительно другого при $k > 1$ (рис. 2; $k = 3,2$) и $k < 1$ (рис. 3; $k = 0,31$). На всех рисунках на отрезках осей $[0; 0,2]$ и $[0,8; 1]$ значения σ_i/P постоянны и равны соответствующим при $L = 0,2$ и $L = 0,8$ (L – безразмерная величина: $L = x/L_1$, $0 \leq x \leq L_1$, $L_1 = L_2$), поэтому не приведены.

На рис. 2а–д приняты следующие размеры включений: $a_1 = 0,03$ м; $b_1 = 0,01$ м; $a_2 = 0,01$ м; $b_2 = 0,005$ м; $n_1 = n_2 = 0,0185$ м. В сечении А–А максимальные по абсолютному значению напряжения возникают при угле поворота включения $\alpha = 135^\circ$, а в сечении В–В – при 45° . На рис. 3а, б указано распределение величины σ_i/P в этих сечениях для более “мягких” включений в зависимости от изменения угла между ними.

Максимальные напряжения σ_i в сечении А–А возникают при $\alpha = 90^\circ$, а в В–В – при 135° . Следовательно, для двух прямоугольных включений разной длины с большей относительной жесткостью напряжения больше, а более “мягкие” снижают их концентрацию приблизительно на 25%. Угол поворота $\alpha = 135^\circ$ остается опасным и для “мягкого”, и “жесткого” включений, однако для “мягких” всплески напряжений наблюдаются также при угле поворота 90° .

Изучали (рис. 2с, д и 3с, д) эллипсообразные включения, полуоси которых такие же, как соответствующие размеры включений на рис. 2а, б и 3а, б. Исследовали влияние их формы на изменение НДС пластины. Максимальные по абсолютному значению напряжения σ_i в сечении А–А возникают при угле поворота 135° и 45° , а в В–В – при 45° и 180° (рис. 2с, д). Для “мягкого” включения в сечении А–А зафиксирован их всплеск при $\alpha = 90^\circ$ и 45° , в сечении В–В – при 90° (рис. 3с, д). Пики напряжений в сечении В–В при остальных углах практически одинаковые (разница ~6%). Таким образом, при разных сочетаниях материалов эллипсообразные включения обуславливают меньшие пики напряжений, нежели прямоугольные.

Отклонение между максимальными скачками напряжений, если $\alpha = 135^\circ$, увеличивается в ~2 раза (эллипсообразные включения значительно уменьшают

пики напряжений) (рис. 2а, с), а при 90° – на ~30% (рис. 3а, с). При 90° (рис. 3д) и 135° (рис. 3б) различия в пиках напряжений незначительные (~2%).

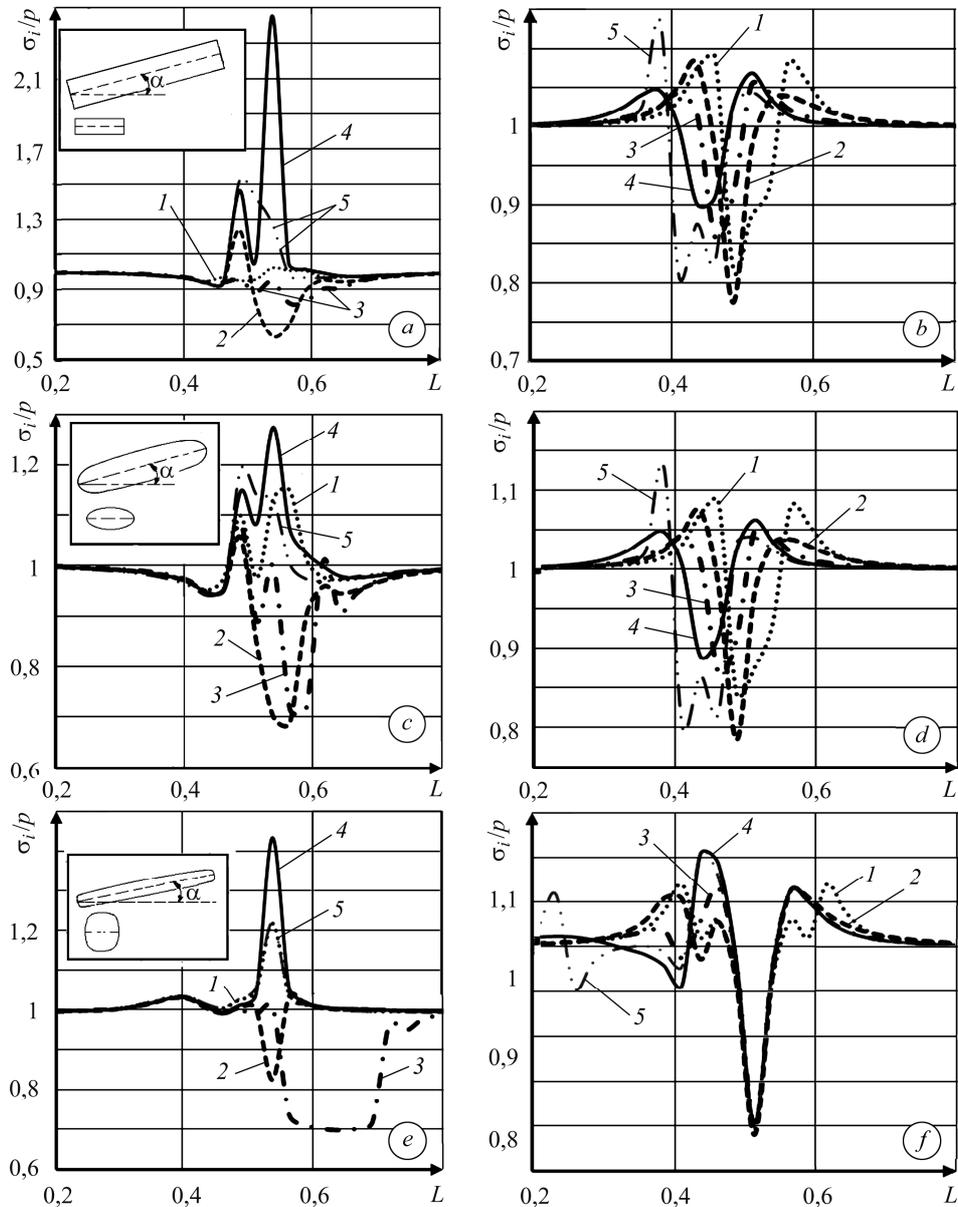


Рис. 2. Распределение относительной интенсивности напряжений σ_i/p в плоском элементе с двумя прямоугольными (а, б) и эллипсообразными (с, д, е, ф) включениями при $k > 1$: а, с, е – для сечения А–А ($0 \leq L \leq L_2/L_2$); б, д, ф – для сечения В–В ($0 \leq L \leq L_1/L_1$); 1 – $\alpha = 0^\circ$; 2 – 45° ; 3 – 90° ; 4 – 135° ; 5 – 180° .

Fig. 2. Relative stress distribution σ_i/p in the plane element with two rectangular (a, b) and ellipsoidal (c, d, e, f) inclusions at $k > 1$: a, c, e – for cross-section A–A ($0 \leq L \leq L_2/L_2$); b, d, f – for cross-section B–B ($0 \leq L \leq L_1/L_1$); 1 – $\alpha = 0^\circ$; 2 – 45° ; 3 – 90° ; 4 – 135° ; 5 – 180° .

Приведены (рис. 2е, ф и 3е, ф) результаты исследований двух эллипсообразных включений, одно из которых сильно вытянуто; сочетание материалов то же, что и в предыдущих случаях; размеры включений: $a_1 = 0,07$ м, $b_1 = 0,017$ м, $a_2 = 0,02$ м, $b_1 = 0,023$ м, $n_1 = 0,0165$ м, $n_2 = 0,019$ м.

Максимальные по абсолютному значению напряжения в сечении А–А возникают при $\alpha = 135^\circ$, а в сечении В–В – при всех исследуемых углах поворота (рис. 2e, f). Для “мягкого” включения максимальные напряжения в сечении А–А зафиксировали при $\alpha = 90^\circ$, а в сечении В–В – как и для “жесткого”, при всех значениях угла α (рис. 3e, f). Более “мягкое” включение вызывает большую концентрацию напряжений (~20%), наиболее опасен угол ориентации для обоих случаев 90° , а для более “жесткого” – еще и 135° .

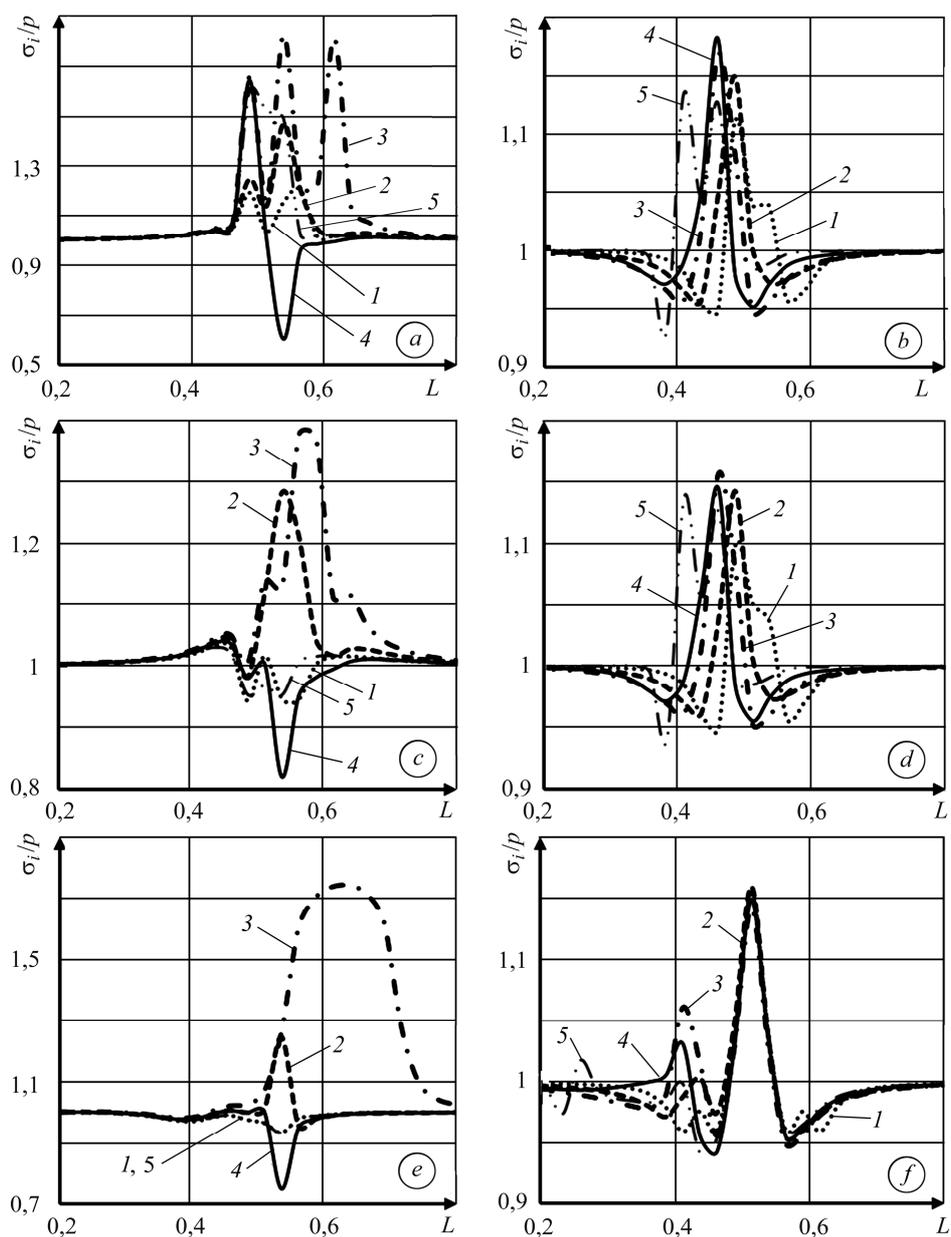


Рис. 3. Распределение относительной интенсивности напряжений σ_i/p в плоском элементе при $k < 1$ (обозначение см. рис. 2).

Fig. 3. Relative stress intensity distribution σ_i/p in the plane element at $k < 1$ (designations as in Fig. 2).

ВЫВОДЫ

Компьютерное моделирование НДС плоского элемента упругой среды с протяженными эллипсообразными и прямоугольными включениями разных размеров, ориентации и жесткости показало, что при росте их относительной жесткости включений (если $k > 1$) коэффициент концентрации напряжений увеличивается, что может привести к появлению пластических деформаций и очагов разрушения. С помощью стандартных пакетов конечноэлементного анализа можно исследовать НДС, варьируя в широком диапазоне жесткостные и геометрические характеристики включений, их форму, количество, ориентацию, и при других видах нагружения (двухосное растяжение – сжатие, кручение в сочетании с ним). Результаты исследования можно применить при моделировании технологических процессов порошковой металлургии и керамического производства, изучении влияния дискретного упрочнения и дискретизации микроструктуры материала при фазовых превращениях, НДС подкрепленных пластинчатых элементов конструкций. С помощью пакетов прикладных программ можно исследовать образование нарушений сплошности в виде трещин в зоне расположения включений и особенности возникающего при этом локального нагружения между включением и трещинами.

РЕЗЮМЕ. Числово змодельовано напружено-деформований стан плоского елемента пружного неоднорідного середовища з витягнутими еліпсоподібними та прямокутними включеннями з використанням стандартного пакета скінченноелементного аналізу ANSYS. Досліджено взаємовплив включень залежно від їх орієнтації, форми, розмірів і жорсткості. Встановлено найбезпечніші варіанти їх взаєморозташування.

SUMMARY. The stress-strain state of a plane element of elastic inhomogeneous medium with long ellipsoidal or rectangular inclusions, when using standard finite element analysis software ANSYS, is numerically modeled. The interaction of inclusions depending on their orientation, shape, size and rigidity is investigated. The most secure options for their relative positions are established.

1. *Феноменологические* теории прессования порошков / М. Б. Штерн, Г. Г. Сердюк, Л. А. Максименко, Ю. В. Трухан, Ю. М. Шуляков. – К.: Наук. думка, 1982. – 140 с.
2. *Анциферов В. Н., Перельман В. Е.* Механика процессов прессования порошковых и композиционных материалов. – М.: Грааль, 2001. – 628 с.
3. *Olevsky E. A., Maximenko A., and Van Der Biest O.* On-line sintering strength of ceramic composites // *Int. J. Mech. Sci.* – 2002. – **44**. – P. 755–771.
4. *Штерн М. Б., Рудь В. Д.* Механічні та комп'ютерні моделі консолідації гранульованих середовищ на основі порошків металів і кераміки при деформуванні та спіканні / Під ред. В. В. Скорохода. – Луцьк: Луцьк. нац. техн. ун-т, 2010. – 232 с.
5. *Гультяев В. И., Зубчанинов В. Г., Зубчанинов Д. В.* Структурные изменения стали 45 в процессе деформирования // *Изв. Тульск. гос. ун-та.* – 2005. – Вып. 8. – С. 26–29.
6. *Ляшенко Б. А., Кузема Ю. А., Дигам М. С.* Упрочнение поверхности металлов покрытиями дискретной структуры с повышенной адгезионной и когезионной стойкостью. – К.: Ин-т проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, 1984. – 58 с.
7. *Фудзии Т., Дзако М.* Механика разрушения композиционных материалов / Пер с яп. – М.: Мир, 1982. – 232 с.
8. *Hudramovich V. S.* Features of nonlinear deformation and critical states shell structures with geometrical imperfections // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **43**, № 3. – P. 1323–1355.
9. *Honein T. and Herrmann G.* On bonded inclusions with circular or straight boundaries in plain elastostatics // *Trans. ASME: J. Appl. Mech.* – 1990. – **57**. – P. 850–856.
10. *Коваль Ю. Н., Лободюк В. А.* Деформационные и релаксационные явления при превращениях мартенситного типа. – К.: Наук. думка, 2010. – 288 с.
11. *Вильчевская Е. Н., Королев И. К., Фрейдин А. Б.* О фазовых превращениях в области неоднородности материала. Ч. 2: Взаимодействие трещины с включением, претерпевающим фазовое превращение // *Изв. Росс. академии наук. Механика твердого тела.* – 2011. – № 5. – С. 32–42.

12. Морозов Н. Ф., Фрейдлин А. Б. Зоны фазовых переходов и фазовые превращения упругих тел при различных видах напряженного состояния // Тр. Математического ин-та им. В. А. Стеклова. – 1998. – **223**. – С. 220–223.
13. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов / Пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
14. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация / Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
15. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
16. Гарт Э. Л., Борисовская И. В. Исследование вычислительной эффективности проекционно-итерационных вариантов методов конечных элементов и конечных разностей // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Механіка. – 2004. – **2**, вип. 8 – С. 44–51.
17. Hart E. and Hudramovich V. Applications of the projective-iterative versions of FEM in damage problems for engineering structures // Maintenance–2012: Proc. of Int. Conf. (Zenica, Bosnia and Herzegovina, June 13–16, 2012). – Zenica: Univ. of Zenica, 2012. – P. 157–164.
18. Hudramovich V. S., Hart E. L., and Ryabokon' S. A. Elastoplastic deformation of nonhomogeneous plates // J. Eng. Math. – 2013. – **78**, № 1. – P. 181–197.
19. Гарт Э. Л. Конечноэлементный анализ плоскодеформируемых сред с включениями // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Механіка. – 2011. – **2**, вип. 15. – С. 39–47.
20. Гарт Э. Л., Гудрамович В. С. Проекційно-ітераційні схеми реалізації методу скінченних елементів у задачах деформування пластин з отворами та включеннями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 2. – С. 48–59.
(Hart E. L. and Hudramovich V. S. Projection-iterative schemes for the realization of the finite-element method in problems of deformation of plates with holes and inclusions // J. Math. Sci. – 2014. – **203**, № 1. – P. 55–69.)
21. Гудрамович В. С., Гарт Э. Л. Конечноэлементный анализ процесса рассеянного разрушения плоскодеформируемых упругопластических сред с локальными концентраторами напряжений // Упругость и неупругость: Материалы Междунар. науч. симп. по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 105-летию со дня рождения А. А. Ильюшина (Москва, 20–21 января 2016 г.). – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2016. – С. 158–161.
22. Гудрамович В. С., Гарт Э. Л., Струнин К. А. Моделирование процесса деформирования пластины с упругими протяжёнными включениями на основе метода конечных элементов // Техн. механика. – 2014. – № 2. – С. 12–23.
23. Гарт Э. Л., Гудрамович В. С. Проекционно-итерационная модификация метода локальных вариаций для задач с квадратичным функционалом // Прикл. математика и механика. – 2016. – **80**, № 2. – С. 218–229.
24. ANSYS release 11.0 Documentation for ANSYS WORKBENCH [Электронный ресурс]: ANSYS Inc. – Электрон. дан. и прогр. – [Б. м.], 2007.
25. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 544 с.
26. Линьков А. М., Новожилков В. В. Экстремальные принципы для бесконечных областей // Успехи механики деформируемых сред. – М.: Наука, 1975. – С. 350–354.

Получено 19.05.2016